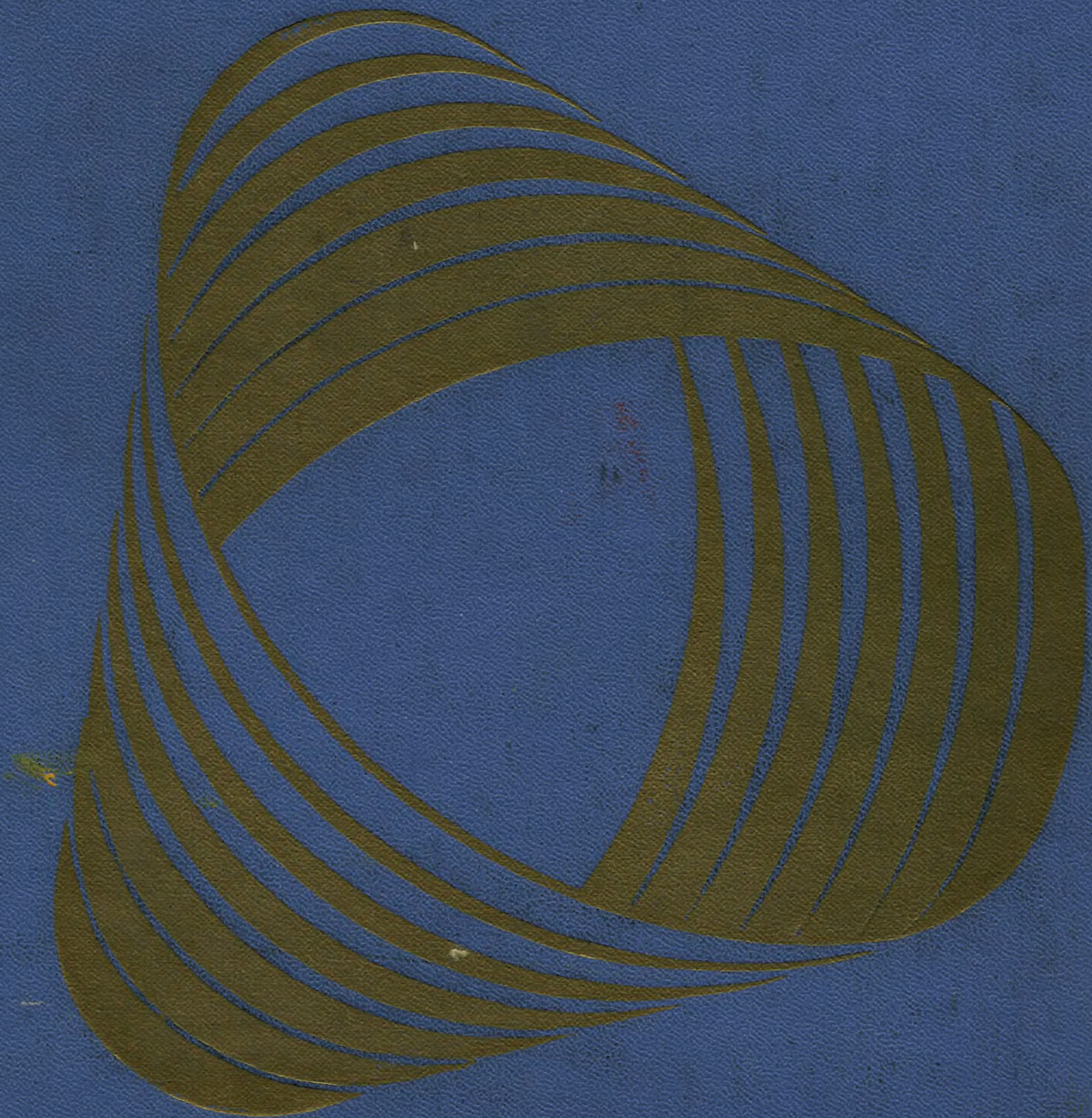
Детская Энциклопедия

2



Содержание

Мир небесных тел

Б. А. Воронцов-Вельяминов
7 Астрономия — наука о Вселенной

Как развивалась наука о Вселенной

Ю. Г. Перель
8 Астрономия в древности и в средние века
8 Астрономия в древности
16 Астрономия в средние века
Ю. Г. Перель
20 От Коперника до Ньютона
Ю. А. Рябов
33 Закон всемирного тяготения
Ю. А. Рябов
35 Приливы и отливы
Б. А. Воронцов-Вельяминов
39 Как измеряют расстояние до небесных светил
Б. А. Воронцов-Вельяминов
41 Как работают астрономы
42 Наблюдения в телескоп
45 Фотографирование звезд
45 Спектральный анализ
45 Определение химического состава небесных тел
47 Определение точного времени и координат светил
47 Радиоастрономия
49 Где работают астрономы
Б. А. Воронцов-Вельяминов
51 По отечественным обсерваториям

Что мы знаем о Вселенной

Ф. Ю. Зигель
56 Звездное небо
57 Откуда взялись названия созвездий
62 Звездное небо вращается
63 Звездное небо в разных местах Земли
64 Как меняется вид звездного неба
С. А. Никитин, Ю. П. Псковский
65 Луна
66 Если следить за Луной невооруженным глазом ...
69 Поверхность Луны, видимая в телескоп
70 В дело вступают другие приборы
71 Луна — объект космических исследований
Э. В. Кононович
76 Солнце
77 Спокойное Солнце
83 Солнечная активность
Г. А. Пономарева
86 Солнечные и лунные затмения
В. Д. Давыдов
92 Планеты Солнечной системы
92 Меркурий
94 Венера
95 Земля
97 Марс
101 Юпитер
102 Сатурн
104 Уран и Нептун
105 Плутон
105 Малые планеты
Б. Ю. Левин
107 Кометы
Е. Л. Кринов
116 Метеоры и метеориты
116 Метеоры — атмосферное явление
116 Метеорные потоки
118 Наблюдения метеоров
118 Огненные шары — болиды
118 Общий вид и размеры метеоритов
120 Как падают метеориты
120 «Железный дождь»
122 Тунгусский метеорит-комета
123 Из чего состоят метеориты
123 Происхождение и значение метеоритов
125 Помощь населения в сборе метеоритов
Б. А. Воронцов-Вельяминов
128 Звезды и глубины Вселенной
128 Сколько звезд на небе?
128 Звездные карты, атласы и каталоги
128 Видимое и действительное. Светимости звезд
129 «Градусники» для звездных температур
131 Карлики и гиганты в мире звезд
132 Пары и тройки в звездном мире
134 «Дьявольские» звезды
136 Маяки Вселенной — цефеиды
136 Вспыхивающие и другие загадочные звезды
137 Вспышки новых и сверхновых звезд — мировые катастрофы
141 Звездные скопления и космическая пыль
143 Газовые туманности и межзвездный газ
148 Млечный Путь и Галактика, в которой мы живем
149 Другие галактики — островные вселенные
151 Бесконечная Вселенная и наш адрес в ней
Б. А. Воронцов-Вельяминов
152 Как произошли Земля и другие небесные тела
153 О первых «днях» Земли
154 Развитие Солнца, звезд и газово-пылевых облаков

Как астрономия помогает человеку

К. А. Куликов
155 Астрономия в народном хозяйстве СССР
Я. И. Шур
159 Время и календарь
159 Трудная задача
159 Счет времени в древности
162 Самый простой и удобный календарь
163 Юлианский календарь
165 Новый стиль
166 От чего считают годы?
167 Который час?

Изучение Вселенной при помощи космонавтики

И. А. Минасян
168 Законы движения искусственных небесных тел
В. Г. Курт
173 Астрономия из космоса
173 Исследования в ультрафиолетовой части спектра
174 Исследования в области рентгеновского излучения
Т. М. Мулярчик
175 Явления в околоземном космическом пространстве
И. А. Минасян
177 Перспективы покорения космоса

Исследователи Вселенной

Ю. Г. Перель

178 Михаил Васильевич Ломоносов

179 Вильям Гершель

181 Пьер Симон Лаплас

182 Джемс Брадлей

183 Фридрих Вильгельм Бессель

184 Василий Яковлевич Струве

186 Мариан Альбертович Ковальский

187 Федор Александрович Бредихин

188 Аристарх Аполлонович Белопольский

189 Генри Норрис Рессел

190 Эдвин Хаббл

191 Карл Шварцшильд и Артур Стэнли Эддингтон

192 Григорий Абрамович Шайн

194 Ученый-революционер Павел Карлович Штернберг

Юные астрономы

Ю. Г. Перель

196 Любителям астрономии

В. А. Бронштэн, М. М. Шемякин

197 Телескоп астронома-любителя

Н. К. Семакин

204 Наблюдения неба любителем астрономии

206 Наблюдения Солнца и солнечных затмений

207 Наблюдения переменных звезд

208 Наблюдения Луны и планет

210 Наблюдения комет

210 Наблюдения метеоров

212 Наблюдения искусственных спутников Земли

212 Наблюдения серебристых облаков

Я. И. Шур

213 Планетарий

215 Как устроен большой аппарат планетарий

Справочный отдел

В. Д. Давыдов, И. Е. Рахлин

219 Основные данные о небесных телах

И. Е. Рахлин

225 Что читать по астрономии

225 Общие книги по астрономии

225 Солнце

225 Луна, планеты и их движения

226 Кометы, метеоры, метеориты

226 Звездная Вселенная

227 Жизнь во Вселенной

227 История астрономии

228 Руководства к изготовлению астрономических инструментов и к любительским наблюдениям

И. Е. Рахлин

229 Словарь-указатель Из занимательной астрономии

В. Н. Комаров

30 Люди без звезд

Ю. Г. Перель

55 Династия астрономов

В. Н. Комаров

106 Вспышки на Марсе

130 Пульсары

144 Другие планетные системы

Я. И. Шур

163 Календарь на 200 лет

Коммунистом стать можно
лишь тогда, когда
обогатишь свою память
знанием всех тех богатств,
которые выработало
человечество.

В. И. ЛЕНИН

Академия педагогических наук СССР

Детская Энциклопедия 2

Для среднего и старшего возраста

Третье издание

Главный редактор
МАРКУШЕВИЧ А. И.
Члены главной редакции:
АРТОБОЛЕВСКИЙ И. И.
БАННИКОВ А. Г.
БЛАГОЙ Д. Д.
БРУСНИЧКИНА Р. Д.
БУЦКУС П. Ф.
ВОРОЖЕЙКИН И. Е.
ВОРОНЦОВ-ВЕЛЬЯМИНОВ Б. А.
ГЕНКЕЛЬ П. А.
ГЕРАСИМОВ С. А.
ГОНЧАРОВ А. Д.
ГОРШКОВ Г. П.
ДАНИЛОВ А. И.
ДЖИБЛАДЗЕ Г Н.
ДОЛИНИНА Н. Д.
ДУБИНИН Н. П.
ИВАНОВИЧ К. А.
ИЗМАЙЛОВ А. Э.
КАБАЛЕВСКИЙ Д. Б.
КЕДРОВ Б. М.
КИМ М. П.
КУЗИН Н. П.
КУЗОВНИКОВ А. М.
ЛЕОНТЬЕВ А. Н.
ЛУРИЯ А. Р.
МАРКОСЯН А. А.
МИХАЛКОВ С. В.
НЕЧКИНА М. В.
ПАНАЧИН Ф. Г.
ПЕТРЯНОВ И. В.
РАЗУМНЫЙ В. А.
СКАЗКИН С. Д.
СОЛОВЬЕВ А. И.
ТИМОФЕЕВ Л. И.
ТИХВИНСКИЙ С. Л.
ТЯЖЕЛЬНИКОВ Е. М.
ХАЧАТУРОВ Т. С.
ЦАГОЛОВ Н. А.
ЦАРЕВ М. И.
ЧЕПЕЛЕВ В. И.

Заместитель главного редактора
КУЗНЕЦОВ А. М.

Издательство «Педагогика»
Москва
1972 г.

Мир небесных тел. Числа и фигуры

Научные редакторы тома:
ВОРОНЦОВ-ВЕЛЬЯМИНОВ Б. А.
МАРКУШЕВИЧ А. И.

03:8ю
Д38

Мир небесных тел

Б. А. Воронцов-Вельяминов
7 Астрономия — наука о Вселенной

Как развивалась наука о Вселенной

Ю. Г. Перель
8 Астрономия в древности и в средние века
8 Астрономия в древности
16 Астрономия в средние века
Ю. Г. Перель
20 От Коперника до Ньютона
Ю. А. Рябов
33 Закон всемирного тяготения
Ю. А. Рябов
35 Приливы и отливы
Б. А. Воронцов-Вельяминов
39 Как измеряют расстояние до небесных светил
Б. А. Воронцов-Вельяминов
41 Как работают астрономы
42 Наблюдения в телескоп
45 Фотографирование звезд
45 Спектральный анализ
45 Определение химического состава небесных тел
47 Определение точного времени и координат светил
47 Радиоастрономия
49 Где работают астрономы
Б. А. Воронцов-Вельяминов
51 По отечественным обсерваториям

Что мы знаем о Вселенной

Ф. Ю. Зигель
56 Звездное небо
57 Откуда взялись названия созвездий
62 Звездное небо вращается
63 Звездное небо в разных местах Земли
64 Как меняется вид звездного неба
С. А. Никитин, Ю. П. Псковский
65 Луна
66 Если следить за Луной невооруженным глазом ...
69 Поверхность Луны, видимая в телескоп
70 В дело вступают другие приборы
71 Луна — объект космических исследований
Э. В. Кононович
76 Солнце
77 Спокойное Солнце
83 Солнечная активность
Г. А. Пономарева
86 Солнечные и лунные затмения
В. Д. Давыдов
92 Планеты Солнечной системы
92 Меркурий
94 Венера
95 Земля
97 Марс
101 Юпитер
102 Сатурн
104 Уран и Нептун
105 Плутон
105 Малые планеты
Б. Ю. Левин
107 Кометы
Е. Л. Кринов
116 Метеоры и метеориты
116 Метеоры — атмосферное явление
116 Метеорные потоки
118 Наблюдения метеоров
118 Огненные шары — болиды
118 Общий вид и размеры метеоритов
120 Как падают метеориты
120 «Железный дождь»
122 Тунгусский метеорит-комета
123 Из чего состоят метеориты
123 Происхождение и значение метеоритов
125 Помощь населения в сборе метеоритов
Б. А. Воронцов-Вельяминов
128 Звезды и глубины Вселенной
128 Сколько звезд на небе?
128 Звездные карты, атласы и каталоги
128 Видимое и действительное. Светимости звезд
129 «Градусники» для звездных температур
131 Карлики и гиганты в мире звезд
132 Пары и тройки в звездном мире
134 «Дьявольские» звезды
136 Маяки Вселенной — цефеиды
136 Вспыхивающие и другие загадочные звезды
137 Вспышки новых и сверхновых звезд — мировые катастрофы
141 Звездные скопления и космическая пыль
143 Газовые туманности и межзвездный газ
148 Млечный Путь и Галактика, в которой мы живем
149 Другие галактики — островные вселенные
151 Бесконечная Вселенная и наш адрес в ней
Б. А. Воронцов-Вельяминов
152 Как произошли Земля и другие небесные тела
153 О первых «днях» Земли
154 Развитие Солнца, звезд и газово-пылевых облаков

Как астрономия помогает человеку

К. А. Куликов
155 Астрономия в народном хозяйстве СССР
Я. И. Шур
159 Время и календарь
159 Трудная задача
159 Счет времени в древности
162 Самый простой и удобный календарь
163 Юлианский календарь
165 Новый стиль
166 От чего считают годы?
167 Который час?

Изучение Вселенной при помощи космонавтики

И. А. Минасян
168 Законы движения искусственных небесных тел
В. Г. Курт
173 Астрономия из космоса
173 Исследования в ультрафиолетовой части спектра
174 Исследования в области рентгеновского излучения
Т. М. Мулярчик
175 Явления в околоземном космическом пространстве
И. А. Минасян
177 Перспективы покорения космоса

Исследователи Вселенной

Ю. Г. Перель
178 Михаил Васильевич Ломоносов
179 Вильям Гершель
181 Пьер Симон Лаплас
182 Джемс Брадлей
183 Фридрих Вильгельм Бессель
184 Василий Яковлевич Струве
186 Мариан Альбертович Ковальский
187 Федор Александрович Бредихин
188 Аристарх Аполлонович Белопольский
189 Генри Норрис Рессел
190 Эдвин Хаббл
191 Карл Шварцшильд и Артур Стэнли Эддингтон
192 Григорий Абрамович Шайн
194 Ученый-революционер Павел Карлович Штернберг

Юные астрономы

Ю. Г. Перель
196 Любителям астрономии
В. А. Бронштэн, М. М. Шемякин
197 Телескоп астронома-любителя
Н. К. Семакин
204 Наблюдения неба любителем астрономии
206 Наблюдения Солнца и солнечных затмений
207 Наблюдения переменных звезд
208 Наблюдения Луны и планет
210 Наблюдения комет
210 Наблюдения метеоров
212 Наблюдения искусственных спутников Земли
212 Наблюдения серебристых облаков
Я. И. Шур
213 Планетарий
215 Как устроен большой аппарат планетарий

Справочный отдел

В. Д. Давыдов, И. Е. Рахлин
219 Основные данные о небесных телах
И. Е. Рахлин
225 Что читать по астрономии
225 Общие книги по астрономии
225 Солнце
225 Луна, планеты и их движения
226 Кометы, метеоры, метеориты
226 Звездная Вселенная
227 Жизнь во Вселенной
227 История астрономии
228 Руководства к изготовлению астрономических инструментов и к любительским наблюдениям
И. Е. Рахлин
229 Словарь-указатель
Из занимательной астрономии
В. Н. Комаров
30 Люди без звезд
Ю. Г. Перель
55 Династия астрономов
В. Н. Комаров
106 Вспышки на Марсе
130 Пульсары
144 Другие планетные системы
Я. И. Шур
163 Календарь на 200 лет

Астрономия — наука о Вселенной

Из всех картин природы, развертывающихся перед нашими глазами, самая величественная — картина звездного неба.

Мы часто любуемся ею в ясные, безлунные ночи, и она будит наше воображение. А недавно человек получил возможность увидеть картину Вселенной с борта космического корабля и с Луны.

Мы можем облететь или объехать весь земной шар, наш мир, в котором мы живем. Звездное же небо — это необозримое, бесконечное пространство, заполненное другими мирами. Каждая звездочка, даже еле заметно мерцающая в темном небе, представляет собой огромное светило, часто более величественное, более горячее и яркое, чем Солнце. Но все звезды находятся от нас несравненно дальше Солнца и потому кажутся слабо светящимися точками.

Что это за миры, как далеки они от нас и как измеряются расстояния до них? Как произошли они, как устроены, что было с ними в прошлом и что произойдет в будущем?

Все эти вопросы изучает астрономия — наука о Вселенной.

Ученые смогли определить расстояния до звезд, узнать массу Солнца и его химический состав, предсказать будущие затмения Луны и Солнца, время появления комет. Но прошли многие века, прежде чем это удалось сделать.

Когда же и как зародилась наука о Вселенной?

Уже в глубокой древности люди следили за появлением Солнца над горизонтом, за движением его по небу, чтобы узнать, скоро ли оно опять опустится к горизонту и наступит ночь. По положению Солнца и звезд человек научился определять время суток.

Шли века. Все точнее становились наблюдения над небесными явлениями. Ученые подмечали закономерности в изменении расположения небесных светил. Они старались понять и объяснить причины видимого движения звезд, Луны, Солнца, планет.

Изучая небо, каждый может убедиться, что на нем происходят различные изменения. Вот вспыхнула новая звезда и на несколько дней затмила своим светом другие звезды. Какая мировая катастрофа породила эту вспышку?

Вот появилась комета с большим, как бы огненным хвостом. Быстро пролетая сквозь строй планет, комета плавно огибает Солнце и удаляется в неизвестность. А иная комета, кружась вокруг Солнца, рассыпается на рой мельчайших невидимых камешков. Камешки эти несутся с огромной скоростью и, влетая в атмосферу Земли, раскаляются и светятся. Тогда в темном небе сверкают «падающие звезды» — метеоры. По большей части они превращаются в пар, но некоторые, покрупнее, долетают до Земли.

Камень с неба! Это вестник далеких миров. Его можно увидеть в музейной витрине. Астрономы и любители астрономии заботливо собирают осколки упавших с неба камней. Маленький кусочек, упавший с неба, состоит из тех же веществ, что и наш земной шар.

Иногда на небе в зимнюю ночь, как лучи цветных прожекторов, ходят, перекрещиваясь, лучи полярных сияний. В это время сильно колеблется магнитная стрелка, радиоприемник начинает громко трещать. Какова причина этих явлений?

Ученые очень много сделали для выяснения всех этих и многих других грандиозных и сложных явлений, происходящих во Вселенной.

Советская астрономия занимает виднейшее место в мировой науке. 4 октября 1957 г. в СССР был произведен впервые в мире успешный запуск искусственного спутника Земли. За первым спутником последовали многие другие, осуществляя давнишнюю мечту человечества — проникнуть в глубины Вселенной. Советские космонавты Ю. А. Гагарин и Г. С. Титов первыми проникли в космос на космических кораблях. За ним и полетели другие космонавты.

Теория запуска ракет и космических кораблей опирается в значительной степени на данные астрономии. Советские астрономы разрабатывают науку о Вселенной в сотрудничестве с передовыми учеными других стран. На международных совещаниях и конференциях, ежегодно происходящих в разных странах, советские астрономы выступают в качестве активных участников.

Астрономия не только раскрывает тайны глубин Вселенной, но и помогает людям в их практической деятельности: в составлении точных карт поверхности Земли, правильном определении курса кораблей и самолетов, Службе точного времени и во многом другом.

Юные читатели Детской энциклопедии! Если вы захотите стать астрономами, то перед вами откроется безбрежное поле творческой деятельности.

Как развивалась наука о Вселенной

Астрономия в древности и в средние века

Астрономия в древности

Астрономия — древнейшая наука. Она возникла, как указывал один из великих основоположников научного коммунизма — Фридрих Энгельс, в связи с практическими потребностями людей.

Основными занятиями многих народов в древности были скотоводство и земледелие. В Египте, Вавилонии, Индии и других государствах земледелие и скотоводство регулировались такими сезонными явлениями природы, как разливы больших рек, наступление периода дождей, смена теплой и холодной погоды и т. д. Люди знали, что смена дня и ночи обусловлена восходом и заходом Солнца.

Давние наблюдения неба привели также и к открытию связи между сменой времен года и такими небесными явлениями, как изменение полуденной высоты Солнца в течение года, появление в одно и то же время года на небе с наступлением темноты одних и тех же ярких звезд.

Таким образом, еще в глубокой древности были заложены основы календаря — системы счета времени, где основными единицами стали сутки (смена дня и ночи), месяц (промежуток между двумя новолуниями) и год (время видимого полного оборота Солнца по небу среди звезд). Календарь был необходим, чтобы рассчитывать время начала полевых работ. Нужны были наблюдения неба и земных явлений, чтобы время от времени уточнять календарь (см. ст. «Время и календарь»). Такие наблюдения и велись в некоторых странах Древнего Востока.

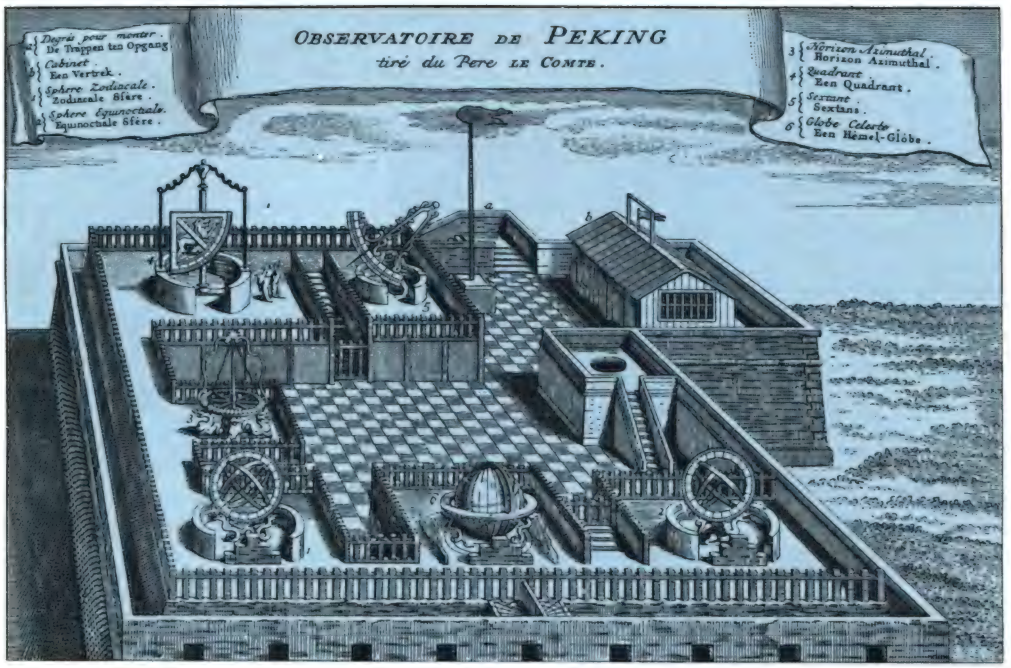
С течением времени было обнаружено, что кроме Солнца и Луны есть еще пять светил, которые постоянно перемещаются по небу среди звезд. Эти «блуждающие» светила — планеты — впоследствии были названы Меркурием, Венерой, Марсом, Юпитером и Сатурном. Наблюдения позволили также подметить на небе очертания наиболее характерных созвездий и установить периодичность наступления солнечных и лунных затмений.

Наблюдая небесные явления на протяжении тысячелетий, люди не знали вызывающих их причин. Звезды и планеты они видели как светящиеся точки на небе, но об их действительной природе, так же как и о природе Солнца и Луны, им ничего не было известно. Не понимая природы небесных светил, не зная законов развития человеческого общества и истинной природы войн и болезней, люди обожествляли светила, приписывали им влияние на судьбы людей и народов. Так возникла лженаука астрология, пытавшаяся предсказывать судьбы людей по взаимному расположению и движению небесных светил. Подлинная наука давно опровергла выдумки астрологии.

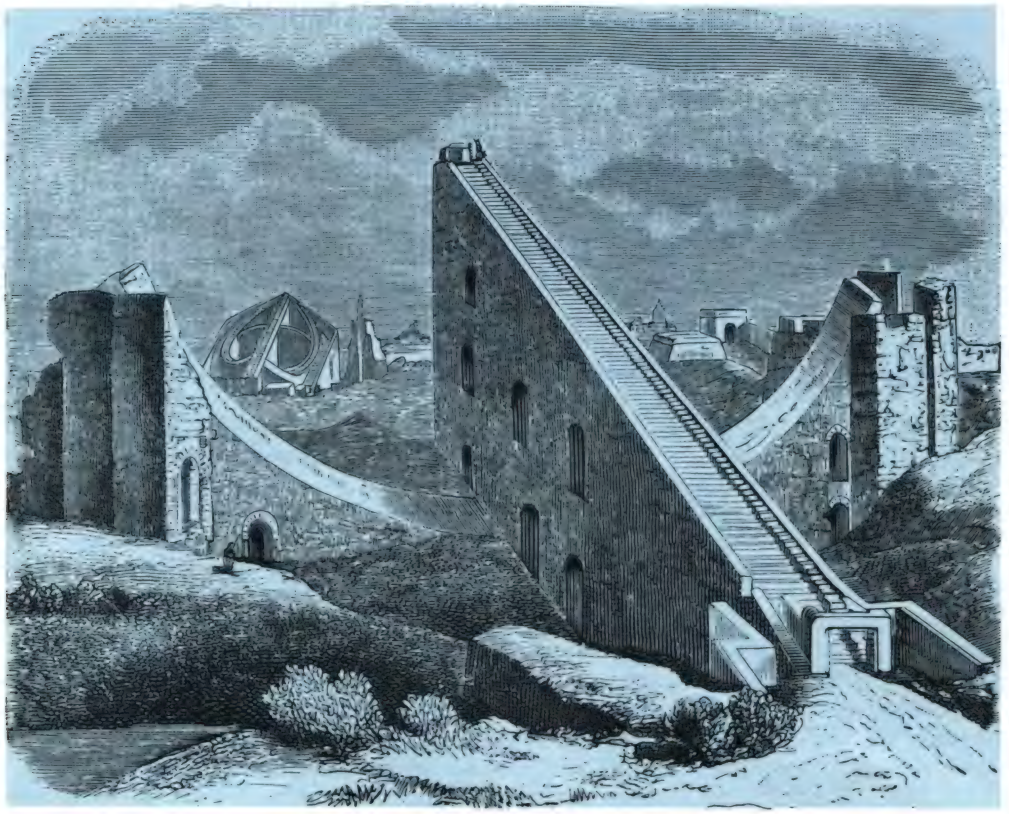
На старинной гравюре изображены выдающиеся астрономы. В центре — покровительница астрономии Урания. Слева направо: Гевелий, Гасс, Улугбек, Птолемей, Тихо Браге, Риччиоли.

Наука и религия глубоко враждебны друг другу. Наука открывает законы природы и помогает людям на основе этих законов использовать природу в своих интересах. Религия, наоборот, всегда внушала людям чувство беспомощности и страха перед природой. В древности, когда люди не знали законов природы, влияние религии и ее служителей — жрецов — на народ было особенно сильным. Так как жрецы играли большую роль в хозяйственной и политической жизни древневосточных государств, они были заинтересованы в астрономических наблюдениях и широко использовали их; эти наблюдения им были нужны также и для установления дат религиозных праздников.

Однако хозяйственный уклад древних государств с их примитивным земледелием, скотоводством и ремеслом, основанным на ручном труде рабов, не требовал еще сколько-нибудь высокого развития науки и техники. Поэтому астрономические наблюдения, проводившиеся в государствах Древнего Востока — Египте, Вавилонии, Индии, Китае, на протяжении многовековой истории не могли привести к созданию астрономии как науки, способной объяснить устройство Вселенной. И все же астрономы стран Древнего Востока достигли больших успехов в наблюдениях неба, научились предсказывать наступления затмений, следили за движением планет. Астрономические знания, накопленные в Египте и Вавилонии, осо-



Общий вид древней Пекинской обсерватории.



Обсерватория XVIII в. в Индии.

Аристотель — величайший ученый Древней Греции (384—322 до н. э.).

бенно в VI—V вв. до н. э., заимствовали древние греки.

Первые греческие ученые в это время пытались доказать, что Вселенная существует без участия божественных сил. Греческий философ Фалес из Милета в VI в. до н. э. учил, что все существующее в природе — и Земля и небо — возникло из одного «первоначального» элемента — воды. Другие ученые считали таким «первоначальным» элементом огонь или воздух. В том же веке греческий философ Гераклит Эфесский высказал гениальную мысль, что Вселенная никогда никем не была создана, она всегда была, есть и будет, что в ней нет ничего неизменного — все движется, изменяется, развивается. Эта замечательная мысль Гераклита впоследствии легла в основу подлинной науки, изучающей законы развития природы.

Многие греческие ученые полагали, что Земля — самое крупное тело во Вселенной и находится в ее центре. При этом они вначале считали Землю неподвижным плоским телом, вокруг которого обращаются Солнце, Луна и планеты. Позднее ученые пришли к выводу, что Вселенная и Земля устроены гораздо сложнее, чем это представляется неискушенному наблюдателю. В конце VI в. до н. э. Пифагор впервые высказал предположение, что Земля — тело не плоское, а шарообразное.

Крупным достижением было учение греческих философов Левкиппа и Демокрита. Они утверждали, что все существующее состоит из мельчайших частиц материи — *атомов* и что все явления природы совершаются без участия богов и других сверхъестественных сил.

Позднее, в IV в. до н. э., с изложением своих взглядов на устройство Вселенной выступил Аристотель — величайший из ученых и философов Древней Греции. Сочинения Аристотеля охватывают все области знаний того времени: физику, естествознание, историю и др. Интересовался Аристотель также формой Земли и ее положением во Вселенной. Аристотель считал, что Земля и все небесные тела шарообразны. Шарообразность Луны он доказал, изучая ее фазы, а шарообразность Земли объяснял характером лунных затмений. На диске Луны край земной тени всегда круглый, а это может быть только при условии шарообразности Земли.

Аристотель считал Землю центром Вселенной, крупнейшим ее телом, вокруг которого обращаются все небесные тела. Вселенная, по мнению Аристотеля, имеет конечные размеры — ее как бы замыкает сфера звезд.

Благодаря высокому научному авторитету Аристотеля его учение на много веков закрепило ложное мнение, что Земля — неподвижный центр Вселенной. Это мнение разделяли многие греческие ученые и позднее. В дальнейшем его как непреложную истину приняла христианская церковь: в Библии Земля тоже считалась неподвижной.

Впоследствии, уже в XVIII в., великий русский ученый М. В. Ломоносов, всю жизнь боровшийся за торжество науки над суеверием, оглядываясь на прошлые века, писал, что в течение многих веков «идолопоклонническое суеверие держало астрономическую Землю в своих челюстях, не давая ей двигаться».

Однако и в Греции после Аристотеля некоторые ученые высказывали смелые и правильные догадки об устройстве Вселенной.

Живший в III в. до н. э. Аристарх Самосский считал, что Земля обращается вокруг Солнца. Расстояние до Солнца он определил в 600 диаметров Земли. На самом деле это расстояние в 20 раз меньше действительного, но по тому времени и оно казалось невообразимо огромным. Однако это расстояние Аристарх считал ничтожным по сравнению с расстоянием от Земли до звезд. Эти гениальные мысли Аристарха, через много веков подтвержденные открытием Николая Коперника, не были поняты современниками. Аристарха обвинили в безбожии и

Клавдий Птолемей — древнегреческий астроном (II в. н. э.).

Система мира по Птолемею.

осудили на изгнание, а его правильные догадки были забыты.

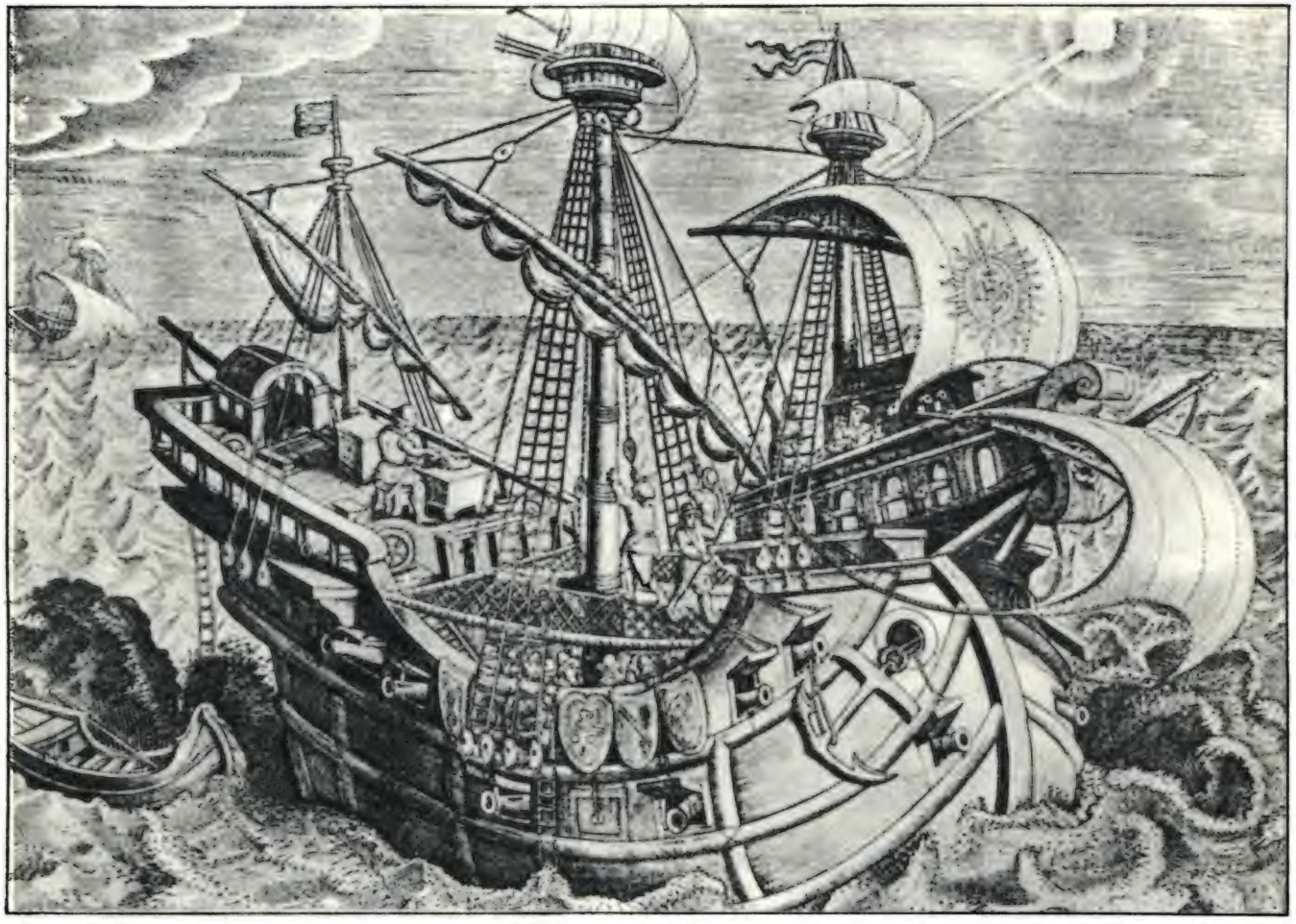
В конце IV в. до н. э. после походов и завоеваний Александра Македонского греческая культура проникла во все страны Ближнего Востока. Основанный в Египте город Александрия стал крупнейшим культурным центром. В Александрийской академии, объединявшей ученых того времени, в течение нескольких веков велись астрономические наблюдения уже при помощи угломерных инструментов. Александрийские астрономы достигли большой точности в своих наблюдениях и внесли много нового в астрономию. В III в. до н. э. александрийский ученый Эратосфен впервые определил размеры Земли (см. т. I ДЭ, ст. «Как измерили Землю»).

Во II в. до н. э. александрийский астроном Гиппарх, используя уже накопленные наблюдения, составил каталог более чем 1000 звезд с довольно точным определением их положения на небе. Гиппарх разделил звезды на 6 групп по их блеску. Звезды с наибольшим блеском он назвал звездами 1-й звездной величины, звезды с несколько меньшим блеском — звездами 2-й величины и т. д. Гиппарх считал, что звезды находятся от нас на одинаковом расстоянии и различие в их блеске зависит от размеров.

В действительности дело обстоит иначе: звезды находятся на различных расстояниях от нас, поэтому звезда огромных размеров, но находящаяся на очень большом расстоянии от нас будет по своему блеску казаться звездой далеко не 1-й величины. Наоборот, звезда 1-й величины может быть по своим размерам весьма скромной, но находиться сравнительно близко от нас. Однако гиппарховы звездные

Старинное изображение системы мира по Птолемею. Земля — неподвижный центр Вселенной, а Солнце, Луна, планеты и звезды обращаются вокруг Земли.

Определение местоположения корабля по высоте Солнца.



«величины» как обозначение видимого блеска звезд сохранились до нашего времени.

Гиппарх правильно определил размеры Луны и ее расстояние от Земли. Сопоставляя результаты личных наблюдений и наблюдений своих предшественников, он вычислил продолжительность солнечного года с очень малой ошибкой, не превышающей шести минут.

Гиппарх и другие астрономы его времени уделяли много внимания наблюдениям за движениями планет. Эти движения представлялись им крайне запутанными. В самом деле, направление движения планет по небу как будто периодически меняется — планеты как бы описывают по небу петли. Эта кажущаяся сложность в движении планет вызывается движением Земли вокруг Солнца — ведь мы наблюдаем планеты с Земли, которая сама движется. И когда Земля «догоняет» другую планету, то кажется, что планета как бы останавливается, а потом начинает двигаться назад. Но древние астрономы, считавшие Землю неподвижной, думали, что планеты действительно совершают такие сложные движения вокруг Земли.

Во II в. н. э. александрийский астроном Птолемей выдвинул свою систему мира. Он пытался объяснить устройство Вселенной с учетом видимой сложности движения планет. Считая Землю шарообразной, а размеры ее ничтожными по сравнению с расстоянием до планет и тем более до звезд, Птолемей вслед за Аристотелем утверждал, что Земля — неподвижный центр Вселенной. Так как Птолемей считал Землю центром Вселенной, его система мира была названа *геоцентрической* (по-гречески «гео» — земля).

Вокруг Земли, по Птолемею, движутся (в порядке удаленности от Земли) Луна, Меркурий, Венера, Солнце, Марс, Юпитер, Сатурн, звезды. Но если движение Луны, Солнца, звезд правильное круговое, то

Кабинет средневекового ученого.

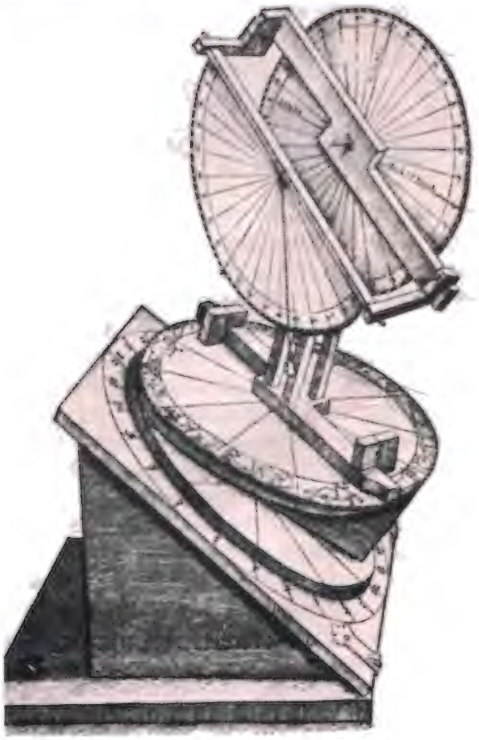
движение планет гораздо сложнее. Каждая из планет, по мнению Птолемея, движется не вокруг Земли, а вокруг некоторой точки. Точка эта в свою очередь движется по окружности, в центре которой находится Земля. Окружность, описываемую планетой вокруг движущейся точки, Птолемей назвал *эпициклом,* а окружность, по которой движется точка около Земли, — *деферентом.*

Такое искусственное построение потребовалось Птолемею для того, чтобы, основываясь на ложном представлении о неподвижности Земли, расположенной в центре Вселенной, объяснить видимую сложность движения планет. Однако анализ движений планет и построение таблиц позволили Птолемею впервые предвычислять положения планет.

Геоцентрическая система мира Птолемея появилась в то время, когда и Египет и Греция уже были завоеваны Римом. Потом и Римская империя пришла в упадок, к которому ее привели изживший себя рабовладельческий строй, войны и нашествия других народов.

На смену рабовладельческому строю пришел феодальный. Христианская религия, распространившаяся к этому времени в странах Европы, признала геоцентрическую систему мира согласной со своим учением. В основу миропонимания христианство положило библейскую легенду о сотворении мира богом за шесть дней. По этой легенде Земля является «средоточием» Вселенной, а небесные светила созданы для того, чтобы освещать Землю и украшать небесный свод. Всякое отступление от этих взглядов христианство беспощадно преследовало. То, что в системе мира Аристотеля — Птолемея Земля была в центре мироздания, как нельзя лучше отвечало христианскому вероучению, хотя многие «отцы церкви» отказывались признавать именно те положения этой системы мира, которые были верными, например положение о шарообразности Земли.

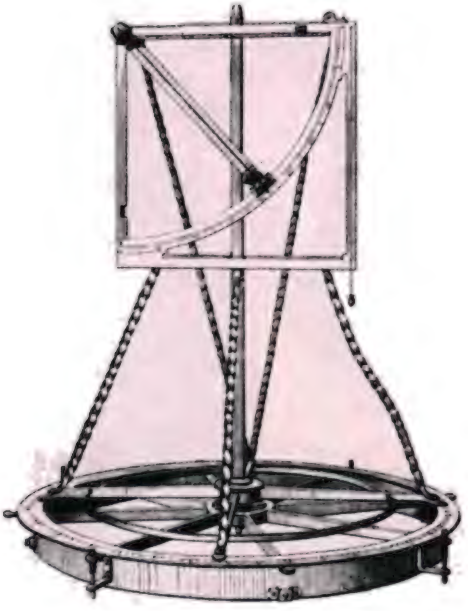
Средневековые астрономические приборы; некоторыми из них пользовались мореплаватели.

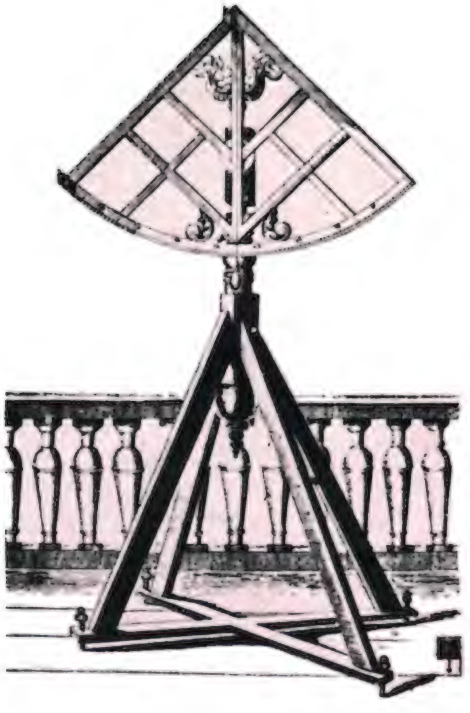


В христианских странах получило признание и широко распространилось «учение» монаха Козьмы Индикоплова, считавшего Землю плоской, а небо как бы крышкой над ней. Это учение было возвращением к самым примитивным представлениям древнейших народов об устройстве Вселенной.

Астрономия в средние века

В средние века восточные страны значительно обогнали Европу в развитии науки. Так, в Индии и в основанном в VII—VIII вв. Арабском халифате астрономия сделала большие успехи и превзошла по точности наблюдений уровень, достигнутый в свое время греческой астрономией. Арабские астрономы,





среди которых самыми выдающимися были Аль-Батани (858—929), Абу-ль-Вефа (940—998), Ибн-Юнус (950—1009) и другие, неустанно вели астрономические наблюдения. Они обнаруживали в движениях Солнца, Луны и планет такие особенности, которые не согласовывались с системой мира Птолемея. Однако арабские астрономы не могли преодолеть ложного мнения о центральном положении Земли во Вселенной. Они занимались также определением размеров земного шара теми же способами, что и Эратосфен, и тем самым оказали большую услугу географии.

Наибольшего развития в средние века астрономия достигла в странах Средней Азии и в Азербайджане. Среднеазиатские ученые Бируни, Омар Хайям, Насирэддин Туси были самыми крупными астрономами средневековья.

Народы Средней Азии еще в глубокой древности создали высокую культуру. Среднеазиатские ученые развивали и двигали науку вперед в то время, когда

Бируни — выдающийся хорезмский ученый — астроном, географ, историк (973—1048).

в Западной Европе она находилась в упадке. Николай Коперник и другие ученые Европы, создавшие в XVI—XVII вв. новое учение об устройстве Вселенной, имели достойных предшественников в лице среднеазиатских ученых IX—XV вв.

На протяжении многих веков в низовьях Амударьи процветала культура Хорезмского государства. Советским археологам удалось восстановить величественную культуру древнего Хорезма с ее замечательными памятниками архитектуры и искусства.

Крупными культурными центрами Средней Азии были Бухара, а также Мерв и Самарканд.

В первой половине IX в. в Хорезме жил и работал замечательный ученый Мухаммед, прозванный ал-Хорезми (ок. 780 — ок. 850). Крупнейший математик своей эпохи, один из создателей алгебры, ал-Хорезми был также крупным астрономом. Он значительно улучшил таблицы движений планет, составленные Птолемеем, и усовершенствовал астролябию — прибор, изобретенный Птолемеем и много веков применявшийся для определения широты и долготы мест на поверхности Земли.

В конце X — первой половине XI в. протекала деятельность самого выдающегося хорезмского ученого — Бируни (973—1048). Живя в условиях господства мусульманской религии (которая относилась к науке столь же враждебно, как и христианская), Бируни смело выступал против религиозного мировоззрения. Он считал, что в природе все существует и изменяется по законам самой природы, а не по божественному велению. По мнению Бируни, вера в таинственные силы, влияющие на судьбы людей, возникла из-за незнания законов природы. Постигнуть эти законы можно только с помощью науки.

Бируни работал в различных областях науки: он был выдающимся астрономом своего времени и внес много нового в историю, географию и минералогию. Бируни утверждал, что Земля имеет шарообразную форму. Он говорил, что если бы Земля не была шарообразным телом, то многие явления природы представлялись бы нам совсем иными, например продолжительность дней и ночей не менялась бы в различные времена года.

Исходя из правильного представления о форме Земли, Бируни определил размеры (длину окружности большого круга) Земли более точно, чем это сделали Эратосфен и арабские астрономы. Из наблюдений над понижением линии горизонта, рассматриваемой с возвышенного места, он высчитал, что длина окружности большого круга Земли составляет (в переводе на наши меры) 41 550 км. Действительная длина этой окружности, установленная современной наукой путем более точных измерений и расчетов (для экватора 40 076 км), очень мало отличается от вычислений Бируни.

Бируни считал, что в астрономии, как и во всякой науке, никакие соображения не заслуживают доверия, если они не подтверждены наблюдением и опытом.

Бируни критически относился к учению Птолемея и допускал возможность движения Земли вокруг Солнца. Таким образом, за 500 лет до Коперника Бируни правильно представлял себе устройство Солнечной системы. Как настоящий ученый, Бируни всегда боролся против вмешательства религии в дела науки. За свои передовые взгляды он постоянно подвергался преследованиям со стороны мусульманских фанатиков и три раза вынужден был покидать родину и жить в изгнании.

Подлинным революционером в науке был великий таджикский поэт, ученый и философ Омар Хайям (ок. 1040—1123). Он считал, что Земля, как и другие небесные тела, движется в бесконечном пространстве Вселенной, вращаясь вокруг своей оси. Омар Хайям утверждал, что Вселенная никогда не была создана — она существует вечно. Как и Бируни, Омар Хайям учил, что только наука может открывать законы природы и заставлять природу служить человеку.

Улугбек — правитель Самарканда, крупный ученый-астроном (1394—1449). Скульптурный портрет создан советским антропологом, археологом и скульптором М. М. Герасимовым.

В Азербайджане в XIII в. прославился своими трудами астроном Мухаммед Насирэддин Туси (1201—1274), построивший великолепную обсерваторию в Мараге. Вместе с другими астрономами он составил таблицы положения планет и звезд, более точные, чем таблицы Гиппарха и Птолемея. Он ознакомил восточных ученых со всеми достижениями древнегреческой астрономии.

Великие ученые Средней Азии были не только выдающимися мыслителями, высказывавшими правильные, позднее подтвержденные наукой взгляды на устройство мира, но и замечательными наблюдателями. Особенно прославились своими наблюдениями самаркандские астрономы XV в. — Джемшид ал-Каши (он был также и замечательным математиком), Казы-заде Ар-Руми, Али Кушчи.

Их трудам всячески содействовал и принимал в них личное участие правитель Самарканда Улугбек (1394—1449), который и сам был крупным ученым-астрономом, просвещенным государственным деятелем, неустанно заботившимся о развитии науки в своей стране. Привлекая в Самарканд ученых, Улугбек создавал наилучшие условия для их работы. Он выстроил для них в Самарканде грандиозную обсерваторию. Огромное здание этой обсерватории, воздвигнутой на одном из холмов в Самарканде, поражало современников своими размерами и великолепием. Но еще более замечательным было ее оборудование. Она была оснащена лучшими по тому времени инструментами. Телескопов тогда еще не существовало. Астрономы вели свои наблюдения при помощи угломерных инструментов, служивших для определения положения светил на небе и расстояний между ними, выраженных в градусах и минутах дуги. Инструменты обсерватории Улугбека были самыми совершенными, какие только можно было тогда изготовить. Пользуясь ими, Улугбек и другие самаркандские астрономы достигли такой точности в своих наблюдениях, которая полтора века оставалась непревзойденной.

Самым замечательным из трудов самаркандских астрономов были «Звездные таблицы» — каталог, содержавший точные положения на небе 1018 звезд. Он долго оставался самым полным и самым точным; европейские астрономы переиздавали его еще спустя два века. Не меньшей точностью отличались и самаркандские таблицы движений планет.

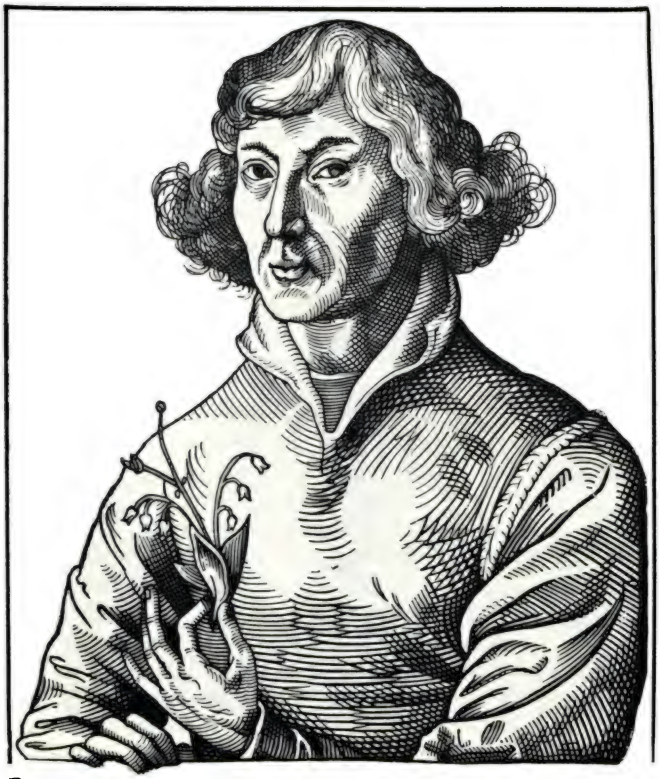
Улугбек заботился о распространении просвещения в народе. В Самарканде и других городах он открывал учебные заведения, в которых преподавались светские науки. Мусульманские фанатики ненавидели Улугбека — вольнодумца и вероотступника. В 1449 г. Улугбек был убит.

Труды самаркандских астрономов были широко известны во всем мире и оказали большое влияние на развитие астрономии.

В своих научных исканиях ученые Средней Азии использовали достижения науки Древней Греции и Индии. В I—XII вв. в Индии больших успехов достигла вычислительная астрономия, занимавшаяся вопросами счета времени, определением длины года, изучением движений Луны и планет.

Развитие астрономии в Индии связано с именами таких выдающихся астрономов, как Ариабхата (476 — г. смерти неизв.) — автор знаменитого астрономического труда «Ариабхатиам»; Варахамихира (505—587), изучавший положение планет; Брахмагупта (ок. 598—660) — знаменитый математик и основоположник индийской практической астрономии, который ввел в Индии понятие тропического года, и другие. Индийские астрономы высказали также более общие гипотезы — о шарообразности и осевом вращении Земли (Ариабхата и Варахамихира), о стремлении всех тел к Земле (Брахмагупта), о вечности времени, о множестве вселенных. Развитию астрономии в Индии способствовали успехи индийской математики (первое в мире применение таблиц синусов и косинусов, введение десятичной системы счисления).

От Коперника до Ньютона



Великий польский астроном Николай Коперник (1473—1543).

Система мира по Копернику.

Во всех странах почти полтора тысячелетия владело умами людей ложное учение Птолемея, который считал, что Земля неподвижно покоится в центре Вселенной. Последователи Птолемея придумывали все новые усложнения, чтобы согласовать его теорию движения планет вокруг Земли с наблюдаемым в действительности. Но от этого система Птолемея становилась все более надуманной и искусственной.

Задолго до Птолемея греческий ученый Аристарх Самосский утверждал, что Земля движется вокруг Солнца. Позже, в средние века, передовые ученые разделяли точку зрения Аристарха о строении мира и отвергали ложное учение Птолемея. Незадолго до Коперника итальянские ученые Николай Кузанский и Леонардо да Винчи допускали, что Земля движется, что она вовсе не находится в центре Вселенной и не занимает в ней исключительного положения.

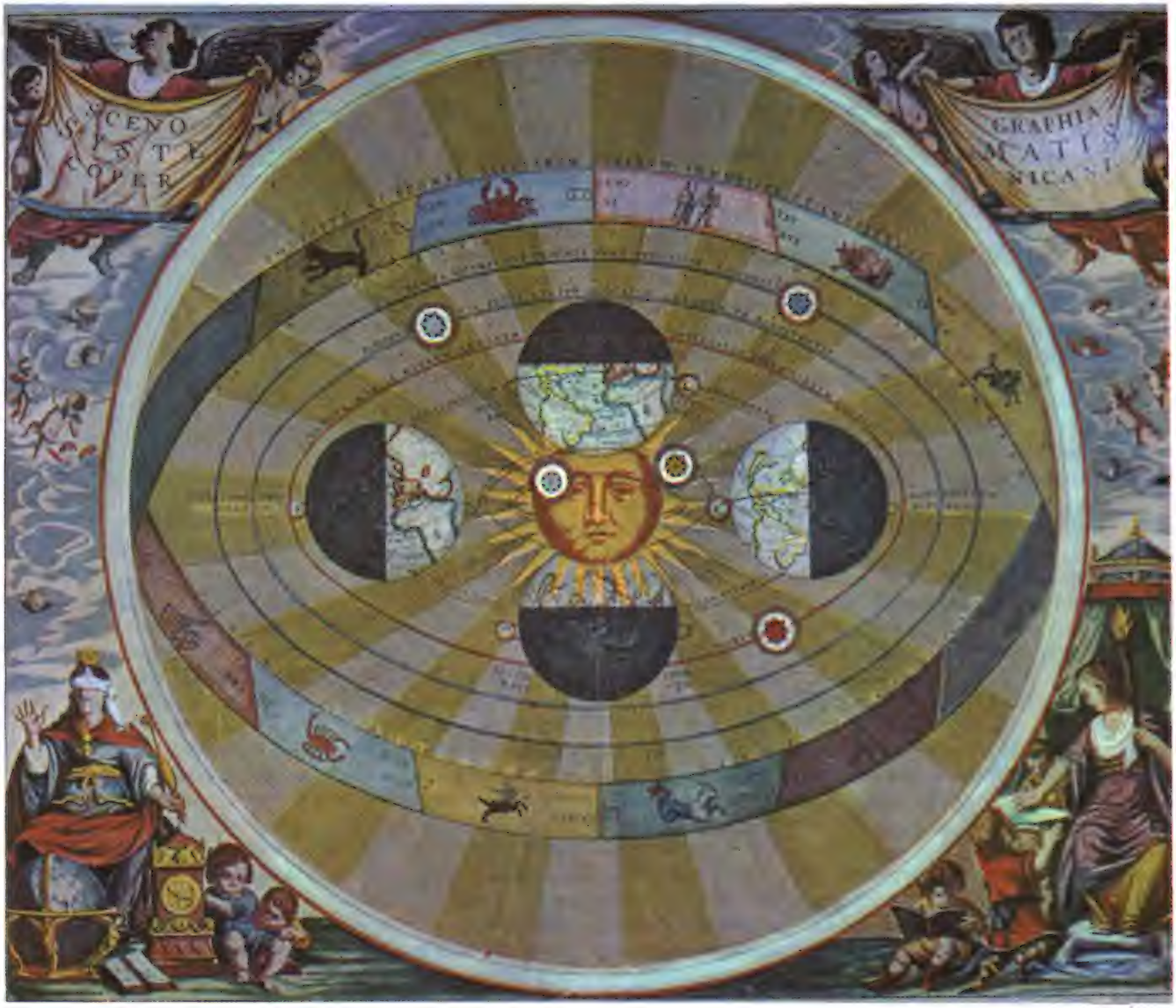
Почему же, несмотря на это, система Птолемея продолжала господствовать? Потому, что она поддерживалась церковной властью, которая подавляла свободную мысль, мешала развитию науки. Кроме того, ученые, отвергавшие учение Птолемея и высказывавшие правильные взгляды на устройство Вселенной, не могли еще их убедительно обосновать.

Это удалось сделать только Николаю Копернику. После 30 лет упорнейшего труда, долгих размышлений и сложных математических расчетов он доказал, что Земля — только одна из планет, а все планеты обращаются вокруг Солнца.

Коперник родился в 1473 г. в польском городе Торуни. Он рано лишился родителей. Его воспитал дядя Лукаш Ваченроде — выдающийся общественно-политический деятель того времени. Жажда знаний владела Коперником с детства. Сначала он учился у себя на родине. Потом продолжал образование в итальянских университетах. Конечно, астрономия там излагалась по Птолемею, но Коперник тщательно изучал и все сохранившиеся труды великих математиков и астрономов древности. У него уже тогда возникли мысли о правоте догадок Аристарха, о ложности системы Птолемея. Но не одной астрономией занимался Коперник. Он изучал философию, право, медицину и вернулся на родину всесторонне образованным для своего времени человеком.

По возвращении из Италии Коперник поселился в Вармии — сначала в г. Лидцбарке, потом в Фромборке. Деятельность его была разнообразна. Он принимал активное участие в управлении областью: ведал ее финансовыми, хозяйственными и другими делами. В то же время Коперник неустанно размышлял над устройством Солнечной системы и постепенно пришел к своему великому открытию.

Старинное изображение системы мира по Копернику.



Что же заключает в себе книга Коперника «О вращении небесных сфер» и почему она нанесла такой сокрушительный удар по системе Птолемея? В этой книге Коперник утверждал, что Земля и другие планеты — спутники Солнца. Он показал, что именно движением Земли вокруг Солнца и ее суточным вращением вокруг своей оси объясняется видимое перемещение Солнца среди звезд, странное, петлеобразное движение планет и видимое суточное вращение небесного свода.

Гениально просто Коперник объяснил, что мы воспринимаем движение далеких небесных тел так же, как и перемещение различных предметов на Земле, когда сами находимся в движении.

Мы скользим в лодке по спокойно текущей реке, и нам кажется, что лодка и мы в ней неподвижны, а берега «плывут» в обратном направлении. Точно так же нам только кажется, что Солнце движется вокруг Земли. А на самом деле Земля со всем, что на ней находится, движется вокруг Солнца и в течение года совершает полный оборот по своей орбите.

И точно так же, когда Земля в своем круговом движении вокруг Солнца обгоняет другую планету или отстает от нее, нам кажется, что планета дви-

жется то назад, то вперед, описывая петлю на небе, хотя в действительности планеты движутся вокруг Солнца, не делая никаких петель. Коперник, как и древнегреческие ученые, ошибочно полагал, что орбиты, по которым движутся планеты, могут быть только круговыми.

Спустя три четверти века немецкий астроном Иоганн Кеплер доказал, что орбиты всех планет представляют собой продолговатые кривые — эллипсы.

Звезды Коперник считал неподвижными. Сторонники Птолемея, настаивая на неподвижности Земли, утверждали, что если бы Земля двигалась в пространстве, то при наблюдении неба в течение года наблюдались бы небольшие периодические смещения звезд. Но таких смещений звезд не замечал тогда ни один астроном. Именно в этом сторонники учения Птолемея хотели видеть доказательство неподвижности Земли. Однако Коперник утверждал, что звезды находятся от нас на невообразимо огромных расстояниях. Поэтому ничтожные смещения их не могли быть замечены. Действительно, расстояния от нас до ближайших звезд оказались настолько большими, что еще спустя три века после Коперника они не поддавались точному определению. Только в 1837 г. русский астроном Василий Яковлевич Струве положил начало точному определению расстояний до звезд.

Понятно, какое потрясающее впечатление должна была произвести книга, в которой Коперник объяснял мир, не считаясь с религией и даже отвергая всякий авторитет церкви в делах науки. Деятели церкви не сразу поняли, какой удар по религии наносит научный труд Коперника, в котором он низвел Землю до положения одной из планет. Некоторое время книга свободно распространялась среди ученых. Прошло немного лет, и революционное значение великой книги проявилось в полной мере. Выдвинулись другие крупные ученые — продолжатели дела Коперника. Они развили и распространили идею бесконечности Вселенной, в которой Земля как бы песчинка, а миров — бесчисленное множество. С этого времени церковь начала ожесточенное преследование сторонников учения Коперника.

Новое учение о Солнечной системе — *гелиоцентрическое* (по-гречески «гелиос» — солнце) — утверждалось в жесточайшей борьбе со злейшим врагом науки — религией. Учение Коперника подрывало самые основы религиозного мировоззрения и открывало широкий путь к материалистическому, подлинно научному познанию явлений природы.

Во второй половине XVI в. учение Коперника нашло своих сторонников среди передовых ученых разных стран. Выдвинулись и такие ученые, которые не только пропагандировали учение Коперника, но углубляли и расширяли его.

Коперник полагал, что Вселенная ограничена сферой неподвижных звезд, которые расположены на невообразимо огромных, но все-таки конечных расстояниях от нас и от Солнца. В учении Коперника утверждалась огромность Вселенной, но не бесконечность ее.

Особенно смело развил и углубил идею бесконечности Вселенной великий итальянский мыслитель Джордано Бруно (1548—1600).

Бруно родился на юге Италии. В юности его отдали в монастырь, где ему предстояло стать верным слугой церкви. Но свободолюбивый юноша не мог мириться с монастырскими порядками. Им владели жажда знаний и желание передавать их людям. Бруно познакомился с учением Коперника и стал ревностным сторонником этого учения, чем вызвал к себе ненависть монастырского начальства. Оставив монастырь, Бруно уехал из Италии. К этому времени он был уже сложившимся мыслителем и в своих взглядах на строение Вселенной шел дальше Коперника.

Долгие годы Бруно провел в разных странах Западной Европы. Преследования церкви заставляли его переезжать из Швейцарии во Францию, потом в Англию и Германию. Везде он развивал кипучую деятельность: читал лекции, издавал свои книги, выступал на публичных диспутах против сторонников системы мира Птолемея. Бруно учил, что Вселенная бесконечна, что у нее не может быть никакого «центра». Огромное Солнце — всего только одна из звезд. Каждая звезда — такое же Солнце. Этих солнц бесчисленное множество, они окружены планетами, на которых может быть жизнь. Бруно высказал догадки, что и Солнце и звезды вращаются вокруг своих осей, а в Солнечной системе кроме известных уже планет существуют и другие, пока еще не открытые.

Свои гениальные догадки Бруно не мог подтвердить результатами наблюдений. В его время не было телескопов. Однако многие предвидения Бруно потом подтвердились наукой. Были открыты Уран, Нептун, Плутон — дальние планеты Солнечной системы. Было доказано, что Солнце — рядовая звезда в гигантской звездной системе Млечного Пути, а эта система — одна из бесчисленных во Вселенной. Что Солнце вращается вокруг своей оси, было установлено вскоре после смерти Бруно, а доказательство вращения звезд — одно из завоеваний науки XX в.

В 1592 г. служителям римской церкви удалось при помощи обмана и предательства схватить Бруно.

Джордано Бруно — итальянский мыслитель, атеист (1548—1600).

Более семи лет они продержали его в тюремных застенках. Слишком велика была его слава, и церкви хотелось во что бы то ни стало заставить его отречься от своих взглядов. Бруно не сдался. Когда его приговорили к сожжению на костре, он произнес слова, оставшиеся в веках: «Сжечь не значит опровергнуть».

17 февраля (ст. ст.) 1600 г. Джордано Бруно был сожжен на одной из площадей Рима. Ученый трагически погиб, но остались его бессмертные идеи. Высказывая их, Бруно опережал свою эпоху на целые столетия, хотя наблюдения без телескопов и не могли подтвердить его правоту. Спустя десятилетие после гибели Бруно человечество получило в свое распоряжение телескопы, при помощи которых были сделаны открытия, подтвердившие и учение Коперника и некоторые предположения Бруно. Первые телескопы появились в самом начале XVII в. Трудно точно сказать, кто был их изобретателем и кто первый начал наблюдения неба в телескоп. Но первые, притом выдающиеся, астрономические открытия при помощи телескопа сделал соотечественник Бруно — итальянский ученый Галилео Галилей (1564—1642).

Имя Галилея было хорошо известно ученым еще при жизни Бруно: Галилей сделал важнейшие открытия в области физики и механики и нашел новые пути для развития этих наук. В отличие от ученых — последователей Аристотеля, Галилей считал, что основой изучения природы являются наблюдения и опыт. Астрономия также должна развиваться на основе наблюдений, только необходимо совершенствовать их. Галилей сам строил зрительные трубы и использовал их для наблюдений неба. Какими крохотными были эти трубы по сравнению с мощными современными телескопами, которые могут увеличивать изображения в тысячи раз! Первая труба, с которой Галилей начал свои наблюдения, увеличивала в 3 раза. Позднейшая, самая совершенная труба Галилея увеличивала только в 30 раз. И тем не менее при помощи этих самодельных инструментов Галилей сделал открытия, которые буквально потрясли его современников. Наблюдая Луну, Галилей обнаружил, что на ней есть горы, долины и глубокие впадины, т. е. поверхность Луны по своему рельефу похожа на поверхность Земли. Галилей открыл четыре спутника Юпитера, обращающиеся вокруг планеты, а это означало, что не только Земля и Солнце могут быть центрами обращения небесных тел. Вместе с тем оказывалось, что в Солнечной системе кроме уже известных небесных тел существуют и многие другие, видные только в телескоп. Наблюдая солнечные пятна, Галилей установил, что они перемещаются по поверхности Солнца всегда в одном направлении, и сделал правильный вывод: Солнце вращается вокруг своей оси. Так было доказано, что вращение присуще не только Земле, но и другим небесным телам. При наблюдениях в телескоп обнаружилось огромное количество звезд, не видимых невооруженным глазом. Сплошное сияние Млечного Пути оказалось гигантским скоплением звезд.

Все эти открытия Галилея, опубликованные им в книге «Звездный вестник», получившей широкое распространение, подтверждали учение Коперника и догадки Бруно. Поэтому они вызвали особенно бешеную злобу со стороны церкви: теперь уже не умозрения, а прямое наблюдение неба опровергало учение церкви о Земле как о центре Вселенной.

В 1616 г. римская церковь официально объявила учение Коперника безбожным, не совместимым с «истинной верой», и запретила всякую его пропаганду. Однако Галилей не прекратил борьбу за распространение учения Коперника и за популяризацию своих открытий. Много лет он работал над большой книгой «Диалог о двух главнейших системах мира, птолемеевой и коперниковой», где убедительно доказывал правильность учения Коперника и полную несостоятельность учения Птолемея. Эту книгу Галилей с большим трудом издал в 1632 г.

Галилео Галилей — великий итальянский физик, механик и астроном (1564—1642).

Римская церковь привлекла Галилея за книгу к суду инквизиции. Суд над Галилеем — одна из позорнейших страниц в многовековой борьбе религии против науки. Галилея силой заставили отречься от учения о движении и вращении Земли. Вплоть до самой смерти он жил под надзором инквизиции, но открытия его были уже известны всему миру. По мере своих сил Галилей продолжал заниматься наукой, главным образом механикой. В Италии его книги даже не могли печататься, но их издавали в других странах, куда не простиралась власть католической церкви.

Одновременно с Галилеем выдающиеся открытия в области строения Солнечной системы и движения тел в ней сделал немецкий ученый Иоганн Кеплер (1571—1630). Учение Коперника требовало математического уточнения. Вскоре после смерти Коперника астрономы составили на основе его системы мира новые таблицы движения планет. И хотя эти таблицы лучше согласовывались с наблюдениями, чем прежние таблицы, составлявшиеся еще по Птолемею, в них потом обнаружились расхождения с данными наблюдений. Необходимо было глубже исследовать и уточнить законы движения планет. Именно эту задачу и решил Кеплер.

Кеплер жил в неспокойное время, когда значительная часть Центральной Европы была раздроблена на множество мелких государств, а религиозные войны между католиками и протестантами препятствовали развитию науки и просвещения. Поступив в Тюбингенский университет, Кеплер с увлечением занимался математикой и астрономией. Преподававший эти науки профессор Местлин (1550—1631), вынужденный в аудитории излагать астрономию по Птолемею, был последователем учения Коперника и дома знакомил с этим учением своих слушателей. Кеплер вскоре стал последователем Коперника, но, в отличие от Местлина, он не скрывал своих взглядов, а открыто пропагандировал их.

Судьба Кеплера сложилась трагически. Преследуемый за свои взгляды богословами, как католическими, так и протестантскими, он вынужден был после окончания университета скитаться по разным городам и заниматься случайными работами. Но и тогда ученый неустанно размышлял над увлекшим его вопросом: какая геометрическая форма планетных орбит лучше объясняет особенности движения планет? Философы Древней Греции были убеждены, что окружность — это идеальная геометрическая форма и только по окружностям могут двигаться небесные тела. Даже в системе мира Коперника еще сохранилось это представление. Кеплер пришел к выводу, что оно ошибочно. Планетные орбиты имеют не круговую, а иную геометрическую форму. Но какую? В первые годы своей деятельности Кеплер еще не смог решить эту задачу. Но уже тогда он приобрел известность как замечательный математик-вычислитель. Это обстоятельство сыграло большую роль в дальнейшей судьбе ученого.

В 1600 г. в Прагу переехал датский астроном Тихо Браге (1546—1601). Тихо Браге был выдающимся наблюдателем неба, но в вопросе о строении Вселенной придерживался отсталых взглядов и учения Коперника не признавал. В Праге он решил продолжить свои наблюдения, а в качестве помощника для вычислений пригласил Кеплера. Совместная работа двух ученых продолжалась недолго. Вскоре Тихо Браге умер, и богатейшие материалы его наблюдений перешли к Кеплеру. Среди них особенное значение имели материалы долголетних наблюдений Марса. Изучая их, Кеплер сделал замечательное открытие: он установил, что Марс движется вокруг Солнца не по окружности, а по вытянутой кривой — эллипсу. Потом оказалось, что так движется вокруг Солнца не только Марс, но и все планеты Солнечной системы; по эллипсу движет-

Телескоп Галилея.

Часы, построенные в 1877 г. по идее, высказанной еще Галилеем.

Астролябия, которой пользовался Галилей.

Иоганн Кеплер — великий немецкий астроном (1571—1630).

Справа — на старинной гравюре изображен датский астроном Тихо Браге (1546—1601) в своей обсерватории. Внизу его помощники: один записывает наблюдения, другой отсчитывает время. Главный наблюдатель визирует звезду через отверстие в стене.

ся и Луна вокруг Земли. Продолжая свои исследования, Кеплер установил три закона движения тел в Солнечной системе.

Первый закон Кеплера: планеты движутся по эллипсам. Солнце расположено не в центре эллипса, а в точке, находящейся на некотором расстоянии от центра и называемой *фокусом* эллипса. Но из этого следует, что расстояние планеты от Солнца не всегда одинаково, а поэтому и скорость движения планеты вокруг Солнца также не всегда одинакова: чем ближе к Солнцу находится планета, тем быстрее она движется, и, наоборот, чем дальше она от Солнца, тем ее движение медленнее. Эта особенность в движении планет составляет *второй закон Кеплера.* В *третьем законе Кеплера* устанавливается уже точная связь между расстояниями планет от Солнца и временами их обращения: оказывается, что квадраты времен обращений планет относятся между собой как кубы их средних расстояний от Солнца.

Книги Кеплера неоднократно запрещались и сжигались на кострах, а жизни его не раз угрожала опасность со стороны церкви и ее приспешников.

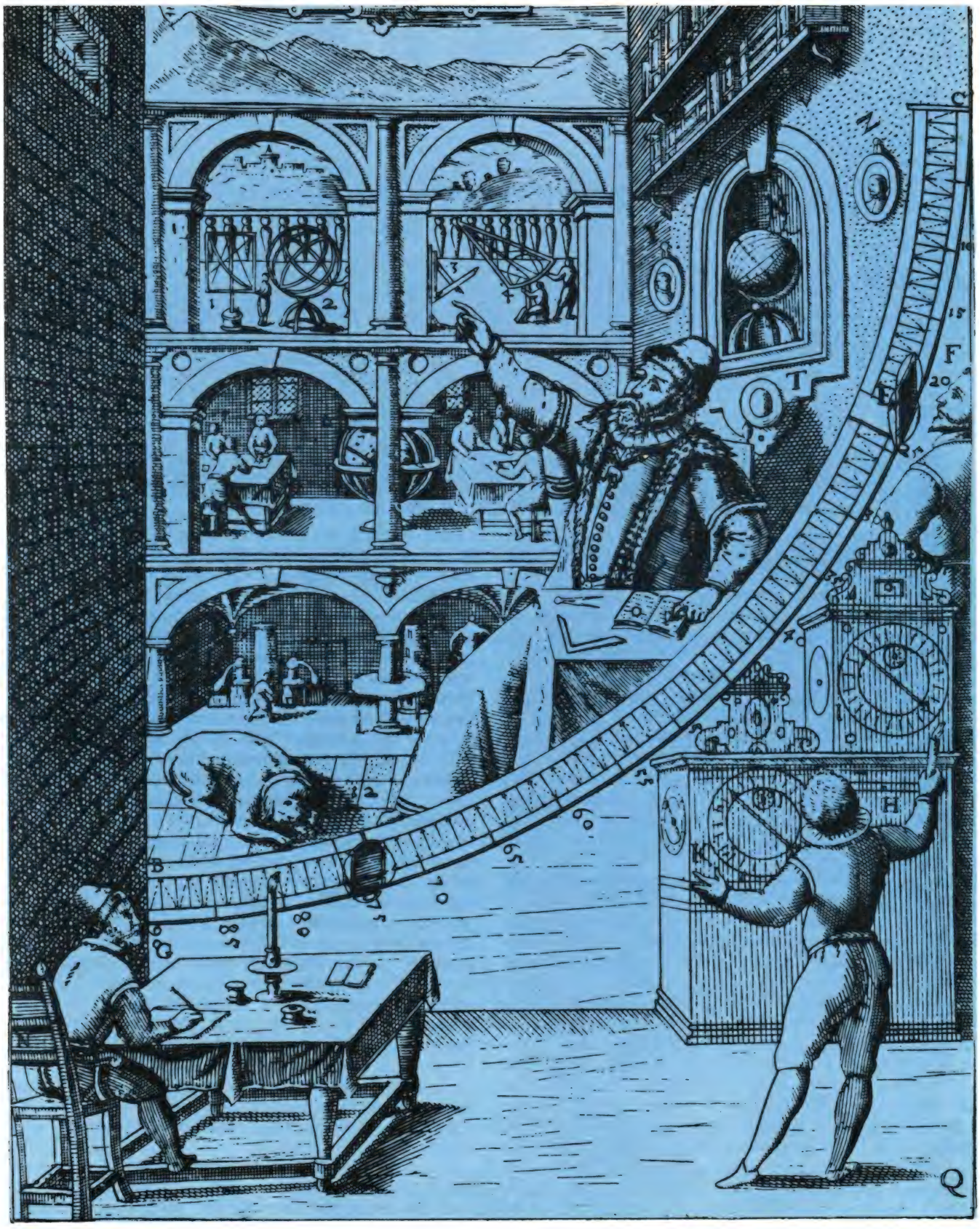
Итак, в начале XVII в. развитию астрономии на основе учения Коперника мешало упорное сопротивление церкви. Однако условия для развития астрономии, как и для развития науки вообще, во многих странах резко изменились. Астрономия становилась наукой, все более необходимой для географии и мореплавания, для определения точного времени и других нужд. В ряде государств Европы влияние церкви ослабло и учение Коперника получило всеобщее признание. Появились выдающиеся астрономы Успехи оптики давали возможность изготовлять телескопы гораздо более крупные и совершенные, чем те, которые были в распоряжении Галилея.

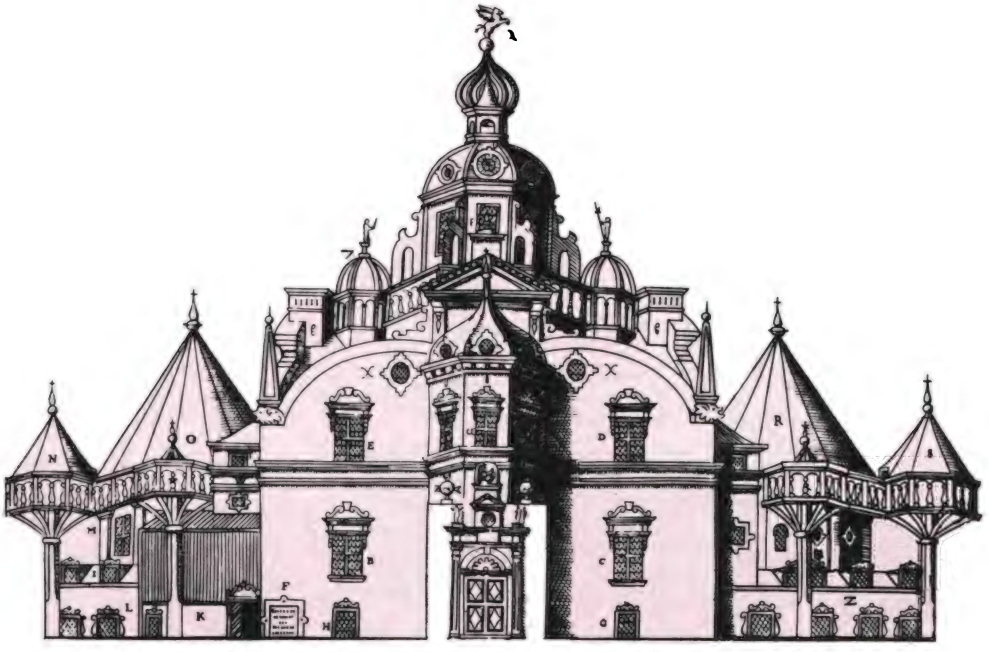
Важные открытия сделал польский астроном Ян Гевелий (1611—1687). Свой талант ученого Гевелий совмещал с необычайными способностями в области практической оптики, механики, рисования. Он сам изготовлял себе телескопы и угломерные инструменты. В 1641 г. Гевелий построил в своем родном городе Гданьске великолепную обсерваторию. Особенное внимание Гевелий уделял изучению Луны. Он тщательно наблюдал и зарисовывал все детали обращенной к Земле стороны Луны и на основе этих наблюдений создал первый атлас Луны. Гевелий дал название горам, кратерам и долинам на Луне, многие из этих названий сохраняются и теперь. Этот лунный атлас он опубликовал в книге «Селенография» (1647). Гевелий составил обзор всех комет, появлявшихся на исторической памяти человечества, ему же принадлежит и обширный звездный каталог, более точный, чем все предшествующие.

Выдающимся наблюдателем неба был Джованни Доменико Кассини (1625—1712) — итальянский астроном, переехавший во Францию. Здесь он стал первым директором Парижской обсерватории. Кассини выяснил, что Марс и Юпитер вращаются вокруг своих осей подобно Земле и Солнцу, и открыл четыре спутника Сатурна.

В свое время Коперник довольно точно определил расстояние от Солнца до планет, приняв за единицу измерения расстояние Земли от Солнца. Но это расстояние в абсолютных числовых величинах оставалось неизвестным, хотя попытки вычислить его делались неоднократно. Только в 1672 г. Кассини и другой французский астроном — Ш. Рише провели наблюдения одновременно в Париже и Южной Америке и определили, что Земля отстоит от Солнца на 140 млн. км (на самом деле от Земли до Солнца 149,6 млн. км). Таким образом, стали известны, хотя и не совсем точно, размеры Солнечной системы, в которой самой далекой планетой оставался Сатурн.

Наблюдения привели многих астрономов уже во второй половине XVII в. к выводу, что не существует никакой сферы звезд, что звезды находятся на самых различных расстояниях от Земли, а пространство, заполненное звездами, безмерно огромно


C
N
F
T
E
H
Q



Слева — обсерватория Тихо Браге Ураниборг.

Справа — польский астроном Ян Гевелий (1611—1687).

Рядом — телескоп Гевелия.

Справа внизу — Ян Гевелий с супругой наблюдают светила.

и скорее всего бесконечно. При этом предполагалось, что самые яркие звезды являются и самыми близкими. Однако попытки определить хотя бы приближенно расстояния даже до самых ярких звезд оставались безуспешными. Ясно было только, что даже ближайшие звезды находятся от Земли во много тысяч раз дальше, чем Солнце.

Много сделал для астрономии выдающийся голландский физик Христиан Гюйгенс (1629—1695). Еще Галилей, наблюдая планеты, обнаружил какие-то странные «придатки» у диска Сатурна, но подробнее рассмотреть их в свой телескоп он не смог. Гюйгенс установил, что Сатурн окружен необычным образованием в виде кольца, которого нет у других планет. Гюйгенс открыл также Титан — самый крупный из спутников Сатурна.

В конце своей жизни Гюйгенс написал книгу «Космотеорос» («Обозрение Вселенной»). В этом сочинении, изданном вскоре после его смерти, Гюйгенс изложил для широкого круга читателей достижения астрономии того времени. Он высказал убеждение, что Вселенная бесконечна, а планеты, обращающиеся вокруг бесчисленных звезд, обитаемы. Книга Гюйгенса вскоре была переведена на русский язык и в эпоху Петра I сыграла выдающуюся роль в распространении астрономических знаний в России.

В своем великом труде Коперник объяснил, что Земля — одна из планет, обращающихся вокруг Солнца. Кеплер установил законы, по которым планеты совершают движение вокруг Солнца. Оставалось, однако, неизвестным, какая сила заставляет планеты совершать такие обращения, не падая на Солнце и не улетая от него. Понятно, что это относилось и к движению Луны: почему Луна обращается вокруг Земли, не улетая от нее и не падая на нее?

Ответить на этот вопрос пытались некоторые ученые второй половины XVII в. Но их попытки обнаружить силу, управляющую движением небесных тел, не увенчались успехом. Сделал это великий английский ученый Исаак Ньютон спустя почти полтора столетия после выхода в свет труда Коперника и через три четверти века после открытий Кеплера и Галилея. Многое изменилось за это время. Развивавшийся уже в ряде стран, в особенности в Голландии и Англии, капитализм предъявлял все большие требования к точным наукам и к технике. И церковь в этих странах, при всей своей враждебности к передовой науке, уже не могла препятствовать ее развитию. Ньютону и ученым его поколения не угрожала судьба Бруно, Галилея и Кеплера.

Ньютон родился в 1643 г. В детстве он не проявлял склонности к науке и даже не имел особых успехов в учении. Но в юности у него обнаружились необычайные математические способности. В 1661—1665 гг. Ньютон учился в Кембриджском университете — одном из старейших и лучших университетов Англии. С 1669 по 1696 г. он был профессором математики в этом университете. В 1696 г. он переехал в Лондон и здесь занимал крупные общественные и государственные должности. Скончался Ньютон в 1727 г., на 85-м году жизни, всемирно известным ученым.

Ньютон обогатил своими открытиями и математику, и физику, и астрономию. И прежде астрономия не могла развиваться без математики. Теперь

же развитие астрономии, наряду с развитием физики и техники, предъявляло особые требования к математике.

Почти одновременно с немецким ученым Лейбницем и независимо от него Ньютон создал важнейшие разделы математики — дифференциальное и интегральное исчисления. Во времена Коперника и Кеплера вершиной математических знаний являлась тригонометрия. Теперь была заложена математическая основа для изучения таких сложных особенностей движений небесных тел, которые были недоступны для элементарной математики.

Ученый внес важнейший вклад и в физику. Он открыл сложный состав белого света. Путем наблюдения и опыта Ньютон выяснил, что белый солнечный луч — это как бы «смесь» лучей многих цветов. Оказалось, что белый свет можно разложить на составляющие его цветные лучи, а потом вновь собрать их в единый луч белого света. Это открытие легло впоследствии в основу спектрального анализа, который оказал и продолжает оказывать неоценимые услуги астрономии. Изучая спектры далеких небесных тел, т. е. цветовой состав их лучей, можно узнать химический состав и физическую природу этих тел.

Ньютон построил отражательный телескоп, или рефлектор. В нем, в отличие от трубы Галилея, лучи света от наблюдаемого небесного тела собираются при помощи зеркала, а не линзы. И в нашу эпоху телескопы-рефлекторы (теперь они имеют гигантские размеры) являются лучшими инструментами для наблюдения глубин Вселенной. Вообще Ньютон очень много сделал для развития оптики — важней-

Исаак Ньютон — гениальный английский ученый — математик, физик, астроном (1643—1727).

шего отдела физики, занимающегося изучением световых явлений.

Однако самым замечательным из всех открытий Ньютона было открытие *закона всемирного тяготения,* управляющего движением небесных тел.

Он много лет размышлял над вопросом: почему Луна все время обращается по своей орбите вокруг Земли, не падая на нее и не улетая от нее? Почему планеты, в том числе Земля, обращаются вокруг Солнца и также никуда не улетают? И пришел к выводу, что и в том и в другом случае действует одна и та же сила — *взаимное притяжение тел,* или *тяготение.* Древние и средневековые ученые ошибочно полагали, что все тела стремятся к Земле как к самому тяжелому телу во Вселенной. Они не понимали, что сама Земля также притягивается другими телами; они не знали, что Земля не самое тяжелое тело, а только одна из планет, что масса ее ничтожна по сравнению не только с массой Солнца, но и с массой Юпитера или Сатурна. Теперь, в свете выводов Ньютона, оказывалось, что все тела притягивают друг друга, при этом сила притяжения тел подчиняется определенным количественным закономерностям, а именно: сила притяжения (тяготения) прямо пропорциональна массам притягивающих тел и обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними.

Ньютону не сразу удалось вывести количественные закономерности силы тяготения. Это потребовало от него многих лет упорных размышлений и вычислений. Но когда все эти вычисления были произведены, стало понятно, что Луна удерживается на своей орбите силой земного притяжения, а планеты,

Люди без звезд

Наблюдения звездного неба сыграли огромную роль в развитии человечества, в прогрессе науки и техники.

Представим себе на минуту, что небо сплошь затянуто непрозрачной пеленой облачности, исключающей всякую возможность наблюдения звезд с Земли.

Земля без звезд... Нет голубого неба. Нет ярких солнечных бликов. Нет ни звезд, ни Луны. Неизменно пасмурное небо. Вечный сумрак тусклых, унылых дней.

Без звезд были бы весьма затруднены морские путешествия. Как пускаться в океан или в открытое море, не имея возможности определить свое местоположение, уточнить правильность взятого курса? Ведь мореплаватели с давних пор прибегали для этой цели к помощи звезд.

На облачной планете людям пришлось бы решать и довольно сложные задачи, связанные со счетом времени. На заре человечества, когда еще не были изобретены часы, люди определяли время по положению Солнца, а ночью — по звездам. Астрономические наблюдения лежали в основе составления календарей. На облачной Земле подобные наблюдения были бы невозможны.

Трудно было бы составить и сколько-нибудь реальное представление о картине

Эдмунд Галлей — английский ученый (1656—1742).

Старинное изображение кометы Галлея.

в том числе и Землю, держит на их орбите могучая сила солнечного притяжения. И всегда тяготение действует так, как показал Ньютон, — в зависимости от массы тел и от расстояния между ними. Во всяком случае Ньютон установил закон тяготения для Солнечной системы. Тогда еще не было возможности выяснить, действует ли этот закон в глубинах мирового пространства, далеко за пределами Солнечной системы. Это стало возможно позднее, когда были открыты двойные звезды — системы из двух (а иногда из трех, четырех и более) звезд, обращающихся вокруг общего центра масс. Изучение движе-

мира. Мысль человека, даже при создании самых отвлеченных гипотез, всегда отталкивается от наблюдаемого, от реальности. Между тем облачная Земля представляла бы гораздо меньше пищи для размышлений, чем картина ночного неба.

Коперник пришел к выводу о движении Земли вокруг Солнца, анализируя петлеобразные перемещения планет на фоне звезд. Д. Бруно и М. В. Ломоносов развивали идею множественности обитаемых миров, проводя параллель между далекими светилами — звездами и Солнцем. Ничего подобного ученые облачной планеты сделать бы не могли. Вероятно, они все же пытались бы строить всевозможные гипотезы относительно картины мира, но их предположения скорее всего были бы гораздо дальше от истины, чем смутные догадки наших далеких предков.

Невозможность наблюдения Вселенной, несомненно, оказала бы отрицательное влияние на развитие наук вообще, на познание основных законов природы.

Так, например, Галилей открыл свой знаменитый «принцип инерции» в значительной степени благодаря астрономическим наблюдениям. Из астрономических наблюдений родился и такой фундаментальный закон природы, как закон всемирного тяготения. Не следует забывать,

ния звезд в таких системах позволило установить, что и в звездном мире действует закон тяготения. Поэтому закону дали наименование закона всемирного тяготения.

Младшим современником Ньютона был его соотечественник Эдмунд Галлей (1656—1742). Он обогатил астрономию рядом выдающихся открытий. Еще совсем молодым ученым Галлей отправился на остров Св. Елены для наблюдения звезд. Это были первые систематические наблюдения звездного неба в Южном полушарии Земли.

Позднее, изучая по летописям и другим историческим документам появления комет в прошлые века, Галлей обнаружил, что кометы, появлявшиеся в 1531, 1607 и 1682 гг., приближались к Солнцу и потом удалялись от него по одним и тем же путям. Галлей сделал вывод, что во всех этих случаях появлялась одна и та же комета и что она обращается вокруг Солнца, совершая полный оборот за 75—76 лет.

До этого считалось, что кометы приходят из далеких глубин мирового пространства и потом исчезают в нем. В свете открытия Галлея стало ясно, что кометы — такие же члены Солнечной системы, спутники Солнца, как и планеты. В отношении *кометы Галлея* (так стала называться комета, движение которой он изучал) открытие было подтверждено очередным появлением ее в 1759 г., согласно предсказанию Галлея. Для многих других комет открытие Галлея подтвердилось позднее.

В 1718 г. Галлей сделал важнейшее из своих открытий. Изучая звездные каталоги Гиппарха и Тихо Браге и сравнивая указанные в них положения на небе отдельных звезд с данными современных ему наблюдений, Галлей обнаружил, что положения этих звезд изменились, причем эти изменения нельзя было объяснить ошибками прежних наблюдений. Галлей пришел к единственно правильному выводу, что звезды не покоятся неподвижно в пространстве, а движутся в нем. Правда, Галлею удалось установить это движение только для трех звезд — Сириуса, Арктура и Проциона. Но потом оно было установлено и для других звезд, в том числе и для Солнца.

Таким образом, в XVII — начале XVIII в. уже были достигнуты выдающиеся успехи в астрономии. Было раскрыто строение Солнечной системы и открыты законы движения входящих в нее небесных тел. Стало несомненным, что Солнце — только одна из звезд в бесконечной звездной Вселенной. Но изучение звездного мира еще только начиналось.

что гениальной догадке Ньютона предшествовал тщательный анализ движения Луны вокруг Земли. Во всяком случае обнаружить всеобщность тяготения при затянутом облачной пеленой небе было бы чрезвычайно затруднительно. В самом деле, сила взаимного притяжения между различными земными предметами настолько невелика, что ее можно измерить лишь в специальных экспериментах.

Данные астрономии легли и в основу такой революционной физической теории, как теория относительности.

Изучение космоса принесло нам и множество других замечательных открытий. Были обнаружены многие неизвестные ранее на Земле физические условия и состояния вещества, новые источники энергии (в частности, атомная энергия).

Если внимательно проследить за развитием не только физики, но и химии, математики и даже биологии, мы обнаружим, что во многих случаях достижения этих наук если не прямо, то косвенно были связаны с изучением звездной Вселенной.

Недаром А. Эйнштейн говорил, что «интеллектуальные орудия, без которых было бы невозможно развитие современной техники, пришли в основном от наблюдения звезд».

В этом смысле ученые облачной планеты находились бы в гораздо худшем положении. В своих попытках понять то, что происходит за облачной завесой, им пришлось бы ежедневно и ежечасно вести гораздо более острую борьбу со «здравым смыслом», чем нашим предкам.

В фактической истории изучения Вселенной долгое время главную роль играло исследование светового излучения небесных тел. Недаром свет называют вестником дальних миров. Но для людей облачного мира такого вестника практически не существовало бы...

Закон всемирного тяготения

Закон всемирного тяготения отражает свойство всех материальных тел притягивать друг друга. Он был сформулирован в конце XVII в. великим английским ученым Ньютоном при изучении движения планет и их спутников в Солнечной системе.

Мысль о том, что небесные тела и вообще все материальные тела взаимно притягиваются, возникла еще до Ньютона. На Земле это притяжение проявляется прежде всего в существовании силы тяжести. Под действием этой силы все тела, если их ничем не поддерживать, падают вниз, точнее к центру Земли.

Работы Коперника, Кеплера, Галилея показали, что Земля — обычное небесное тело, рядовая планета, движущаяся вместе с другими планетами вокруг Солнца. Значит, другие небесные тела могут обладать теми же свойствами, что и Земля, т. е. и на них может существовать сила тяжести. Если материальные тела вблизи Земли стремятся к ее центру, то вблизи планет или Солнца они также будут стремиться к центрам этих тел. Так считали Коперник, Кеплер и другие ученые того времени. В одной из своих работ Кеплер писал:

«Тяжесть есть взаимная склонность между родственными телами... соединиться воедино... В каком месте мы ни поместили бы Землю, тяжелые тела... будут двигаться к ней... Если бы в каком-нибудь месте мира находились два камня на близком расстоянии друг от друга... то эти камни стремились бы соединиться друг с другом подобно двум магнитам...»

Заслуга Ньютона состояла прежде всего в том, что он установил точную математическую зависимость сил притяжения от массы тел и от расстояния между ними и доказал, что именно эти силы управляют движением планет и спутников в нашей Солнечной системе.

В начале XVII в. Кеплер установил основные закономерности движения планет (см. ст. «От Коперника до Ньютона»). По первому и второму законам Кеплера каждая планета движется вокруг Солнца по эллипсу, а Солнце находится в одном из фокусов этого эллипса, причем скорость движения планеты изменяется вдоль ее пути определенным образом (приближенно скорость движения планеты обратно пропорциональна ее расстоянию до Солнца). Ньютон доказал, что такая картина движения планет должна наблюдаться в том случае, если Солнце притягивает планеты с силой, обратно пропорциональной квадрату расстояния до планеты.

Во времена Ньютона были известны четыре спутника Юпитера. Наблюдения показали, что их движение подчиняется третьему закону Кеплера, т. е. квадраты их периодов обращения относятся друг к другу как кубы их расстояний от центра Юпитера. Ньютон установил, что так должно быть именно в том случае, если спутники притягиваются к Юпитеру с силой, обратно пропорциональной квадрату расстояния до центра планеты.

Вокруг Земли движется ее спутник — Луна. Ньютон доказал, что движением Луны управляет та же земная сила тяжести, но уменьшенная пропорционально квадрату расстояния Луны до центра Земли. Он рассуждал следующим образом.

Падение тел на Землю происходит с ускорением около 9,8 м/с^2, другими словами, сила притяжения Земли вызывает вблизи ее поверхности, т. е. на расстоянии около 6378 км от центра, ускорение 9,8 м/с^2. Среднее расстояние Луны от Земли около 384 000 км. На таком расстоянии сила притяжения Землей уменьшится в $(384\,000)^2:(6378)^2 \approx 3640$ раз и ускорение будет равным $9{,}8/3640 \approx 0{,}0027$ м/с^2. Но именно таким центростремительным ускорением обладает Луна, движущаяся примерно по окружности вокруг Земли. Следовательно, Луна движется под действием силы земного притяжения.

На основании всего этого Ньютон заключил, что обращением всех планет вокруг Солнца, спутников Юпитера вокруг Юпитера, Луны вокруг Земли управляет сила, имеющая один и тот же характер. Это сила притяжения к центру того небесного тела, вокруг которого происходит движение, причем эта сила убывает пропорционально квадрату расстояния.

Пропорциональная зависимость этой силы от массы вытекает из следующего соображения. Сила тяжести на Земле определяет вес тела, а вес увеличивается пропорционально массе тела. Следовательно, сила притяжения пропорциональна массе тел.

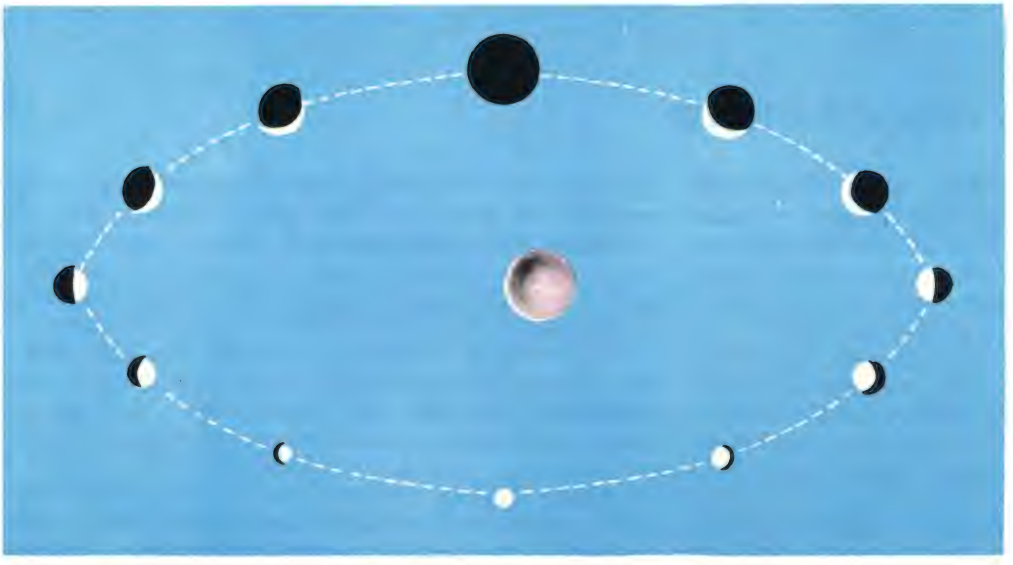
Вот таким путем Ньютон пришел к своему знаменитому закону, который был назван впоследствии *законом всемирного тяготения:* «Каждые две материальные частицы притягивают друг друга с силой, пропорциональной их массам и обратно пропорциональной квадрату расстояния между ними».

Математически этот закон выражается формулой

$$F = f\frac{m_1 \cdot m_2}{r^2},$$

где F — сила взаимного притяжения, m_1 и m_2 — массы притягивающихся частиц, r — расстояние между ними. Коэффициент пропорциональности f в этой формуле одинаков для всех материальных частиц и называется *постоянной тяготения.*

Притяжение между большими материальными телами складывается из сил притяжения между ча-



Слева — первый закон Кеплера: планеты движутся по эллипсу.

Справа — отклонение отвеса под влиянием массы горы.

Рядом — определение силы притяжения между телами.

стицами, из которых эти тела состоят. Если расстояние между телами очень велико по сравнению с их размерами, то эти тела притягивают друг друга практически так же, как и материальные частицы. Однако если рассмотреть, например, притяжение Землей какого-нибудь тела вблизи ее поверхности, то само понятие расстояния между Землей и этим телом становится неопределенным; можно говорить о расстоянии до ближайшей точки поверхности Земли, до центра Земли и т. д. Если мысленно разбить Землю на небольшие частицы с равными массами, то эти частицы будут притягивать данное тело с разными силами. Какому же закону будет подчиняться суммарное притяжение Земли, если каждая частица Земли притягивает с силой, обратно пропорциональной квадрату расстояния до нее? В этом случае результат оказывается неожиданно простым. Еще Ньютон доказал, что шарообразные тела, какими являются Земля, планеты, Солнце, притягивают почти по такому же закону, что и материальные частицы, если расстояние измерять от их центров. Но если материальные тела имеют более сложную форму и структуру, закон суммарного притяжения гораздо сложнее.

Закон всемирного тяготения предоставил новые возможности для изучения движения небесных тел. Стало возможным рассчитывать точные траектории небесных тел в пространстве на много лет вперед, восстанавливать траектории их движения в далеком прошлом.

В настоящее время большое значение имеют расчеты движения искусственных спутников Земли, автоматических межпланетных станций и других искусственных небесных тел.

Действием сил притяжения объясняются многие наблюдаемые явления, например приливы и отливы на Земле (см. ст. «Приливы и отливы»). Из-за совместного действия сил притяжения между частицами, из которых состоит Земля, и сил инерции, появляющихся при вращении, Земля имеет не точно шарообразную форму, а сплюснута у полюсов.

Закон Ньютона относится ко всем материальным телам. Следовательно, на Земле эти тела должны притягиваться не только Землей, подчиняясь силе тяжести, но также должны притягиваться между собой. Такое притяжение было действительно обнаружено. В XVIII в. ученые одной французской экспедиции в Южной Америке заметили, что вблизи гор отвес отклоняется в сторону этих гор (см. рис.). Более точные измерения отклонений отвеса провел позднее в Шотландии английский ученый Маскелайн (1732—1811).

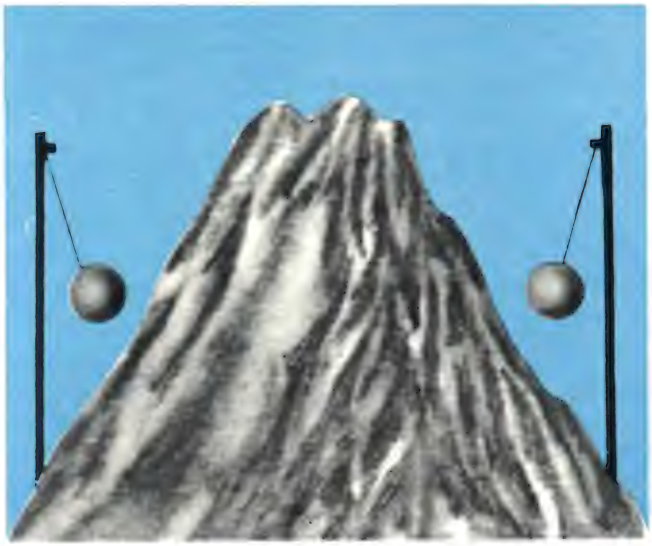
Один из лабораторных опытов по измерению силы притяжения состоит в следующем.

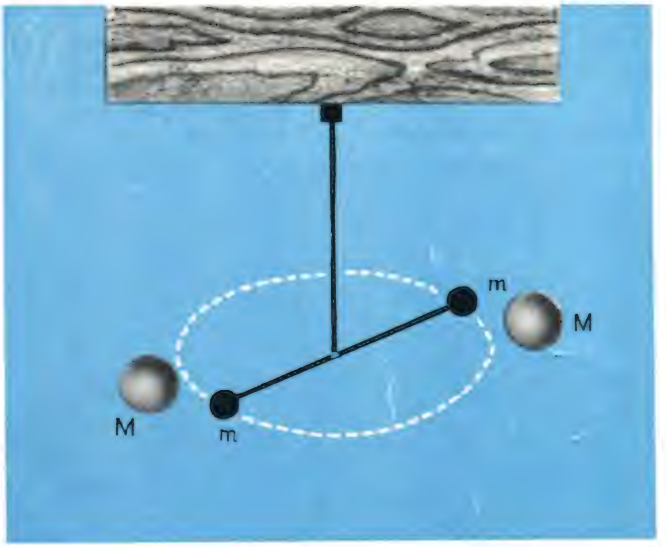
На тонкой упругой нити подвешен горизонтально стержень с небольшими металлическими шариками массой m на концах (см. рис.). Если поднести к маленьким шарикам с разных сторон тяжелые свинцовые шары массой M, то маленькие шарики будут притягиваться к большим, весь стержень повернется и нить закрутится. По величине закручивания нити определяется действующая сила притяжения.

При таком опыте можно также, сравнивая силу притяжения с весом маленьких шариков, вычислить, во сколько раз Земля притягивает сильнее, чем большие шары, т. е. во сколько раз масса Земли больше массы больших шаров. Таким путем английский ученый Кавендиш (1731—1810) определил в 1798 г., что масса Земли равна приблизительно $6 \cdot 10^{21}$ т.

Значение постоянной тяготения, найденное из этих и других опытов по непосредственному измерению сил притяжения, равно $6{,}673 \cdot 10^{-11}$ Н·м^2/кг^2.

Зная постоянную тяготения, мы можем вычислить силу притяжения между теми или иными телами. Например, два шара массой по 1 кг притягивают друг друга на расстоянии 10 см с силой около





7 мкН. Такая сила, конечно, мала и в повседневной жизни незаметна. Однако между крупными небесными телами действуют колоссальные силы притяжения, величину которых трудно даже представить. Например, Земля притягивает Луну с силой около $2 \cdot 10^{23}$ Н.

Сила тяготения обладает очень интересными, необычными свойствами. Для нее не существует никаких преград. Она действует между телами, разделенными безвоздушным пространством и находящимися как угодно далеко друг от друга. Тяготение не поглощается межзвездной средой, не ослабевает, когда на его пути встречаются какие-либо тела. Например, в моменты лунных затмений между Солнцем и Луной находится Земля, которая могла бы преградить путь силе тяготения между Солнцем и Луной так же, как лучам света. Это повлияло бы на движение Луны. Однако такое влияние не обнаруживается.

Существование этой удивительной всепроницающей силы, действующей на любом расстоянии, находит объяснение в общей теории относительности, созданной великим ученым нашего века Альбертом Эйнштейном (1879—1955).

Приливы и отливы

Жители многих населенных пунктов на побережьях морей и океанов ежедневно наблюдают очень интересное явление природы — периодические повышения и понижения воды у берегов: вода то наступает на берег, заливая иногда большие пространства, то отступает, обнажая дно.

Периодические колебания воды в океанах и морях называются *приливами* и *отливами*.

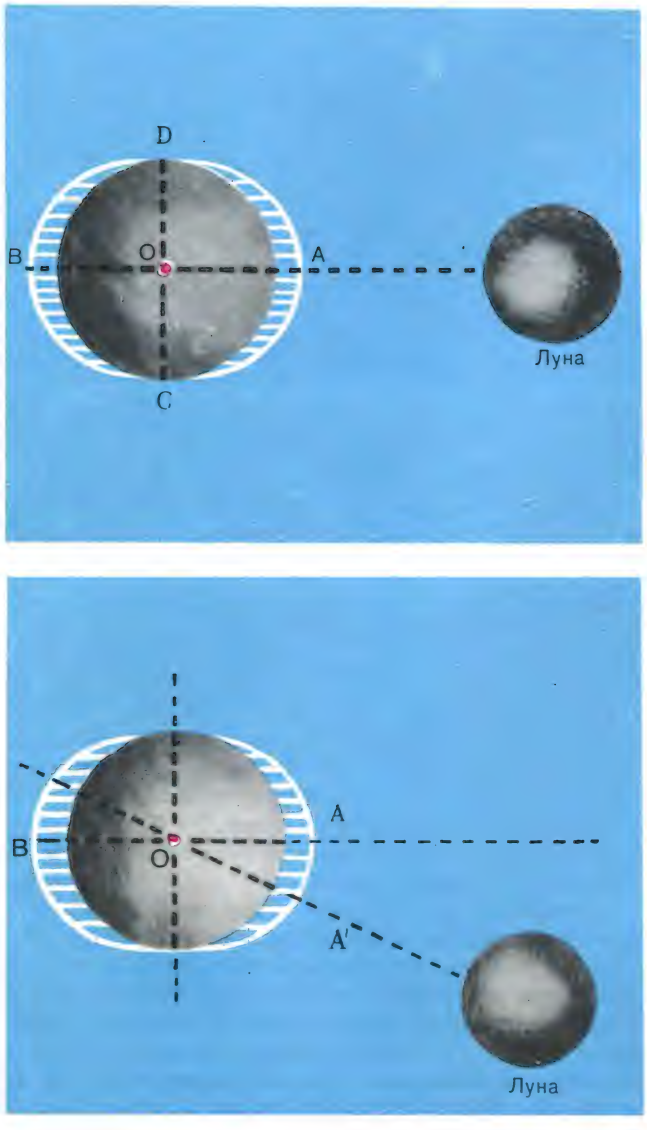
Заметнее всего приливы и отливы у берегов океанов или открытых морей. В течение суток, точнее 24 ч 50 мин, уровень воды у берегов дважды повышается и дважды понижается.

Повышение уровня воды происходит постепенно, и сначала медленно, а затем все быстрее и быстрее. Оно длится в среднем около 6 ч 12,5 мин, после чего начинается понижение. Понижение уровня воды продолжается в среднем также 6 ч 12,5 мин. Один из двух приливов в течение суток в данной местности наступает вскоре после того, как Луна достигает самого высокого положения на небе — верхней кульминации. Основываясь на этом и на совпадении удвоенного периода приливов (24 ч 50 мин) с периодом видимого обращения Луны вокруг Земли, еще в древние времена люди связывали приливы и отливы с Луной. И действительно, основная причина приливов, как впервые указал Ньютон, — это притяжение Земли Луной, точнее говоря, разность между притяжением Луной всей Земли в целом, с одной стороны, и водной оболочки ее — с другой.

В общих чертах теория Ньютона объясняет приливы и отливы так. Притяжение Земли Луной складывается из притяжения Луной отдельных частиц Земли. Частицы, которые находятся в данный момент ближе к Луне, притягиваются ею сильнее, а более далекие — слабее. Если бы Земля была абсолютно твердой, то это различие в силе притяжения не играло бы никакой роли. Но Земля не абсолютно твердое тело. Кроме того, океаны и моря занимают 71% ее поверхности. Поэтому разное притяжение частиц, находящихся вблизи поверхности

Вверху — схема прилива.

Внизу — для наблюдателя в A′ Луна кульминирует. Гребни приливной волны находятся в это время на линии AB.



Земли и вблизи ее центра (эту разность называют приливообразующей силой), смещает частицы друг относительно друга, и Земля, прежде всего ее водная оболочка, деформируется.

Частицы воды, наиболее близкие к Луне в данный момент (на верхнем рисунке вблизи точки A), притягиваются Луной сильнее, а частицы, наиболее далекие от нее (вблизи точки B),— слабее, чем частицы, находящиеся в центре Земли. Поэтому частицы воды вблизи точки A смещаются по направлению к Луне больше, а частицы вблизи точки B — меньше, чем частицы в центре Земли, и водная оболочка нашей планеты вытягивается в направлении Луны.

Таким образом, на стороне Земли, обращенной к Луне, и на противоположной ее стороне (вблизи точек A и B) вода поднимается и образуются приливные выступы. Вблизи же точек C и D уровень воды снижается — здесь наступает отлив.

Приливные выступы вблизи A и B стремятся сохранить по отношению к Луне одно и то же положение. И если бы Земля не вращалась, а Луна была неподвижной по отношению к Земле, то Земля вместе со своей водной оболочкой всегда сохраняла бы одну и ту же форму, вытянутую по направлению к Луне, и никаких приливов и отливов не было бы. Однако Земля вращается, и земному наблюдателю представляется, что Луна за сутки делает полный оборот вокруг Земли. Поэтому приливные выступы следуют за Луной и перемещаются по поверхности океанов и морей. Образуются две приливные волны в противоположных точках земного шара. Приливная волна движется в океанах и морях с запада на восток навстречу направлению вращения Земли со скоростью около 1800 км/ч. Над каждым пунктом в океане приливная волна проходит дважды в сутки.

В открытом океане уровень воды при прохождении приливной волны поднимается незначительно, в среднем на несколько десятков сантиметров, и, естественно, это остается незаметным, например, для плывущих на корабле людей. Но у берегов даже такой подъем уровня воды заметен. Кроме того, у берегов, особенно в узких заливах или бухтах, уровень воды поднимается гораздо выше, чем в открытом океане, так как берег материка препятствует движению приливной волны и вода здесь накапливается в течение всего времени между отливом и приливом. Поэтому около берегов приливы (точнее говоря, разность между уровнями воды при приливе и отливе) достигают в среднем 4—5 м. Самый большой прилив — около 18 м — наблюдается в одной из бухт на побережье Канады. В СССР наибольшие приливы — около 13 м — в Гижигинской и Пенжинской губах Охотского моря.

Во внутренних морях, например в Балтийском и Черном, приливы и отливы почти незаметны. Дело в том, что в такие моря за время от отлива до прилива не успевают проникнуть сколько-нибудь значительные массы воды, перемещающиеся с океанской приливной волной. Правда, в каждом закрытом море или даже озере возникают самостоятельные приливные волны. Но чем меньше море или озеро, тем меньше воды перемещается в нем от одного берега к другому и тем меньше приливы и отли-

Морские приливы и отливы вызываются притяжением Луны и Солнца. Во время прилива море затопляет берег, а во время отлива отступает и снова обнажает его.

вы. Например, в Средиземном море приливы достигают 1—2 м, а в Черном — 10 см.

Такова в общих чертах картина приливов и отливов. При более детальном их изучении наблюдаются очень интересные и сложные явления.

Момент полной воды в данной местности не совпадает с кульминацией Луны, а всегда запаздывает. Трение воды о дно океанов и внутреннее трение воды несколько задерживают движение приливной волны, она не поспевает за Луной и достигает данного пункта в океане лишь через некоторый промежуток времени после кульминации Луны. Поэтому прямая линия, проведенная через приливные выступы на противоположных сторонах земного шара, проходит восточнее направления из центра Земли на Луну (см. рис. на стр. 36). Величина запаздывания приливов в данной местности по сравнению с моментом кульминации Луны называется *прикладным часом*. В разных местностях свой прикладной час. Он зависит от особенностей рельефа дна и берегов. Например, в Остенде (Бельгия) прикладной час равен в среднем 25 мин, в Гибралтаре — 1 ч 47 мин в Бресте (Франция) — 3 ч 46 мин, в некоторых заливах Белого моря — 5 ч и т. д.

В 1968 г. в СССР вступила в строй опытная ПЭС в Кислой губе близ Мурманска мощностью 800 кВт.

В одной и той же местности высота приливов каждый день меняется, так как расстояние от Луны до Земли и высота Луны над горизонтом в данной местности в момент кульминации все время изменяются. Поэтому непостоянна и величина приливообразующей силы. Формула приливообразующей силы, действующей на единицу массы на поверхности Земли в момент кульминации Луны:

$$F=2f\frac{MR}{r^3}\sqrt{1-\frac{3}{4}\cos^2 h},$$

где f — постоянная тяготения, M — масса Луны, R — радиус Земли, r — расстояние от Луны до Земли, h — высота Луны над горизонтом в момент кульминации.

В течение месяца расстояние от Луны до Земли изменяется приблизительно от $r=356$ тыс. км до $r=406$ тыс. км, а приливообразующая сила изменяется примерно в 1,4 раза. Высота Луны над горизонтом в момент кульминации изменяется за месяц в среднем на 47°, причем амплитуда изменений колеблется с периодом около 19 лет от 37 до 57°; это приводит к месячным колебаниям высоты приливов и отливов и к колебаниям с периодом около 19 лет.

Заметное приливное действие оказывает на Землю и Солнце. Хотя Солнце находится от Земли значительно дальше, чем Луна (в среднем в 389 раз), но его масса больше массы Луны в 27 млн. раз, поэтому и влияние Солнца на создание приливов и отливов также велико.

Во время новолуния и полнолуния приливные силы Солнца и Луны действуют совместно и получаются очень высокие, или *сизигийные,* приливы, а во время первой и третьей четвертей Луны приливные силы двух тел действуют в противоположных направлениях и получаются низкие, или *квадратурные,* приливы. Сизигийные приливы примерно в 2,7 раза выше квадратурных.

Кроме указанных основных причин колебаний высоты приливов и отливов существуют и более мелкие. Они связаны главным образом с особенностями движения Луны вокруг Земли и Земли вокруг Солнца. Теоретически приливное действие оказывают также и планеты, но оно слишком мало, чтобы его можно было обнаружить.

Под действием приливообразующих сил деформируется не только водная оболочка, но и все твердое тело Земли. Наблюдая приливные волны на твердой поверхности Земли, ученые сделали вывод об упругости вещества Земли, напоминающей свойства стального шара.

Приливообразующие силы деформируют воздушную оболочку Земли. Это вызывает периодические колебания атмосферного давления и изменения свойств различных слоев атмосферы.

Приливы и отливы перемещают большие массы воды, и люди давно стали задумываться над тем, как заставить эти массы воды вращать колеса турбин, вырабатывающих электроэнергию. В последние годы вопрос этот уже практически решен, и в ближайшем будущем человек станет широко использовать энергию приливов и отливов.

Принцип работы приливной электростанции (ПЭС) простой. В заливе, где наблюдаются более или менее значительные приливы и отливы, строится плотина, отделяющая часть залива от океана. Во время прилива или отлива образуется разность уровней воды между океаном и отделенной частью залива. Вода по каналу устремляется сквозь плотину сверху вниз и приводит в движение установленные там турбины. На ПЭС используются реверсивные турбины. Они вращаются то в одну (во время прилива), то в другую (во время отлива) сторону.

Приливные электростанции проектируются во многих странах мира. В 1967 г. во Франции пущена в эксплуатацию ПЭС в устье реки Ранс. Ее расчетная мощность 240 000 кВт. В 1968 г. в СССР в Кислой губе близ Мурманска вступила в строй опытная ПЭС мощностью 800 кВт.

Как измеряют расстояние до небесных светил

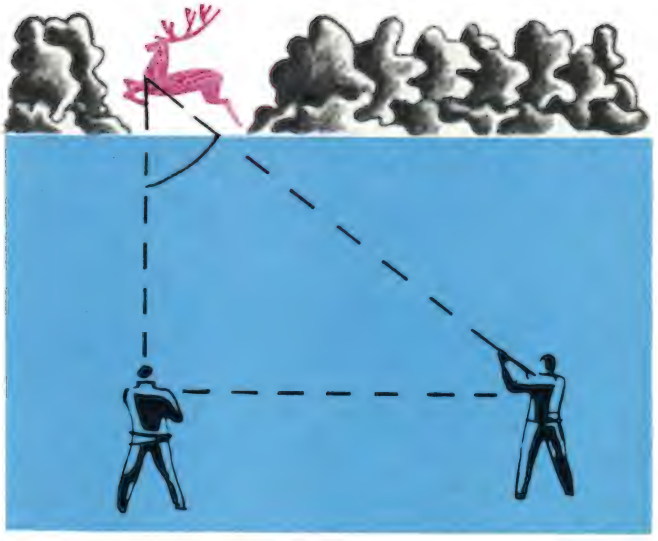
На Земле предмет, расстояние до которого надо определить, рассматривают одновременно с двух мест, откуда он виден по разным направлениям. Если два человека, стоящие на расстоянии 10 м друг от друга, будут целиться из ружей в один и тот же предмет, удаленный от них на 100 м, то их ружья не будут параллельны друг другу, как параллельны друг другу рельсы железных дорог. Ружья обоих стрелков образуют между собой угол, который будет тем меньше, чем дальше от стрелков находится цель.

Зная расстояние между наблюдателями и угол между направлениями, под которым они видят цель, легко можно высчитать расстояние до нее. Это делается при помощи тригонометрии.

Ученые тоже «целятся» на светило, но не из ружей, а из телескопов. Угол между направлениями двух телескопов на светило определяют по специальным приборам с точностью до $^1/_{100}$, а иногда и до $^1/_{1000}$ доли секунды дуги.

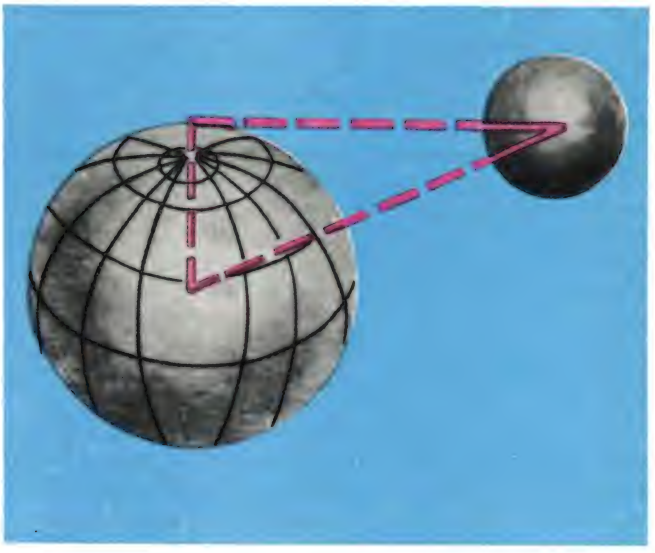
Небесные светила находятся очень далеко от Земли. Чтобы заметить различие в направлениях, по которым видно светило, ученые должны находиться на расстоянии многих тысяч километров друг от друга, иначе угол между направлениями будет так мал, что его невозможно измерить. Например, делают так: один астроном наблюдает светило на севере Европы, а другой в то же время — в Южной Африке. Производя наблюдения с двух отдаленных точек земного шара, астрономы определили расстояния до наиболее близких к нам небесных светил: Луны, Солнца и планет. Расстояния до ближайших к нам планет теперь точнее всего определяют методами радиоастрономии, о чем сказано в следующей статье.

Даже при самых тщательных попытках описанными выше способами нельзя определить расстояние до звезд, так как диаметр земного шара слишком мал по сравнению с расстояниями до ближайших звезд и, наблюдая с противоположных концов его, нельзя заметить различие в направлениях на звезды. Следовательно, надо было наблюдать звезду с концов такого отрезка прямой линии, который по крайней мере в тысячи раз по длине превышает диаметр земного шара. Где же астрономы могли взять такой отрезок прямой линии, который на земном шаре никак не уместится? Оказывается, такой отрезок в природе есть — это диаметр земной орбиты. Чтобы проехать вдоль диаметра земной орбиты, который равен 300 млн. км, на курьерском поезде, идущем со скоростью 100 км/ч, пришлось бы затратить более 340 лет! Но за полгода сам земной шар переносит нас на другую сторону Солнца, на противоположную точку диаметра своей орбиты. Лишь наблюдая



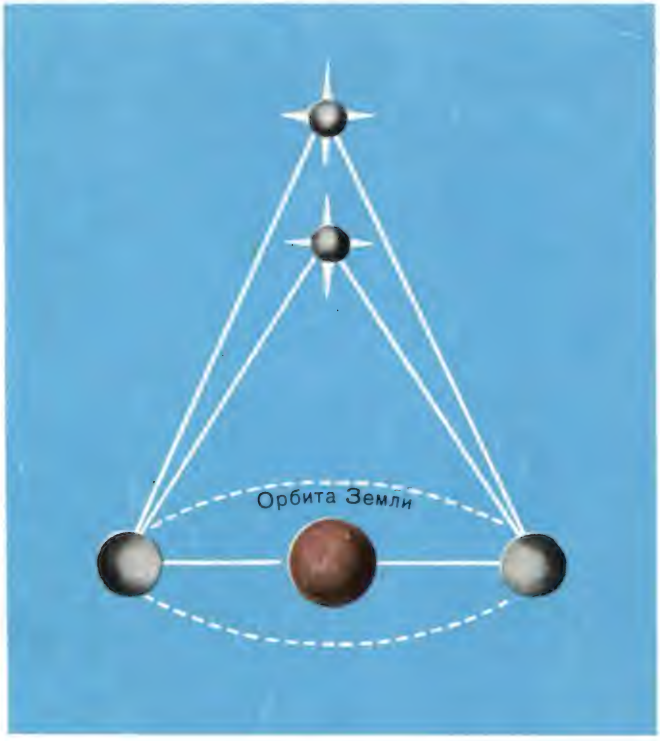
Можно вычислить расстояние до мишени, если известны расстояние между стрелками и угол, под которым они видят мишень.

Подобным же способом астрономы определяют расстояние до близких небесных светил.



Расстояние до наиболее близких к нам небесных светил (Солнца, Луны, планет) определяется наблюдением их с двух отдаленных друг от друга точек земного шара.

Расстояние до более далеких небесных светил (звезд) определяется наблюдениями с противоположных точек земной орбиты.



таким путем, можно заметить ничтожно малое различие в направлениях, по которым видны ближайшие звезды. Правда, наблюдения при этом приходится производить не одновременно, а в моменты, отдаленные друг от друга промежутком в полгода. За это время изучаемая звезда переместится в пространстве на огромное расстояние вследствие своего движения. Но это расстояние ничтожно мало в сравнении с расстоянием от нас до звезды, и его можно не принимать во внимание. Точно так же для артиллериста, вычисляющего многокилометровое расстояние до позиции неприятеля, не имеет значения передвижение кого-нибудь во вражеском стане на шаг вперед или назад. Его вычисления будут достаточно точны без учета длины этого шага.

Однако наблюдения даже с противоположных концов диаметра земной орбиты долгое время не давали необходимых результатов. Слишком малы углы между направлениями, и для их измерения требовалась огромная точность.

Только в 30-х годах XIX в. русский ученый В. Я. Струве впервые определил расстояние до звезды Вега (самая яркая звезда из созвездия Лиры) и тем самым положил начало точному определению звездных расстояний. Вскоре были определены расстояния до целого ряда звезд.

Оказалось, что даже ближайшие к Земле звезды в тысячи раз дальше самой далекой планеты — Плутона. Такие расстояния выражать в километрах неудобно. Поэтому их выражают в единицах времени, которое нужно свету, чтобы пройти эти расстояния. Свет движется очень быстро и за 1 с распространяется на 300 тыс. км. Когда сверкает молния, то свет ее доходит до нас за ничтожно малую долю секунды. От Луны до Земли свет идет $1^1/_4$ с, от Солнца — 8 мин, от самой далекой планеты — Плутона — около 5 ч, а от ближайшей звезды — более 4 лет! Курьерский поезд, идя без остановки со скоростью 100 км/ч, добрался бы до ближайшей звезды, называемой альфой Центавра, только через 46 млн. лет; за 3—4 млн. лет до нее долетел бы современный самолет. А ведь альфа Центавра — самая близкая к нам звезда! Расстояние от Земли до нее ничтожно мало по сравнению с расстоянием до далеких звезд Млечного Пути.

Описанный способ определения расстояний до звезд применим только для сравнительно близких к Солнечной системе звезд. Для звезд более далеких он не годится — слишком мал диаметр земной орбиты по сравнению с расстояниями в тысячи и более световых лет. Астрономы имеют теперь в своем распоряжении другие методы определения расстояний до очень далеких звезд.

Измерения расстояний до звезд окончательно доказали, что все звезды находятся от нас на разных расстояниях и вовсе не расположены на поверхности круглого купола, каким нам кажется звездное ночное небо. Оно нам кажется куполом, опрокинутым над Землей, или сферой, окружающей со всех сторон нашу планету, только потому, что невооруженный глаз не воспринимает различия в расстояниях до разных звезд.

Если бы какая-нибудь планета, даже намного большая, чем Юпитер, находилась от Земли на расстоянии ближайшей звезды, то для нас она была бы совершенно невидима. На таком огромном расстоянии Солнце освещало бы ее слишком слабо, да и на обратном пути к нам отраженный ею свет ослабевал бы слишком сильно. Звезды же светят собственным, чрезвычайно ярким светом, т. е. являются самосветящимися солнцами. Таким образом, мы можем разделить Вселенную на *Солнечную систему* (ближайшие к нам окрестности) и *бесконечный мир*, лежащий за ее пределами. Этот мир состоит из бесчисленного количества звезд, подобных нашему Солнцу.

Как работают астрономы

70-сантиметровый телескоп-рефлектор Государственного астрономического института имени П. К. Штернберга.

Наблюдения в телескоп

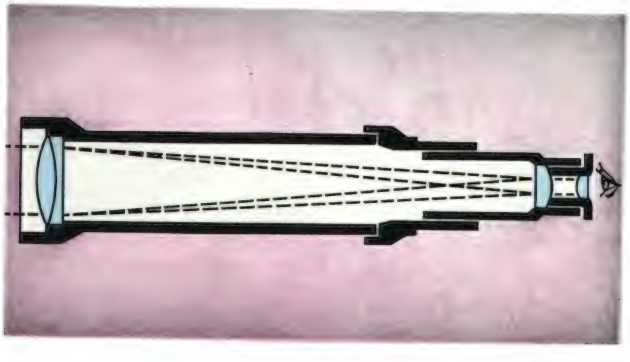
Темная ночь. Высоко в небе сияют звезды, и при их слабом свете едва видны очертания купола башни астрономической обсерватории. Время от времени купол медленно поворачивается, и мы видим на нем темную прорезь, или люк, в котором на мгновение может мелькнуть стеклянный глаз телескопа. Поднимемся в темноте по узенькой лестнице башни и войдем под купол. Там на середине круглой площадки мы увидим чугунную колонну, на которой укреплена легко поворачивающаяся во все стороны длинная труба телескопа. На переднем ее конце, обращенном к небу, укреплено большое двояковыпуклое стекло — линза, или объектив. Объективом свет собирается в фокальной плоскости, где получается изображение рассматриваемого светила. Это изображение, получаемое у нижнего конца телескопа, рассматривается в увеличенном виде в окуляр. Окуляр представляет собой систему линз.

Чтобы наблюдениям не мешали городской свет, дым и пыль, заполняющие нижние слои атмосферы, обсерватории обычно строят за городом и даже на горах. Ведь чем выше над землей, тем разреженнее, спокойнее, чище и прозрачнее воздух, тем лучше наблюдать небесные светила. Но даже над горами воздух часто бывает недостаточно спокойным, и лучи света от небесных тел, проходя сквозь воздушные струйки, постоянно отклоняются ими. Вот почему звездочка, видимая в телескоп, иногда дрожит и колеблется, а маленькие изображения далеких планет, на которых так хочется что-либо рассмотреть, превращаются как бы в размытые световые пятна. Воздушные струйки — враги астронома. Они резко ограничивают увеличение, даваемое телескопом. Чем сильнее увеличивает телескоп, тем более заметны волнения воздуха. Поэтому планеты рассматриваются с увеличением не более чем в 500—600 раз, хотя современные крупные телескопы могли бы увеличивать в десятки тысяч раз.

Приложите глаз к окуляру — астроном показывает вам Луну. Но почему же виден только маленький участок ее, а не вся она? Потому что чем сильнее увеличение, тем меньший кусочек неба виден в телескоп. Что это? Почему-то Луна быстро уходит из поля зрения — из того кусочка неба, который виден в телескоп. Происходит это потому, что за время нашего наблюдения земной шар, вращаясь вокруг своей оси, успел немного повернуться, а вам кажется, что вертится небо и Луна уходит со своего места. В телескопе благодаря увеличению этот поворот Зем-

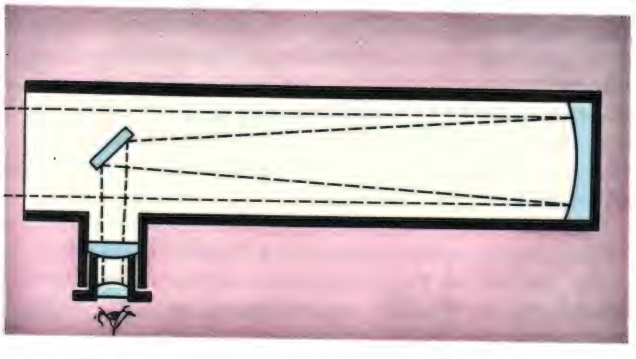
Телескоп-рефрактор.

Схема телескопа-рефрактора. Слева — линзы объектива, собирающие лучи, справа — система линз — окуляр.



Телескоп-рефлектор.

Схема телескопа-рефлектора. Справа — вогнутое зеркало, оно собирает лучи; а малое плоское зеркало дает отражение их вбок, где находится глаз наблюдателя.



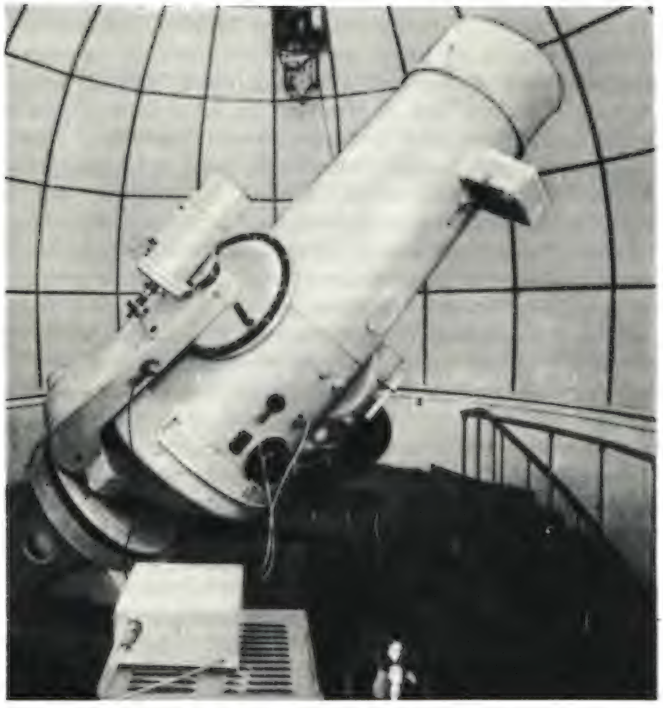
ли кажется еще более быстрым. Но вот Луна перестала уходить из поля зрения — это астроном включил часовой механизм, который стал поворачивать телескоп с той же скоростью, с какой вращается земной шар, только в направлении, противоположном вращению Земли. Таким образом астроном как бы прекратил вращение Земли. С каждым часом Луна все ближе к горизонту, все выше и выше поднимается нижний конец направленного на нее телескопа. Вот уже не дотянуться до окуляра и на цыпочках. Приходится пользоваться специальной лестницей. В больших обсерваториях пол сделан так, что он при помощи механических устройств может плавно подниматься или опускаться. Для этого наблюдателю достаточно нажать кнопку. Делаются также подвижные механизированные платформы для наблюдателя: они поднимают или опускают его. При помощи механизмов передвигается и купол башни. В маленьких башнях купол поворачивают рукой.

Обсерватории строились уже в глубокой древности. Правда, тогда не было еще телескопов, но уже имелись большие, довольно разнообразные инструменты для определения положения звезд на небе. На территории нашей страны, около Самарканда, сохранились остатки замечательной обсерватории XV в., построенной выдающимся узбекским астрономом и математиком Улугбеком. Она свидетельствует о высоком для того времени уровне методов исследования небесных светил.

Потом, уже после изобретения телескопа, люди затратили много труда на то, чтобы научиться отливать большие и прозрачные стекла нужного сорта и придавать им ту точную форму, которая требуется для получения отчетливых изображений небесных светил.

Телескоп был изобретен в начале XVII в., но и сейчас еще не научились изготовлять телескоп с передним стеклом — объективом больше одного метра в поперечнике. Телескоп с объективом называется *рефрактором*. Создали и другой вид телескопа — *рефлектор*, в котором свет собирается не выпуклым стеклом, а вогнутым зеркалом. Рефлектор изобрел английский ученый Исаак Ньютон. В рефлекторе зеркало помещают в нижнем конце телескопа, оно отражает лучи и собирает их у верхнего конца трубы, где и находится наблюдатель. Обычно при помощи дополнительного маленького зеркала эти сходящиеся лучи отражаются вбок или даже назад. В последнем случае лучи выходят из трубы сквозь отверстие в большом зеркале. При таком устройстве наблюдатель находится ближе к полу и не загораживает своей головой свет, идущий в телескоп.

70-сантиметровый телескоп системы Д. Д. Максутова Абастуманской обсерватории.



Самый большой в мире 6-метровый телескоп-рефлектор Зеленчукской обсерватории.

Рефлектор имеет недостаток: в него отчетливо виден лишь небольшой участок неба. Наибольший телескоп такого рода, установленный в Калифорнии, имеет зеркало 5 м в поперечнике. При помощи этого телескопа можно фотографировать не только яркие звезды, но и звезды до 23-й звездной величины.

В Советском Союзе построен и работает на Крымской астрофизической обсерватории рефлектор с зеркалом диаметром 2,6 м. На Кавказе, вблизи станицы Зеленчукской, на обсерватории можно наблюдать небо в величайший в мире рефлектор с зеркалом диаметром 6 м.

В годы Великой Отечественной войны советский конструктор телескопов Д. Д. Максутов разрешил задачу, над которой долго думали изобретатели многих стран: он сконструировал телескоп, который соединяет в себе достоинства рефрактора и рефлектора и в то же время не имеет их недостатков. Максутов на верхнем конце трубы перед вогнутым зеркалом поставил выпукло-вогнутое тонкое стекло, называемое *мениском*. (Часто стеклам для очков придается форма менисков.) Каждый телескоп, в котором недостаток рефлектора устранен, требует зеркала и стекла особой формы. Для менискового телескопа изготовление и тех и других легче, так как поверхности их сферические.

По системе Д. Д. Максутова на советских заводах изготовлялись раньше также школьные телескопы. Они небольшого размера, но дают такое же увеличение, как телескоп-рефрактор с длиной трубы почти метр, и увеличивают наблюдаемый предмет до 70 раз, тогда как бинокли обычно имеют увеличение лишь от 2 до 8 раз.

Изготовляют большие телескопы разных систем и много других вспомогательных приборов для наблюдений небесных тел. Очень большое значение имеет точное измерение блеска небесных светил, определяемое *фотометрами*.

Фотографирование звезд

Если вам удастся побывать на астрономической обсерватории, то вы, вероятно, удивитесь, узнав, что в большинство телескопов не смотрят. Глаз наблюдателя там давно заменила фотографическая пластинка. На ней получают «портреты» небесных светил и целых участков неба. На одном снимке можно сразу увидеть десятки тысяч звезд. Вместо того чтобы тратить много часов на изучение каждой из этих звезд по очереди, астрономы изучают снимки и сравнивают фотографии, снятые в разное время. Так астрономы узнают об изменениях, происходящих в расположении звезд, их яркости, движении в пространстве. С помощью фотографических снимков определяют расстояния до звезд и выясняют причины изменения блеска некоторых из них. Для удобства сравнения снимков их рассматривают попарно в приборе, похожем на стереоскоп, или в других приборах, где снимки видны поочередно, быстро, один за другим. На обсерваториях целые шкафы заполнены снимками звезд, полученными за многие годы.

Чтобы установить движение какой-либо далекой звезды, несущейся со скоростью несколько десятков километров в секунду, надо сравнить ее снимки, сделанные с промежутком времени в несколько десятилетий. На двух таких снимках положение звезды, изучаемое под микроскопом, будет различаться на несколько сотых или даже тысячных долей миллиметра.

Вот какие крохотные величины измеряют астрономы, чтобы определить огромные скорости движения далеких небесных тел.

Результаты таких измерений подсчитывают на специальных машинах — арифмометрах, которые сами умножают и делят большие числа, если нажать на арифмометре нужные кнопки. Но несравненно быстрее разнообразные астрономические вычисления выполняются на счетно-аналитических и электронных машинах.

Есть на обсерваториях приборы, которыми точно измеряют силу света звезд и даже получаемое от них тепло. Какая это сложная и требующая огромной точности работа, можно себе представить по такому примеру. От гигантской звезды Бетельгейзе в созвездии Ориона до Земли доходит так мало тепла, что если собирать его в течение года при помощи вогнутого зеркала диаметром 2,5 м, то им можно нагреть наперсток воды всего лишь на 1°С. И все же приборы улавливают и такое незначительное тепло.

Спектральный анализ

Когда солнечный луч проходит через стеклянную трехгранную призму, он разбивается на составные части — лучи всех цветов радуги. Свет, разложенный на его составные части, называется *спектром,* а прибор для получения и рассматривания спектров — *спектроскопом.* Радуга, сверкающая после дождя на небе, это и есть спектр света Солнца, образованный капельками воды, находящимися в воздухе. Но спектроскоп дает спектр Солнца чище. Кроме того, в нем на фоне радужной полоски видны пересекающие ее в разных местах многочисленные темные линии. О них будет рассказано ниже.

Раскаленная нить электрической лампочки, пламя свечи и расплавленный металл тоже дают спектр в виде радужной полоски, но в таких полосках спектра темных линий не видно. Спектры разреженных газов, светящихся в трубках, которыми теперь стали украшать вывески и витрины магазинов, имеют вид цветных линий на темном фоне.

Ученые установили, что каждое вещество, находящееся в состоянии светящихся паров или газов, дает в спектре свои собственные, всегда одни и те же цветные линии.

Например, пары металла натрия всегда дают в спектре одну и ту же яркую желтую линию, т. е. свет натрия состоит из одних лишь желтых лучей. Натрий входит в состав поваренной соли. Внесите на кончике перочинного ножика крупинки соли в пламя свечи, и оно окрасится в желтый цвет. Спектры других веществ состоят из большого числа иных линий разного цвета. По положению таких линий в спектре сложного вещества можно узнать его состав. Если составные части этого вещества, превратившись в пар, засветятся, то каждая из них заявит о себе в спектре определенными цветными линиями. Так по спектру выясняют химический состав газов.

Определение химического состава небесных тел

С помощью спектрального анализа ученые точно узнали химический состав звезд, комет и туманностей — все они состоят из известных на Земле химических элементов. Это открытие ученых было торжеством материалистической науки. Оно доказало

Государственный астрономический институт имени П. К. Штернберга. Астрономический фотографический рефрактор.

ошибочность утверждений некоторых философов прошлого века, что человеческое познание ограниченно и люди никогда не смогут узнать химический состав небесных светил.

Однако вернемся к спектру Солнца, перерезанному темными линиями, и к похожим на него в этом отношении спектрам звезд. Тайна этих темных линий выяснилась, когда между спектроскопом и пламенем свечи, дающей спектр в виде радужной полоски без линий, поместили газ, более холодный, чем пламя. В радужной полоске спектра появились темные линии, причем в тех самых частях спектра, где этот газ сам по себе давал бы в спектре цветные линии. Оказалось, что газ поглощает из состава спектра более горячего источника света (в данном опыте — свечи) те лучи, которые он сам излучает в раскаленном состоянии. Отсюда ученые сделали вывод, что раскаленные поверхности Солнца и звезд дают спектры в виде радужных полосок, но эти поверхности окружены разреженными и менее раскаленными газами, которые и вызывают появление в спектре темных линий. Эти газы образуют вокруг Солнца и звезд атмосферы, химический состав которых можно узнать по темным линиям спектра. Заметим, что поверхности Солнца и звезд хотя и дают такой же спектр, как жидкие и твердые раскаленные тела, но состоят из раскаленных наэлектризованных газов, более плотных, чем окружающие их атмосферы.

Спектры светил говорят нам не только о химическом составе светил. В них можно «прочитать» еще многое, если изучить «спектральную грамоту». Например, у сравнительно холодного тела самой яркой оказывается красная часть спектра. Чем горячее тело, тем менее ярки красные лучи в его спектре по сравнению с остальными и тем белее цвет тела. Так ученые определяют температуры звезд по их цвету или спектру.

Уже давно ученые высказали предположение, что, когда источник света движется относительно наблюдателя, линии в его спектре должны немного смещаться: при приближении источника света — в сторону фиолетового конца спектра, и тем больше, чем больше скорость движения источника света, при удалении — к красному концу спектра.

Русский ученый академик А. А. Белопольский при помощи сложных и точных опытов подтвердил, что линии спектра действительно смещаются именно таким образом. После этого стало возможным уверенно определять по спектру скорости и направления движения небесных тел, в связи с чем было сделано много и других интересных открытий. О них рассказывается во многих статьях этого тома. Хотя на фотографиях спектры не получаются цветными, ученые теперь достаточно хорошо знают, какому именно цвету соответствует то или другое место на черно-белой фотографии спектра.

Прежде чем астроном из своих наблюдений сделает тот или иной вывод, ему обычно приходится производить много разных измерений и вычислений.

Определение точного времени и координат светил

На обсерваториях есть инструменты, при помощи которых определяют точнейшим образом время — проверяют часы. Без такого точного учета времени астрономические наблюдения теряют свою ценность. Время устанавливают по положению, которое занимают светила над горизонтом. Часы обсерватории помещают в глубокие подвалы, для того чтобы они шли как можно точнее и равномернее. В таких подвалах круглый год сохраняется постоянная температура. Это очень важно, так как изменения температуры влияют на ход часов.

В последние годы для хранения времени вместо часов с маятником стали применять гораздо более точные кварцевые часы. Кварцевые часы — это кристалл кварца, в котором электромагнитные колебания, когда они в нем возбуждены, поддерживают свою частоту с гораздо большим постоянством, чем колебания маятника в самых лучших часах при самых лучших условиях.

Еще точнее хранят время так называемые атомные часы.

Для передачи сигналов точного времени по радио на обсерватории имеется специальная сложная аппаратура. Передаваемые из Москвы сигналы точного времени — одни из самых точных в мире. Определение точного времени по звездам, хранение времени при помощи точных часов и передача его по радио составляют Службу времени.

На обсерваториях при помощи специальных телескопов определяют также положение светил на небе — их координаты. Эта работа выполняется с огромной точностью.

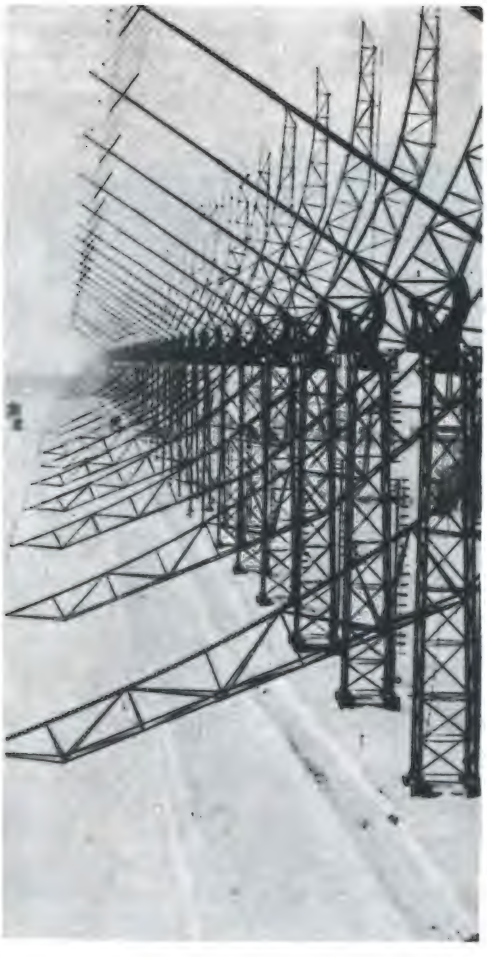
Радиоастрономия

Свет — это электромагнитная энергия, распространяющаяся волнами такой длины, которые воспринимаются глазом. При помощи фотографии и особых приборов можно воспринимать и изучать недоступные глазу ультрафиолетовые, инфракрасные и рентгеновские лучи.

Ультрафиолетовые лучи имеют длину волны меньшую, чем видимые лучи. Еще меньше она у рентгеновских лучей, но такие коротковолновые лучи от светил через земную атмосферу не проходят. Однако подъем некоторых приборов в верхние слои атмосферы и за ее пределы на геофизических ракетах и на искусственных спутниках Земли позволяет улавливать и изучать коротковолновое излучение небесных светил.

У инфракрасных лучей, наоборот, длина волны больше, чем у видимых лучей. За ними в направлении увеличения длины волны идут тепловые лучи. Они также воспринимаются специальными приборами. Еще дальше начинается область радиоволн. Многие радиоволны, идущие от небесных светил, задерживаются земной атмосферой. Но атмосфера свободно пропускает волны от нескольких миллиметров и сантиметров до нескольких метров. Это выяснилось в 40-х годах XX в., когда впервые было уловлено радиоизлучение, идущее из глубин космического пространства. Тогда и стали изготовлять радиотелескопы. Они собирают радиоизлучение небесных светил.

Радиотелескопы бывают двух видов. Это либо вогнутое металлическое, иногда решетчатое зеркало, либо рама, на которой параллельно друг другу установлены металлические стержни; в них и возникают электромагнитные колебания. Законы отражения лучей таковы: чем больше длина волны, тем менее точно может быть изготовлена форма отражающей поверхности. Поэтому требования к точности при изготовлении зеркал для радиотелескопов



гораздо меньшие, чем при изготовлении собирающих свет оптических телескопов-рефлекторов. Это дает возможность строить радиотелескопы с зеркалами гораздо большего размера, чем у оптических телескопов. Их диаметры достигают десятков, а у некоторых радиотелескопов и сотен метров. Это позволяет улавливать очень слабое радиоизлучение от очень далеких космических источников.

Радиоизлучение, приходящее к нам от небесных тел, бывает тепловой и нетепловой природы. Раскаленное тело всегда посылает электромагнитные излучения всех видов, в частности и радиоволны. Это радиоизлучение теплового происхождения. Его интенсивность зависит от свойств и температуры тела. Нетепловое радиоизлучение, иногда и очень мощное, может возникнуть при различных физических процессах, в частности при торможении магнитным полем электронов, летящих со скоростью, близкой к скорости света.

Установлено, что различные оболочки Солнца посылают радиоизлучение. Мощность его колеблется в колоссальных пределах, отражая происходящие на Солнце сложнейшие физические процессы. Радиоволны излучаются также в атмосферах планет Венера и Юпитер. Их интенсивно излучают газовые туманности — массы разреженного и наэлектризованного, а также нейтрального газа. Наконец, многие гигантские звездные системы также являются источниками радиоизлучения, и некоторые из них испускают радиоволны с колоссальной силой.

Изучение радиоизлучения небесных тел и причин, его вызывающих, чрезвычайно расширяет наши представления о небесных телах, их системах, о строении и поведении их вещества и об электромагнитном излучении вообще.

Радиоастрономия — новая увлекательная наука. Кроме радиотелескопа она располагает еще другим интересным инструментом — *радиолокатором*. Радиолокатор посылает с Земли короткие радиоволны узким направленным пучком, так что их энергия почти не рассеивается. Радиоволны, посланные радиолокатором, отражаются многими предметами и наэлектризованными газами. По времени прохождения импульса радиоволн от радиолокатора и обратно, после их отражения от предмета, можно определить расстояние до предмета и скорость его движения, так как скорость распространения радиоволн известна — она равна скорости света.

Радиолокация, применявшаяся сначала в военном деле, стала новым, очень точным методом опре-

Слева — сложная антенна радиотелескопа в Серпухове.

Рядом — один из больших радиотелескопов.

Справа — радиотелескоп Крымской обсерватории.

деления расстояния от Земли до Луны и до многих планет. При ее помощи с достаточной точностью определяют высоту следов, оставляемых «падающими звездами» — метеорами, и скорость частиц вещества, которые их производят, когда влетают из межпланетного пространства в земную атмосферу.

Радиолокация дает возможность «прощупывать» рельеф поверхности планет, даже окутанных густыми облаками, сквозь которые в обычный телескоп мы эту поверхность не видим.

Где работают астрономы

Научную работу астрономы ведут на обсерваториях и в астрономических институтах. В институтах занимаются преимущественно теоретическими исследованиями.

В дореволюционной России были основаны крупнейшие тогда в мире Пулковская обсерватория (1839) и ряд других обсерваторий, главным образом при университетах.

В советскую эпоху в нашей стране созданы Институт теоретической астрономии в Ленинграде, большие астрофизические обсерватории в Крыму, Армении, Грузии, новая астрономическая обсерватория близ Киева и ряд других обсерваторий. Скромная ранее Московская университетская обсерватория преобразована в Астрономический институт имени П. К. Штернберга при Московском государственном университете.

Много астрономических обсерваторий имеется и в других странах. Из них наиболее известны старейшие из существующих — Парижская и Гринвичская, от меридиана которой ведется счет географических долгот на земном шаре. Теперь Гринвичская обсерватория находится недалеко от Лондона, мешающего ночным наблюдениям неба. Самые крупные в мире телескопы установлены в Калифорнии (Соединенные Штаты Америки), на обсерваториях Маунт Паломар, Маунт Вилсон и Ликской, и на Крымской астрофизической обсерватории Академии наук СССР. Ликская обсерватория построена в конце XIX в., а остальные — уже в XX в.

Готовят астрономов в СССР в университетах на механико-математических и физико-математических факультетах.

Пятиметровый телескоп-рефлектор (Маунт Паломар, США).

По отечественным обсерваториям

В конце XIX — начале XX в. астрономические обсерватории в России были при восьми университетах (а всего их было десять). На них работали по два-три ученых, редко больше. Свою исследовательскую работу они вели наряду с учебными занятиями. Только одна Пулковская обсерватория под Петербургом имела в своем штате 10—15 астрономов, которые были заняты исключительно научной работой.

С установлением Советской власти в нашей стране началось бурное развитие науки, в частности и астрономии. Старые обсерватории стали расширяться и улучшаться, возник ряд новых астрономических учреждений.

Вероломное нападение фашистов на нашу Родину нанесло тяжелые раны и отечественной астрономии. Однако в короткий срок благодаря заботе партии и правительства о развитии науки и самоотверженному труду ученых разрушенные обсерватории были восстановлены и стали еще прекраснее и обширнее. Мощная оптическая промышленность обеспечила их первоклассными телескопами и другими астрономическими инструментами и приборами. Если раньше телескопы и всякие приспособления к ним приходилось заказывать за рубежом, теперь мы изготовляем все это не только для себя, но и для других стран.

Большое значение не только для отечественной, но и для мировой науки имеет то обстоятельство, что многие новые обсерватории построены на юге Советского Союза, где воздух прозрачнее, чаще бывает безоблачное небо, летом нет «белых ночей». С южных обсерваторий в течение года видна большая часть всего неба.

Известная во всем мире Пулковская обсерватория продолжает свои славные традиции по точнейшему определению положения звезд на небе и их движений. Для более полного охвата наблюдениями всего неба экспедиция обсерватории уже несколько лет ведет определение положений звезд в Чили (Южная Америка). Видное место в работе Пулковской обсерватории занимает также и изучение физической природы небесных тел, в особенности изучение Солнца. Здесь разрабатываются все отделы астрономии, в частности радиоастрономия.

Вместе с тем уже давно стали развиваться обсерватории с более узкими задачами, например для изучения радиоизлучения небесных светил.

Самая крупная астрофизическая обсерватория Советского Союза — Крымская. Кроме огромного телескопа с зеркалом диаметром 2,6 м там имеется рефлектор с зеркалом 1,25 м. Для непрерывного изучения Солнца установлены специальные башенные и другие телескопы. В них следят за разными явлениями на Солнце, фотографируют Солнце и его спектр, снимают кинофильмы. Особенно успешно изучали здесь вспышки горячих газов на Солнце. Эти вспышки и другие явления на Солнце объяснили существованием в солнечной атмосфере переменного магнитного поля. На Крымской обсерватории наблюдали выделение вулканических газов на Луне. Видное место в работе обсерватории занимает изучение блеска и цвета множества звезд и исследование на этой основе поглощения света и распределения звезд в пространстве. Многие работы ведутся при помощи точнейших электрофотометрических методов. Особенно интересно изучаются здесь спектры звезд. По ним определяется количественный химический состав звезд и строение их атмосфер.

Крымскую обсерваторию создал академик Г. А. Шайн. Со своими сотрудниками он открыл новым способом много газовых туманностей и изучил их формы и физическую природу. Телескоп обсерватории с зеркалом диаметром 2,6 м носит имя Г. А. Шайна.

По соседству с Крымской обсерваторией разместилось более скромное научное учреждение — Крымская станция Государственного астрономического института имени П. К. Штернберга. Так как этот институт находится в Москве на Ленинских горах и многие астрономические наблюдения в условиях большого города проводить невозможно, астрономы института приезжают вести наблюдения в Крым или на горную станцию вблизи Алма-Аты. На Крымской станции изучают инфракрасные спектры планет и звезд, звездные скопления, переменные звезды и звездные системы — галактики.

Изучением переменных звезд Московская обсерватория, ныне Институт имени П. К. Штернберга, прославилась уже давно. Не удивительно, что Институту имени П. К. Штернберга Международный астрономический союз уже много лет назад поручил ведение каталогизации переменных звезд. Переменных звезд известно уже тысячи, сведения о них ежегодно пополняются. Здесь изучают также движения звезд и структуру звездных скоплений и галактик, выпускают много разных каталогов.

На кафедре астрофизики института особенно больших успехов добился И. С. Шкловский в области анализа наблюдений, получаемых радиотелескопами. Например, им была предсказана возможность обнаружения радиоизлучения нейтрального водорода, объяснена причина аномального радиоизлучения некоторых небесных тел.

В отделе планет института по фотографиям обратной стороны Луны, полученным советской межпла-

Главная астрономическая обсерватория в Пулкове, одна из старейших в стране.

нетной автоматической станцией, созданы первый глобус Луны и подробная ее карта. На кафедре небесной механики изучается, в частности, теория движения искусственных небесных тел; здесь есть счетная станция с электронными машинами. Мощная современная вычислительная станция имеется и в Ленинграде в Институте теоретической астрономии, где изучают траектории искусственных спутников Земли, а также ведут важнейшую работу по составлению астрономических ежегодников (календарей), по вычислению орбит небесных тел и разрабатывают методы небесной механики.

На лесистом горном хребте над курортом Абастумани расположилась большая обсерватория Грузинской академии наук. Здесь благодаря заботам ее основателя Е. К. Харадзе установлены самый крупный — диаметром 70 см — менисковый телескоп, рефрактор диаметром 40 см и другие приборы. Эта обсерватория астрофизическая. На ней изучают Солнце, исследуют поглощение света в пространстве и ведут массовую классификацию звездных спектров.

Армянская академия наук после войны построила мощную Бюраканскую звездно-астрономическую обсерваторию вблизи Еревана. Ее основатель и директор — один из крупнейших астрофизиков мира академик В. А. Амбарцумян — создал в СССР первую школу теоретической астрофизики. В. А. Амбарцумян впервые выяснил многие законы свечения газовых туманностей, создал теорию прохождения света в мутных средах и др. За последние годы особое внимание ученых привлекли его исследования происхождения и развития звезд и звездных систем. В. А. Амбарцумян обнаружил рассеянные группы звезд, имеющих сходную физическую природу. Он назвал их *ассоциациями*. Ученый считает, что это молодые, сравнительно недавно возникшие звезды. Таким образом, оказалось, что звезды непрерывно образуются и в наше время. В. А. Амбарцумян считает, что звезды возникают из еще неизвестного нам сверхплотного, дозвездного вещества путем его дробления. Он защищает гипотезу, что и гигантские звездные системы — галактики — также образуются путем дробления сверхплотного вещества, при этом возникают группы галактик, разлетающихся во все стороны с большой скоростью. Анализ этих воззрений и их проверка являются одной из актуальнейших проблем современной астрономии.

В предгорьях Тянь-Шаня, спускающихся к Алма-Ате, раскинулась построенная после войны обсерватория Казахской академии наук. Она основана

Государственный астрономический институт имени П. К. Штернберга при Московском государственном университете.

Бюраканская астрофизическая обсерватория, Армянская ССР.

Абастуманская астрофизическая обсерватория, Грузинская ССР.

Алма-Атинский астрофизический институт, Казахская ССР.

академиком В. Г. Фесенковым. На ней установлен первый большой менисковый телескоп. С его помощью составлен прекрасный атлас газовых и пылевых туманностей в полосе Млечного Пути. В. Г. Фесенков широко известен работами во многих областях астрономии: он изучал зодиакальный свет, падение Сихотэ-Алинского метеорита, отражение света Луной, движения и цвет звезд. Он первый в нашей стране разрабатывал вопросы происхождения Солнечной системы, рассеяния света в земной атмосфере и многие другие.

Две обсерватории есть в Киеве: старая — университетская и новая — Украинской академии наук. На первой из них С. К. Всехсвятский доказал быстрое истощение комет с коротким периодом обращения и изучил изменение блеска многих из них. Он полагает, что кометы возникают путем вулканических извержений с поверхности планет-гигантов или их спутников. С. К. Всехсвятский — ученик известного астронома С. В. Орлова, преемника знаменитого Ф. А. Бредихина в области изучения комет. Трудами С. В. Орлова завершилась разработка теории, объясняющей формы комет законами механики. Теперь эта теория развивается дальше уже на физической основе.

Молодая обсерватория Академии наук Украинской ССР ведет работы по определению положений, блеска и цвета светил при помощи фотографии. Ее основал А. Я. Орлов, известный своими исследованиями колебаний земной оси, приливов в твердом теле Земли и изучением силы тяжести.

В последние годы благодаря заботам В. П. Цесевича широко развернула работу Одесская университетская обсерватория. В ней ведутся обширные работы по исследованию переменных звезд и метеоров. Таков же профиль работы обсерватории в Душанбе (Таджикская ССР).

Переменными звездами довольно много занималась в прошлом и университетская обсерватория имени В. П. Энгельгардта под Казанью. Д. Я. Мартынов изучил на ней ряд особенно интересных звезд, периодически затмевающих одна другую. Там же систематически следят за всеми новооткрытыми кометами и изучают покачивание Луны вокруг ее оси (либрацию).

Ташкентская обсерватория сравнительно старая. Она известна больше всего изучением движений звезд в скоплениях, исследованиями Солнца и переменных звезд.

Менее крупные, но в настоящее время быстро растущие обсерватории имеются в Тарту, Риге, Вильнюсе, Ростове-на-Дону, Харькове, в районе Новосибирска, в Свердловске, Николаеве, под Кисловодском и в других местах. Создана новая большая обсерватория на горе Пиркули в районе Шемахи (Азербайджанская ССР).

В кратком обзоре невозможно дать полное представление о большой и интересной работе советских обсерваторий и ученых. Но и из всего изложенного выше видно, как велика сеть наших отечественных обсерваторий и какую разнообразную работу они ведут.

Шемахинская астрофизическая обсерватория на горе Пиркули, Азербайджанская ССР.

Солнечная башня Крымской астрофизической обсерватории.

Династия астрономов

Выдающийся русский астроном и геодезист академик Василий Яковлевич Струве (1793—1864) был родоначальником целой династии астрономов.

Сын его Отто Васильевич (1819—1905) был, так же как и отец, директором Пулковской обсерватории и выдающимся исследователем двойных звезд. Он открыл свыше 500 двойных звезд, наблюдал планеты и их спутники, кометы и туманности.

Сыновья Отто Васильевича Струве — Герман Оттович (1854—1920) — астроном Пулковской обсерватории, а потом директор обсерваторий в Кенигсберге (ныне Калининград) и в Берлине и Людвиг Оттович (1858—1920) — профессор астрономии и директор обсерватории Харьковского университета.

Герман Оттович Струве был крупным ученым в области астрометрии, наблюдений больших планет и их спутников. Людвиг Оттович Струве занимался главным образом изучением движений звезд.

Сын Германа Оттовича Струве и правнук Василия Яковлевича Струве — Георг Струве — также был астрономом. Он работал в Германии.

Сын Людвига Оттовича Струве и правнук Василия Яковлевича Струве — Отто Людвигович (1897—1963) — учился в Харькове, потом работал в США и стал одним из крупнейших астрофизиков нашего времени.

Потомки Василия Яковлевича Струве работали и работают и в других областях научной и практической деятельности.

Правнук его академик Василий Васильевич Струве был выдающимся советским ученым в области истории Древнего Востока.

Что мы знаем о Вселенной

Звездное небо

Звезд на небе невооруженным глазом видно так много, что кажется, их и не сосчитать. Однако звезд, которые видны невооруженным глазом, всего около 6000.

Нетрудно заметить, что звезды различны по видимой яркости, или, как говорят астрономы, по блеску. Наиболее яркие из них назвали звездами 1-й звездной величины («звездная величина» характеризует не размеры, а только блеск звезд). Звездами 2-й звездной величины считают те, которые в 2,5 (точнее в 2,512) раза слабее по блеску звезд 1-й величины. К 3-й звездной величине отнесли звезды, которые в 2,5 раза слабее звезд 2-й величины, и т. д. Самые слабые по блеску из доступных невооруженному глазу причислены к звездам 6-й звездной величины — они слабее звезд 1-й звездной величины в 100 раз.

Всего на небе видно 22 звезды 1-й звездной величины. Но их блеск не одинаков: одни из них несколько ярче 1-й величины, другие слабее. Также обстоит дело и со звездами 2-й, 3-й и последующих величин. Поэтому для точного обозначения блеска той или иной звезды приходится прибегать к дробям. Так, например, звезды, находящиеся по блеску посредине между звездами 1-й и 2-й величины, считают звездами 1,5 звездной величины. Есть и такие, которые имеют звездные величины 1,6; 2,3; 3,4; 5,6 и т. д.

Из 22 звезд 1-й величины выделяется несколько особенно ярких. Для точного обозначения их блеска ввели нулевую и отрицательные звездные величины. Самая яркая звезда северного полушария неба Вега имеет блеск 0,1 звездной величины, а самая яркая звезда всего неба Сириус — минус 1,6 звездной величины.

В оптические приборы можно увидеть много слабых звезд, недоступных невооруженному глазу. В обычный театральный бинокль видны звезды до 7-й, а в призменный полевой бинокль — до 8—9-й звездной величины. В сравнительно небольшой телескоп (с диаметром объектива 80 мм) можно наблюдать звезды до 11-й звездной величины, в более мощные современные телескопы — до 18-й звездной величины. На фотографиях, снятых при помощи крупнейших телескопов, различают звезды до 22—23-й звездной величины. По блеску они в 6 млн. раз слабее самых слабосветящихся звезд, видимых невооруженным глазом.

Еще в древности наблюдатели разделили все небо на участки — *созвездия*, каждое из которых характеризуется своеобразным узором входящих в него (ярких) звезд. В настоящее время небо разделено на 88 созвездий. Созвездия были выделены по призна-

Старинный звездный глобус с изображением фигур созвездий.

Небесный глобус 1564 г.

ку видимой близости звезд, но эта близость — явление кажущееся. В действительности звезды одного и того же созвездия могут быть удалены от нас на различные расстояния.

Звезды движутся в мировом пространстве. Но они находятся на огромных расстояниях от нас, и их перемещения на небе — собственные движения звезд — незаметны для глаза. Поэтому люди из поколения в поколение видят одни и те же созвездия — взаимное расположение звезд в них остается почти неизменным.

Интересно созвездие Большой Медведицы. По расположению семи наиболее ярких звезд оно напоминает ковш или кастрюлю. Большую Медведицу легко отыскать на небе, только в разное время ночи и в разное время года это созвездие видно то низко над горизонтом (в начале вечера осенью), то высоко (летом), то в восточной стороне небосвода (весной), то в западной (в конце лета). По Большой Медведице можно найти Полярную звезду, проведя для этого через две крайние звезды ковша воображаемую прямую. Она-то и укажет Полярную звезду. Под Полярной звездой на горизонте всегда находится *точка севера*. Когда вы смотрите на Полярную звезду, лицо ваше обращено к северу, за спиной будет юг, направо — восток, налево — запад. Отправляясь от созвездия Большой Медведицы, можно отыскать не только точку севера, но и разные созвездия. Ориентируясь на уже знакомые очертания Большой Медведицы, легче разобраться в окружающих звездных «узорах».

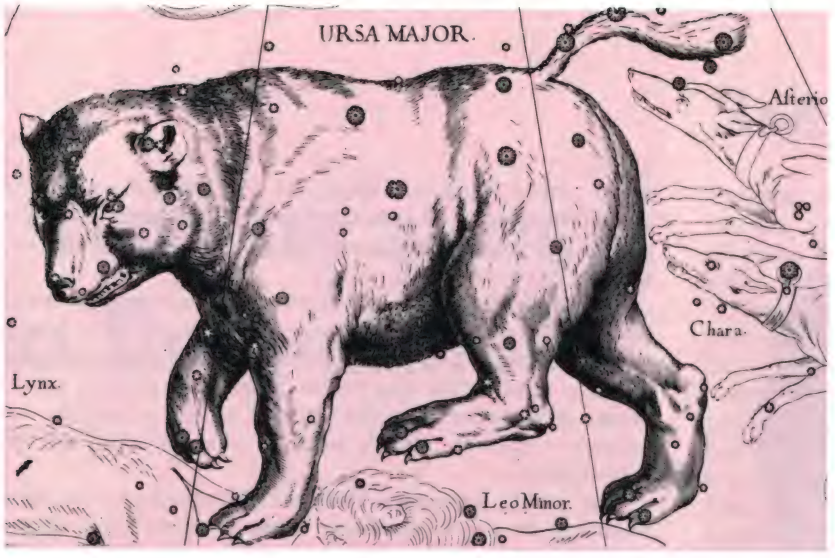
В каждом созвездии яркие звезды обычно обозначаются буквами греческого алфавита. Например, Полярная звезда — альфа Малой Медведицы. Иногда прибегают к числовым обозначениям звезд: такова, например, звезда 61 из созвездия Лебедя. Наиболее яркие звезды с древних времен называют собственными именами: Сириус, Вега и др.

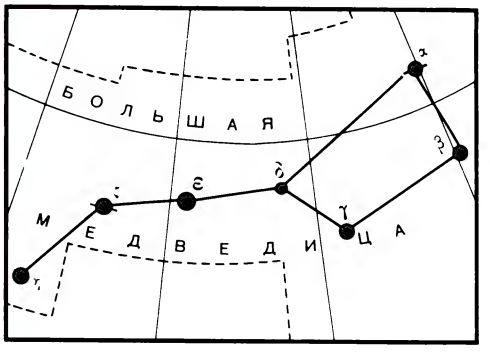
Откуда взялись названия созвездий

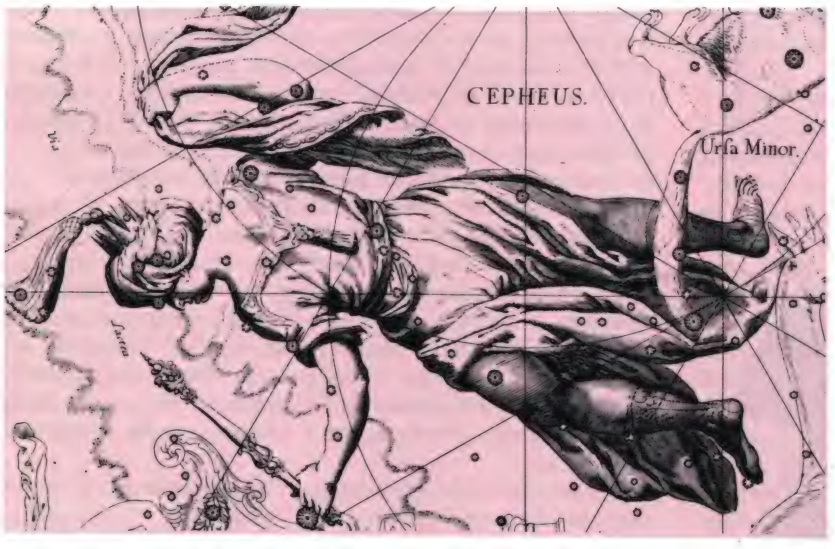
Фантазия древних наблюдателей помогла им в расположении отдельных групп звезд увидеть очертания сказочных героев или животных. Почти с каждым созвездием связаны какая-нибудь древняя легенда или миф.

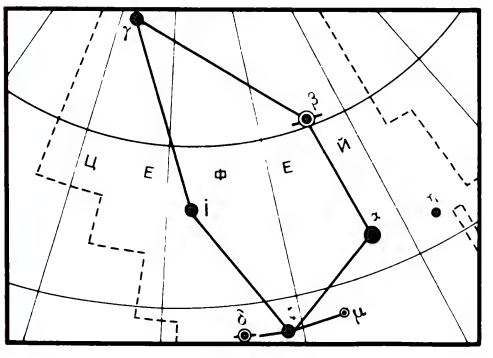
Одна из древнегреческих легенд рассказывает, как всемогущий бог Зевс взял себе в жены прекраснейшую нимфу Каллисто. Чтобы избавить Каллисто от

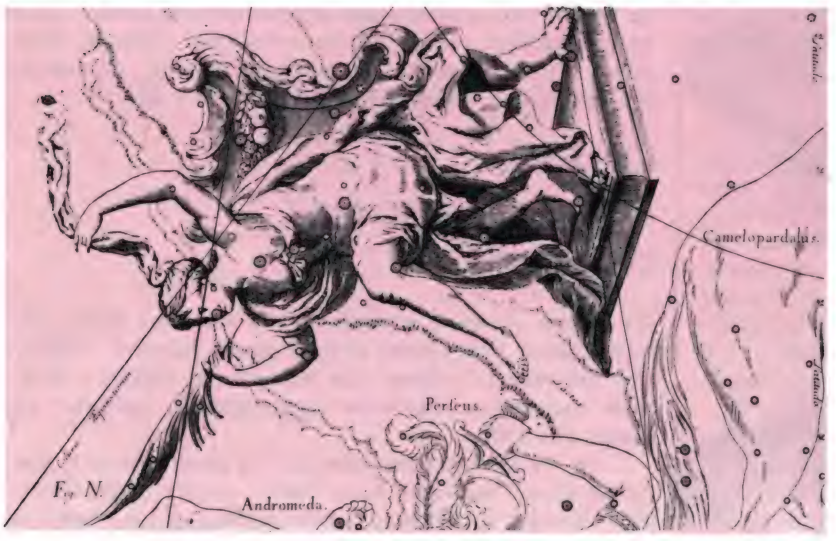
Некоторые созвездия звездного неба, доступные для наблюдения в СССР. Справа показаны созвездия, взятые с карты звездного неба. Так мы видим их на небе.

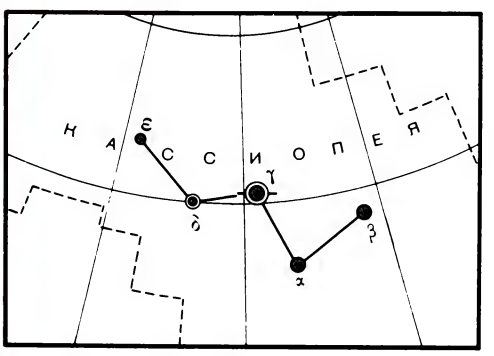




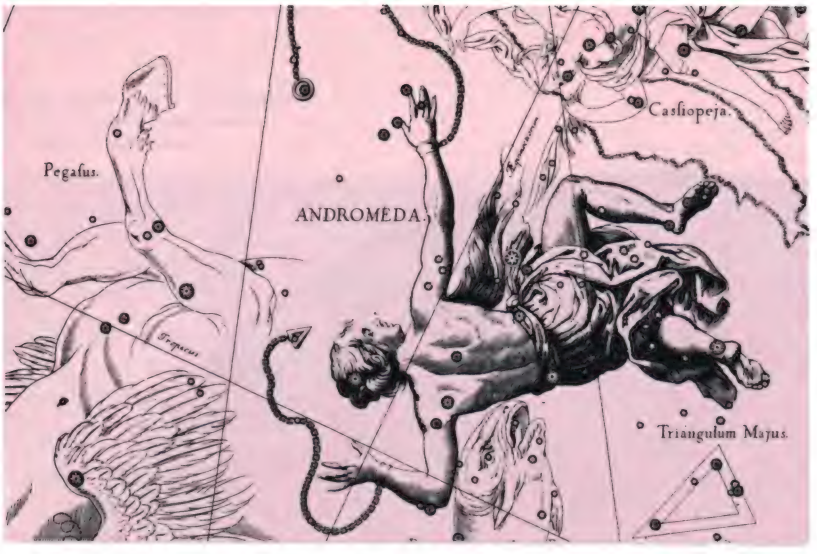


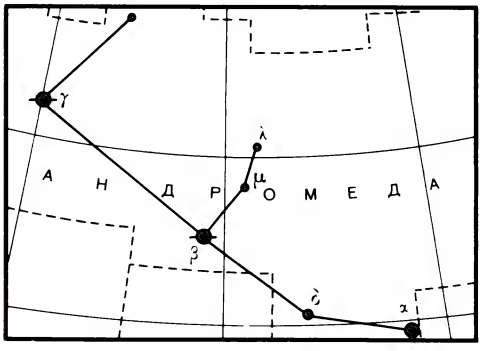


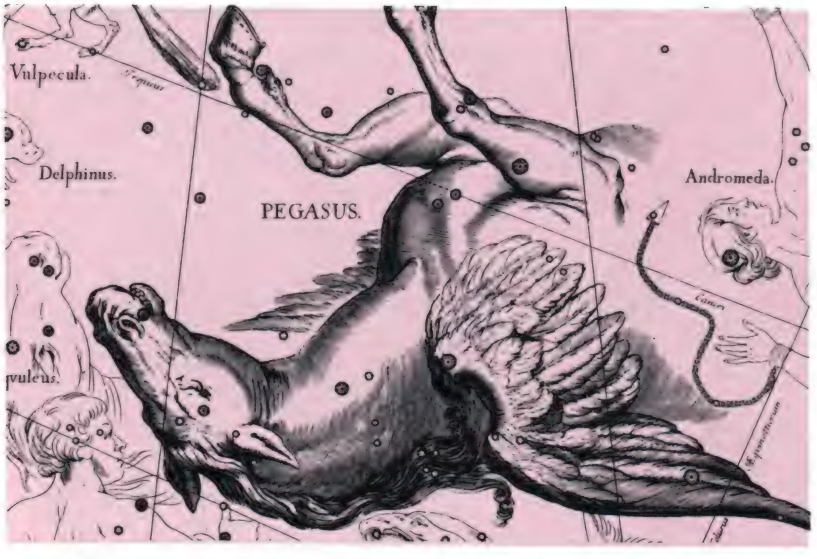


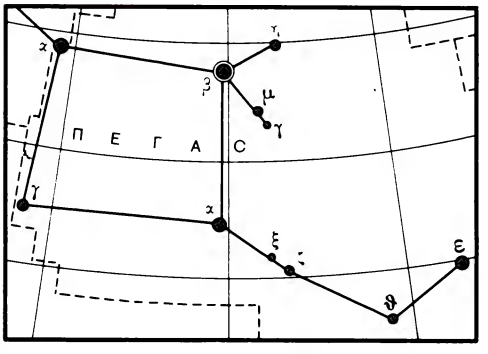


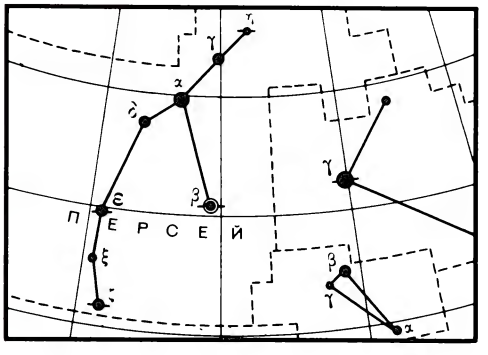
Слева — фигуры тех же созвездий, сфотографированные со старинного звездного глобуса, поэтому главные звезды их расположены иначе.



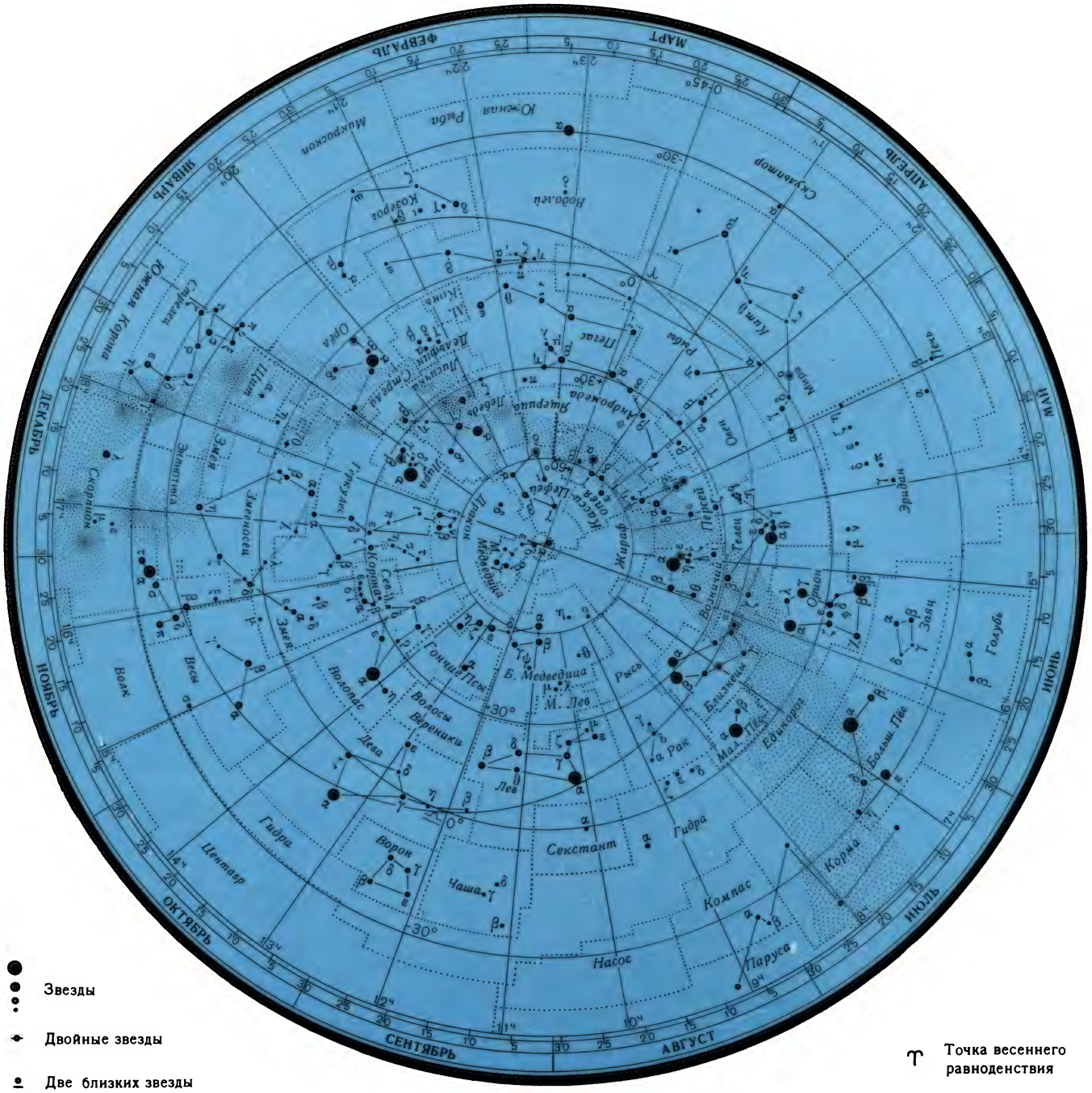








Карта звездного неба, доступного для наблюдения в СССР.



Звезды

Двойные звезды

Две близких звезды

Переменные звезды

Звездные скопления

Туманности

Точка весеннего равноденствия

Точка осеннего равноденствия

М. Конь — Границы созвездий и их названия

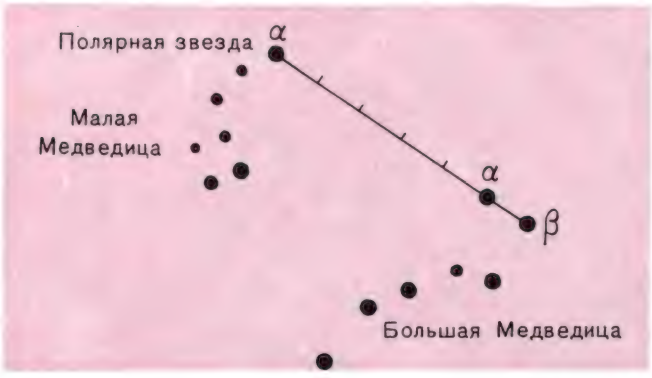
Старинная карта звездного неба с изображением фигур созвездий.

преследований ревнивой Геры, Зевс обратил Каллисто в медведицу и взял к себе на небо. Отсюда — на небе Большая Медведица. Вместе с Каллисто Зевс обратил в медведицу ее любимую собаку. Это Малая Медведица.

О созвездиях Кассиопеи, Цефея, Андромеды, Пегаса и Персея сложилась другая легенда. Когда-то, в незапамятные времена, у мифического царя эфиопов Цефея была красавица жена царица Кассиопея. Однажды Кассиопея имела неосторожность похвастать красотой своей дочери Андромеды в присутствии нереид — мифических жительниц моря. Завистливые нереиды пожаловались богу моря Посейдону, и он напустил на берега Эфиопии страшное чудовище, пожиравшее людей. Цефей, по совету оракула, вынужден был отдать на съедение чудовищу свою любимую дочь Андромеду. Он приковал ее к прибрежной скале, и каждую минуту Андромеда ожидала гибели. Но Андромеду спас герой Персей, прилетевший на крылатом коне Пегасе. Главных участников этого мифа фантазия древних греков поместила на небо. Так появились созвездия Цефея, Кассиопеи, Андромеды, Пегаса, Персея.

Вверху — фотография движения звезд вокруг Полярной звезды.

Внизу — способ нахождения Полярной звезды.



Звездное небо вращается

Днем по небосводу движется Солнце. Оно восходит, поднимается все выше и выше, потом начинает опускаться и заходит.

Звезды тоже перемещаются по небосводу. В этом нетрудно убедиться. Выберите для наблюдения место, откуда небо хорошо видно, и заметьте, над какими предметами (домами или деревьями) на горизонте Солнце видно утром, в полдень и вечером. С этого же места после захода Солнца отыщите наиболее яркие звезды (ориентируясь на те же предметы). Время наблюдения отметьте по часам. Если вы придете на то же место через час-два, то убедитесь, что все замеченные вами звезды переместились слева направо.

Все ли звезды движутся по небосводу? Оказывается, все, и притом одновременно. Можно сказать, что все небо со звездами как бы вращается вокруг нас.

Но есть и такая звезда, передвижение которой в течение всей ночи почти незаметно, и чем ближе к ней другие звезды, тем менее заметно их движение. Эту звезду назвали Полярной, и мы уже знаем, как ее найти. Когда мы смотрим на Полярную звезду, точнее, на неподвижную точку рядом с ней — *северный полюс мира,* направление нашего взгляда совпадает с направлением оси вращения звездного неба. Ее называют *осью мира.*

Вращение неба вокруг Земли — явление кажущееся. Оно объясняется вращением Земли. Подобно тому как человеку, кружащемуся по комнате, представляется, что кружится вся комната, нам, находящимся на вращающейся Земле, кажется, что вращается небо.

Воображаемая ось, вокруг которой вращается земной шар, пересекает поверхность Земли в двух точках. Эти точки — *Северный* и *Южный* географические полюсы. Если продолжить земную ось, она пройдет вблизи Полярной звезды. Вот почему Полярная звезда кажется наблюдателю почти неподвижной.

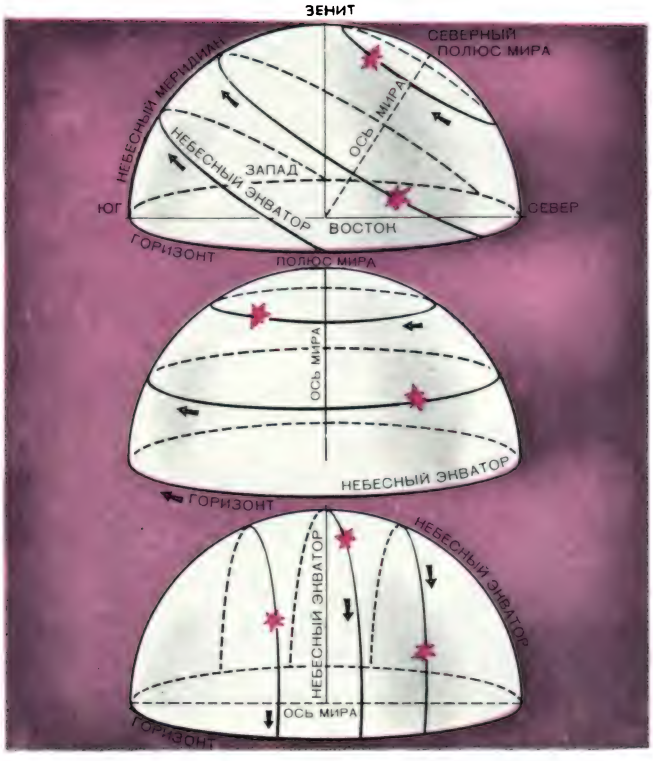
На южном звездном небе, которое в нашем Северном полушарии вследствие шарообразной формы Земли видно лишь частично, находится вторая неподвижная точка неба — *южный полюс мира.* Вокруг этой точки вращаются звезды, находящиеся в Южном полушарии.

Но вернемся к кажущемуся суточному движению звезд. Повернитесь лицом к южной стороне горизонта и наблюдайте за движением звезд. Для удобства представьте себе полуокружность, которая проходит через *зенит* (точка прямо над головой) и *полюс мира.* Эта полуокружность — *небесный меридиан* — пересечется с горизонтом в точке севера (под Полярной звездой) и в противоположной ей точке юга. Она делит небосвод на восточную и западную половины.

В южной части неба мы заметим, что звезды, расположенные слева от небесного меридиана (в восточной части неба), поднимаются над горизонтом. Пройдя через небесный меридиан в западную часть неба, они начинают опускаться к горизонту. Значит, когда звезды проходят через небесный меридиан, они достигают наибольшей высоты над горизонтом. Это прохождение звезды через небесный меридиан астрономы называют *верхней кульминацией* данной звезды.

Теперь поведем наблюдение в северной части неба. Здесь звезды, проходящие через небесный меридиан ниже Полярной звезды, занимают наиболее низкое положение над горизонтом, как говорят астрономы, находятся в *нижней кульминации.* Двигаясь слева направо, они, пройдя небесный меридиан, начинают подниматься.

Сверху вниз: схема видимого движения звезд относительно горизонта для наблюдателя в средних широтах; для наблюдателя на полюсе Земли; для наблюдателя на экваторе Земли.



Среди созвездий, видимых в нашей стране, есть такие, которые, двигаясь вокруг полюса мира, никогда не заходят за горизонт. Понаблюдайте в зимние месяцы за созвездием Большой Медведицы — оно все время видно над горизонтом.

Но Большая Медведица в этом смысле не исключение для жителей СССР.

Звезды Малой Медведицы, Кассиопеи, Дракона, Цефея, близко расположенные к северному полюсу мира, никогда не заходят, например, за московский горизонт. Их так и называют *незаходящие* звезды.

А есть звезды, которые никогда не восходят над нашей страной. Это многие звезды южного полушария неба.

Небо, как и земной шар, мысленно делится на два полушария воображаемой окружностью — *небесным экватором*. Небесный экватор пересекает линию горизонта в точках востока и запада, все его точки находятся от полюсов мира на одинаковом расстоянии.

Все звезды в течение суток проходят пути, параллельные небесному экватору.

Полушарие неба, в котором находится Полярная звезда, называют *северным*, а другое полушарие — *южным*.

Звездное небо в разных местах Земли

В разных местах земного шара созвездия относительно горизонта расположены по-разному. Это зависит от того, на какой параллели находится наблюдатель, другими словами, какова географическая широта места наблюдения. А ее определить нетрудно: высота полюса мира (или, приближенно, Полярной звезды) над горизонтом всегда равна географической широте места.

Если бы вы отправились из Москвы на Северный полюс и по пути наблюдали небо, то очень легко заметили бы, что Полярная звезда (или полюс мира) поднимается все выше и выше над горизонтом. Поэтому все больше и больше звезд оказываются незаходящими.

На самом Северном полюсе звезды расположены совсем не так, как на московском небе.

Географическая широта Северного полюса земного шара равна 90°. Значит, полюс мира (и Полярная звезда) будет находиться прямо над головой — в зените. Небесный экватор здесь совпадает с линией горизонта, поэтому звезды на Северном полюсе движутся необычно — параллельно горизонту, перемещаясь всегда по путям, параллельным небесному экватору.

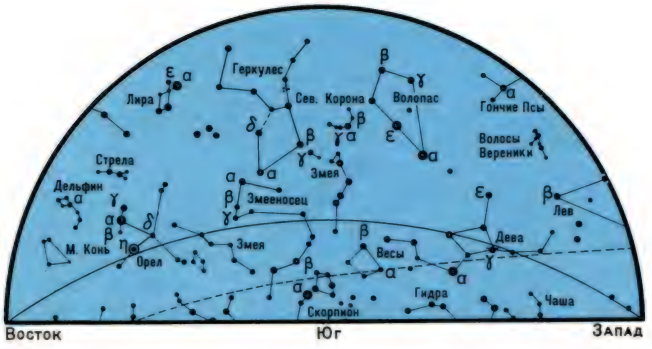
Все звезды северного полушария неба на Северном полюсе будут *незаходящими*, а южного — *невосходящими*.

Совершенно иная картина будет наблюдаться по мере продвижения на юг. Чем южнее, тем меньше широта места и, следовательно, высота полюса мира (и Полярной звезды), т. е. Полярная звезда приближается к горизонту.

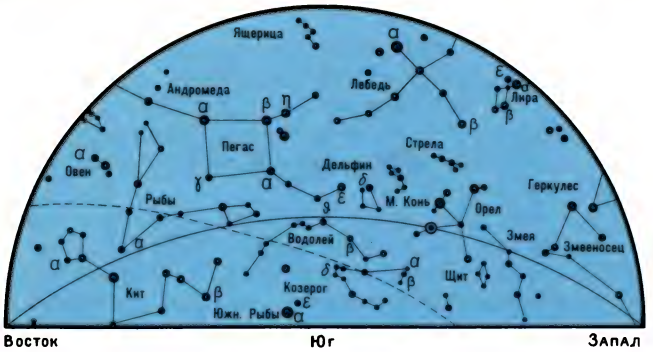
На земном экваторе (географическая широта любой его точки равна нулю) северный полюс мира будет в точке севера, а небесный экватор перпендикулярен к горизонту и пройдет через зенит. В точке юга окажется южный полюс мира, расположенный в созвездии Октанта.

Все звезды на земном экваторе в течение суток описывают пути, перпендикулярные к горизонту. Если бы не было Солнца, из-за которого нельзя видеть звезды днем, то в течение суток на земном экваторе можно было бы наблюдать все звезды обоих полушарий неба.

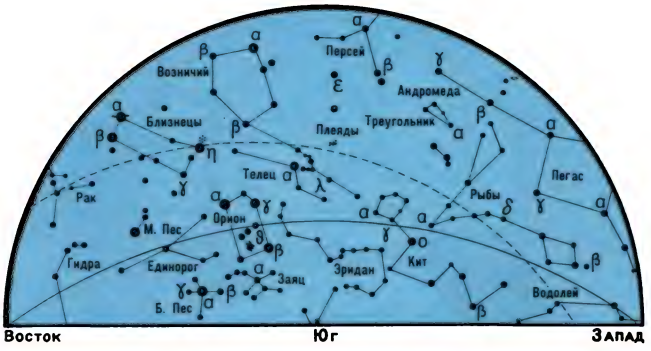
Вверху слева — созвездия, видимые в средних широтах в южной половине неба летом.



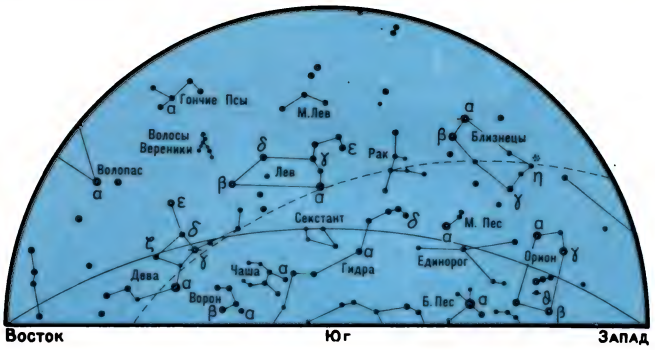
Внизу слева — созвездия, видимые в средних широтах в южной половине неба осенью.



Вверху справа — созвездия, видимые в средних широтах в южной половине неба зимой.



Внизу справа — созвездия, видимые в средних широтах в южной половине неба весной.



Как меняется вид звездного неба

В разные времена года по вечерам можно наблюдать разные созвездия. Почему так?

Чтобы разобраться, проведем некоторые наблюдения. Вскоре после захода Солнца заметим в западной части неба низко над горизонтом какую-нибудь звезду и запомним ее положение относительно горизонта. Если, скажем, через неделю в то же время суток вы попробуете отыскать эту звезду, то увидите, что она стала ближе к горизонту и почти скрывается в лучах вечерней зари. А произошло это потому, что Солнце приблизилось к данной звезде. Еще через несколько недель звезда совершенно скроется в солнечных лучах и вы не сможете наблюдать ее по вечерам. Пройдет еще две-три недели, и та же самая звезда станет видна по утрам, незадолго до восхода Солнца, в восточной части неба. Теперь уже Солнце, продолжая свое движение с запада на восток, окажется восточнее этой звезды.

Такие наблюдения показывают, что Солнце не только движется вместе со звездами, в течение суток восходя на востоке и заходя на западе, но еще и медленно перемещается из созвездия в созвездие в обратном направлении — с запада на восток.

Разумеется, созвездие, в котором в данный момент находится Солнце, вы наблюдать не сможете, ведь оно восходит вместе с Солнцем и движется по небу днем, когда звезды не видны. Солнце своими лучами «гасит» звезды и всех соседних созвездий.

Видимый путь Солнца в течение года на фоне звезд называется *эклиптикой*. Он проходит по двенадцати *зодиакальным созвездиям*. («Зодиак» в переводе с греческого означает «пояс зверей».) В каждом из них Солнце ежегодно бывает приблизительно месяц. Зодиакальные созвездия следующие: Рыбы (Солнце бывает в нем в марте), Овен (в апреле), Телец (в мае), Близнецы (в июне), Рак (в июле), Лев (в августе), Дева (в сентябре), Весы (в октябре), Скорпион (в ноябре), Стрелец (в декабре), Козерог (в январе), Водолей (в феврале).

Годичное движение Солнца на фоне звезд кажущееся. На самом деле вместе с Землей вокруг Солнца движется наблюдатель. Если в течение года по вечерам наблюдать звезды, можно заметить постепенное изменение звездного неба и познакомиться со всеми созвездиями, доступными наблюдению в данном месте Земли.

Луна

Первый человек на Луне.

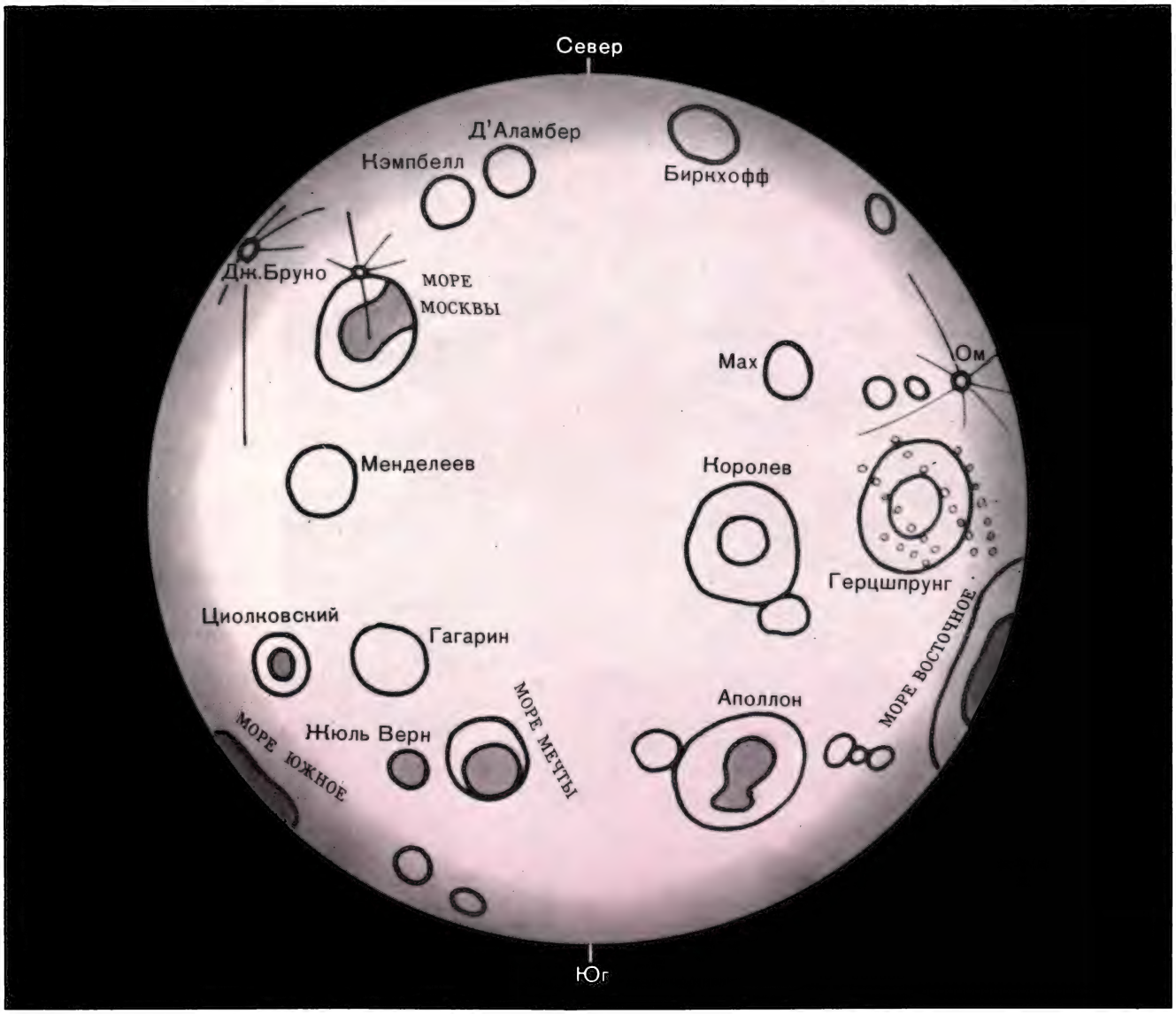
Схематическая карта видимой стороны Луны.

Если следить за Луной невооруженным глазом...

Луна — ближайшее к нам небесное тело, природный спутник Земли. Наблюдения показали, что Луна постепенно изменяет свой вид от полного диска до узкого серпа и наоборот, причем форма, или фазы, Луны меняется в строгой очередности.

Основные фазы Луны — новолуние, первая четверть, полнолуние и последняя четверть (см. рис. на стр. 69). Когда Луна находится между Землей и Солнцем, она не видна, потому что в это время она восходит и заходит вместе с Солнцем и, двигаясь по ярко освещенному дневному небу, обращена к нам неосвещенной стороной. Это фаза *новолуния*, или «рождения», Луны. Через 1—2 сут после новолуния Луна уже короткое время видна вечерами на заре в виде узенького «молодого» серпика, обращенного своей выпуклостью к Солнцу. Через 7,38 сут освещена уже половина ее диска. Эта фаза — *первая*

Схематическая карта обратной стороны Луны.



четверть. В это время Луна восходит около полудня и к 18 ч достигает наивысшего положения на небе в южной стороне небосклона.

Через 14,77 сут после новолуния наступает *полнолуние*, когда мы видим освещенным весь диск Луны. В это время она восходит с вечера и выше всего на небе бывает около полуночи. После полнолуния освещенная часть Луны начинает убывать и через 22,15 сут видна только половина диска: наступает фаза *последняя четверть*. В этот период Луна восходит в полночь и видна хорошо по утрам. А еще через неделю наступает новолуние. Время между двумя очередными новолуниями или просто между одинаковыми фазами называется *синодическим* месяцем, т. е. периодом полной смены лунных фаз. Он равен в среднем 29,53 сут.

Если проследить движение Луны среди созвездий, то можно заметить, что она приходит в одно и то же место раньше, чем заканчивается полная смена ее фаз. На полный обход неба Луна тратит 27,32 сут. Это время называется *сидерическим* (звездным) месяцем. За сидерический месяц Луна делает полный оборот вокруг Земли и одновременно вокруг своей оси по отношению к Солнцу. В новолуние,

Лунные кратеры.

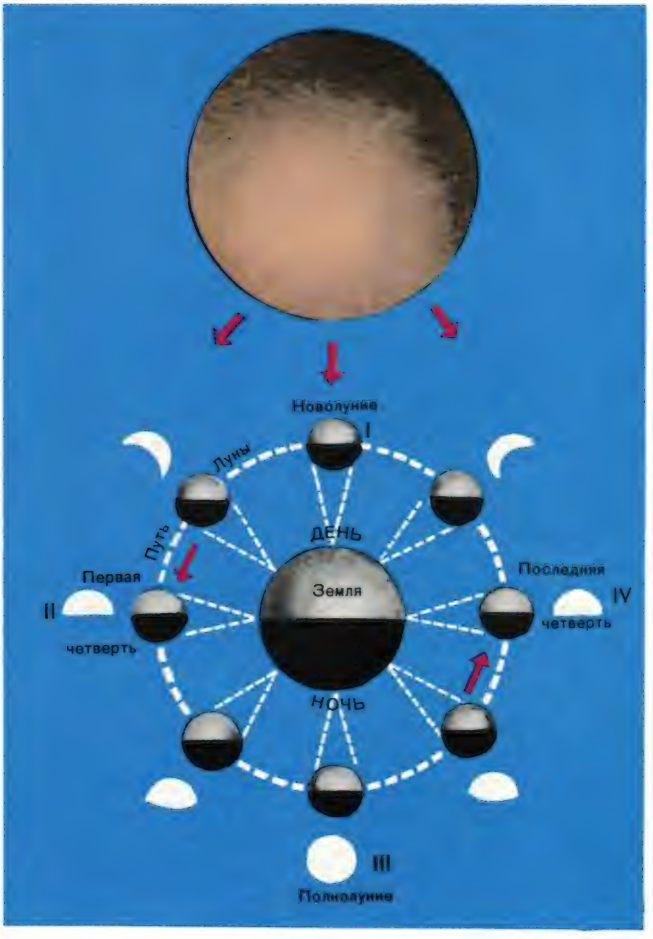
находясь между Землей и Солнцем, Луна повернута к нему той стороной, которую мы никогда не видим, а в полнолуние к Солнцу повернута та сторона Луны, которую видим и мы. Значит, по отношению к Солнцу Луна вращается.

Орбита Луны представляет собой эллипс, в одном из фокусов которого находится Земля. Среднее расстояние между центрами Луны и Земли составляет 384 400 км. Теперь это расстояние выверено новейшими способами (по изучению траекторий приборов, посылаемых к Луне, и радиолокацией) с точностью до одного километра. При помощи лазерной локации оно может быть измерено с точностью до десятка метров. В течение своего движения по орбите расстояние Луны до Земли изменяется в пределах от 356 до 406 тыс. км. Орбита Луны наклонена на 5°9 к земной орбите.

Мы знаем, что Луна обращена к Земле всегда одним и тем же полушарием, так как период вращения Луны вокруг своей оси и период обращения ее вокруг Земли одинаковы. Но благодаря наклону орбиты она поднимается выше или опускается ниже плоскости земной орбиты, и мы можем немного «заглянуть» за ее северный и южный края. Кроме того, видимое полушарие Луны смотрит точно в центр эллипса лунной орбиты, а Земля находится не в центре, а в фокусе эллипса, и благодаря этому наш спутник показывает нам немного то правый, то левый бок. Нам кажется, что Луна покачивается в пространстве. Это явление видимого покачивания Луны называется *либрацией*.

Главное влияние на Луну, на ее форму и орбиту оказывает Земля. Ведь именно ее притяжение остановило свободное вращение спутника, и Луна ока-

Фазы Луны. Вид Луны изменяется потому, что во время движения Луны вокруг Земли меняются условия освещения Луны.



залась навеки повернутой к Земле одной и той же стороной. В свою очередь, неодинаковое притяжение Луной близких к ней и более от нее далеких частей Земли вызывает приливы и отливы в океанах и твердой коре.

Но кроме Земли на орбиту Луны оказывает значительное влияние и далекое, но очень мощное по силе тяготения Солнце, а в некоторой степени влияют Венера, Марс, Юпитер и Сатурн. Все это вместе заставляет Луну непрерывно изменять в некоторых пределах форму эллипса, по которому она обращается вокруг Земли.

Поверхность Луны, видимая в телескоп

Когда смотрят на Луну невооруженным глазом, то легко различают на ней темные пятна. Все вместе они, по мнению людей, не лишенных фантазии, напоминают человеческое лицо или фигуры зверей. Когда впервые стали наблюдать Луну в телескоп, то увидели, что темные пятна — это большие низменные равнины, их назвали *морями,* предполагая, что в них есть вода. Светлые области, получившие название *материков,* оказались более гористыми участками.

Лунные горы в подавляющем большинстве имеют кольцевые формы. Они напоминают круглые чаши, их назвали *кратерами* (по-гречески «чаша» — кратер), наибольшие из них называют *цирками.*

При составлении лунных карт «моря» и крупные кратеры получили собственные имена. Так появились Океан Бурь, Море Дождей, Море Ясности, Море Изобилия и т. д., а кратерам дали имена крупных ученых и астрономов. Так, один из кратеров называется Коперник, другой — Кеплер, третий — Ньютон и т. д.

Чтобы иметь представление о типичном крупном кратере, посмотрим на фотографию кратера Коперник, расположенного в Океане Бурь (стр. 70). Кратер имеет кольцевой, точнее многоугольный, вал уступчатого строения. Он особенно хорошо виден в телескоп и на снимке, когда освещен низким Солнцем, заходящим или восходящим над районом кратера. По длине отбрасываемой валом тени вычисляют высоту вала и глубину кратера. В центре кратера находится несколько горок (у других кратеров — одна или ни одной), высота горок меньше высоты вала. В действительности его склоны очень пологие, и только длинные тени при низком Солнце или необычный ракурс при фотографировании с автоматической межпланетной станции создают преувеличенное впечатление о головокружительной гористости этого района.

Другие кратеры имеют более круглые и гладкие валы. Чем больше кратер, тем глубже его чаша и выше вал. У кратеров диаметром в десяток километров вал уже так невысок, что они похожи на лунки. Малые кратеры встречаются чаще: вдвое меньших по диаметру обычно вчетверо больше. С Земли даже в лучшие телескопы кратеры диаметром 1—3 км видны плохо и только в исключительных случаях можно различить кратеры диаметром 0,7 км.

Примерно 16% всей лунной поверхности занято «морями». Число кратеров на «морях» примерно в 15 раз меньше, чем на материковых участках такой же площади. Берега большинства «морей» представляют собой гористые обрывы. У крупнейшего темного пятна на Луне — Океана Бурь наиболее пест-

Кратер Коперник.

рый по формам рельефа характер: здесь и светлые «островки», и широкие языки — «полуострова», и много кратеров. Большинство остальных лунных «морей» имеют овальную форму, только два-три неправильной формы. По дну овальных «морей» тянутся невысокие валы — прожилки высотой в несколько десятков метров, видимые только тогда, когда их освещает низкое Солнце. Горы, вернее их длинные тени, отчетливо видны на Луне только вблизи границы, разделяющей освещенную и неосвещенную части лунного шара (она называется *терминатором*). Там же, где Солнце поднимается над линией горизонта на 15—20°, все тени уже исчезают, так как склоны гор, выглядевшие при низком Солнце головокружительными кручами, в действительности очень пологие: их уклоны не более 15—20°. На остальной части освещенной Луны можно различить только световые контрасты темных «морей» и светлых колец кратеров, светлые лучи вокруг некоторых из них.

Много светлых, поразительно длинных лучей радиально расходятся от кратера Тихо, расположенного на материке. Самые протяженные из них, достигающие около 1800 км, пересекают даже далекие от кратера «моря». Лучевые системы имеют еще несколько кратеров, среди них — Коперник. Несколько кратеров светятся в полнолуние как очень яркие светлые пятна: Аристарх, Прокл, Кеплер. Наоборот, у большого кратера Гримальди и некоторых меньших кратеров темное дно, подобное лунному «морю». Такие кратеры называют *кратерными морями*.

Наблюдения Луны в телескоп дали много ценного для изучения лунной топографии. Уже с конца XVIII в. на лунных картах появилась сетка координат — лунные долготы и широты, отсчитывающиеся от главных координатных кругов так же, как они отсчитываются на земном глобусе. Полюсами Луны, так же как и Земли, являются концы ее оси вращения, а экватором — линия на плоскости, перпендикулярная к этой оси. Лунные широты отсчитываются от экватора. Начало отсчета долгот ведется от центрального меридиана, который делит точно пополам наблюдаемую в результате всех возможных либраций часть лунной поверхности.

Есть множество лунных карт. Для наблюдателей Луны издается карта одного лишь видимого ее полушария, а для исследователей, изучающих всю лунную поверхность и лунную навигацию, — полные карты Луны, построенные по фотографиям обратной стороны Луны, снятым с искусственных спутников. Практически на лунные карты уже нанесены все детали более 5 км длиной и много более мелких. Длина одного градуса по экватору или вдоль лунного меридиана составляет около 30 км.

В дело вступают другие приборы

Наблюдения в телескоп и применение фотографии обогатили нас сведениями о лунном рельефе. Но астрономия располагает теперь и многочисленными другими способами исследования планетных тел, в том числе радиолокаторами и термоэлементами.

Что же показали эти приборы? На Луне нет воды и ее паров. Луна не обладает сколько-нибудь значительной атмосферой. Поэтому ее поверхность не прикрыта от солнечных и космических лучей и метеоритной бомбардировки. В разгар солнечного дня температура лунного грунта на экваторе достигает 130°С, а после захода Солнца опускается до −170°С. Небо на Луне совершенно черное, и на нем одновременно можно видеть Солнце и звезды. Там нет зари и сумерек, нет ветра, облаков и радуги.

Особенно интересные сведения дали наблюдения лунных затмений. За полуторачасовое пребывание Луны в земной тени ее раскаленная поверхность охлаждается с 130° до −100°С. Такое резкое охлаждение за короткое время говорит о хороших теплоизоляционных свойствах наружного слоя лунной поверхности. И действительно, оказалось, что лунная поверхность покрыта очень пористым и мелкораздробленным веществом. На глубине нескольких

дециметров температура грунта уже одинакова в течение всего суточного лунного цикла, т. е. вечно. На инфракрасном изображении Луны, полученном во время лунного затмения, были обнаружены сотни ярких пятен — «горячих точек» с температурой на 50—40°С выше окружающей местности. Ими оказались кратеры, имеющие яркие лучи или светящиеся сами в полнолуние, а также мелкие лунки и кратерочки, наблюдаемые в телескопы в полнолуние только как светлые пятнышки.

В 1958 г. советский астроном Н. А. Козырев, наблюдая кратер Альфонс в большой крымский телескоп со спектральным прибором, обнаружил, что из района его центральной горки произошло кратковременное выделение газов. Луна, считавшаяся мертвым, давно застывшим телом, проявила признаки планетной активности. Правда, это не было извержение вулкана, подобное тем, какие происходят на Земле. По-видимому, из трещин, ведущих в глубь лунной коры, просто вырвалась порция газа. Этот газ под воздействием ультрафиолетового излучения Солнца ярко засветился и был замечен Н. А. Козыревым.

Вскоре после открытия Н. А. Козырева астрономы стали собирать сведения о всех световых явлениях и вспышках, наблюдавшихся на Луне с XVI в. до наших дней. Около трети всех случаев (всего их около 1000) приходится на район возле самого яркого на Луне кратера Аристарха, а затем на кратеры Платон и Альфонс и горы, окаймляющие Море Дождей и Океан Бурь.

Исследования свойств лунной поверхности сыграли важную роль в подготовке изучения нашего спутника с помощью автоматических и экипажных межпланетных станций.

Фотография части обратной стороны Луны, сделанная «Зондом-3».

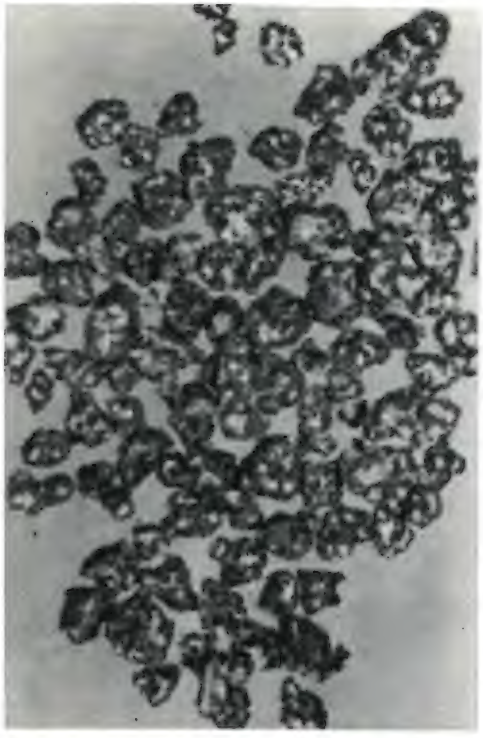
Луна — объект космических исследований

В общей программе исследований космоса Луна занимает особое место. Близость ее к Земле, возможность путем исследования ее физических условий, рельефа, состава и свойств грунта расширить наши знания о Солнечной системе сделали Луну важнейшим объектом космических исследований.

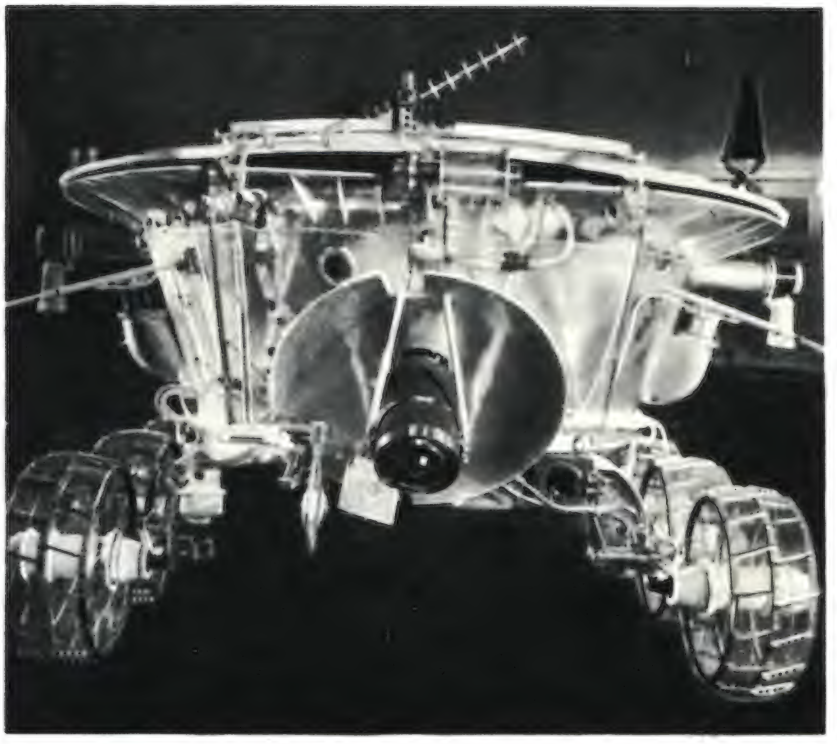
2 января 1959 г. в сторону Луны стартовала первая советская автоматическая станция «Луна-1». В последующие годы на Луну были запущены десятки автоматических станций и космических аппаратов, и каждый запуск приносил ученым что-то новое о Луне, позволял продвинуться вперед в изучении ее природы.

Станция «Луна-1» пролетела на расстоянии 5—6 тыс. км от поверхности Луны. Измерения, произведенные приборами этой станции, позволили ученым сделать два важных вывода. Во-первых, было установлено, что в окрестностях Луны существенное магнитное поле отсутствует. Во-вторых, в межпланетном пространстве были зарегистрированы потоки ионизированной плазмы — так называемый солнечный ветер.

Частицы лунного грунта, доставленные на Землю.



Советский самоходный аппарат «Луноход-1».



В сентябре 1959 г. станция «Луна-2» достигла Луны вблизи восточной границы Моря Дождей, в районе кратеров Архимед и Автолик. Приборы станции провели измерения в непосредственной близости от лунной поверхности. Подтвердилось, что у Луны отсутствует интенсивное магнитное поле и радиационный пояс.

4 октября 1959 г. стартовала станция «Луна-3». Она облетела Луну, сфотографировала ее невидимую сторону и передала фототелевизионные изображения на Землю. На этих фотографиях люди впервые увидели особенности строения невидимого с Земли полушария. Съемки обратной стороны Луны продолжила станция «Зонд-3». На основании полученных снимков были составлены первая карта обоих полушарий Луны и первый лунный глобус.

Снимки показали, что обратная сторона нашего спутника по характеру рельефа совершенно не сходна с видимой. Она оказалась сплошь сильно гористой, усеянной бесчисленными кратерами самой различной величины — диаметром от 5 до 100 км и более. Большинство кратеров получили названия в честь крупнейших ученых мира, и на карте Луны появились названия — Ломоносов, Попов, Циолковский, Эдисон, Герц, Джордано Бруно, Жолио-Кюри и др. Четко выделяются почти прямолинейные цепочки протяженностью до 600 км и более, состоящие из нанизанных кратеров с диаметрами 10—30 км. «Морей» несколько, они занимают 10% поверхности. На обратной стороне обнаружены особые образования, названные *талассоидами*, т. е. мореподобными. Талассоиды отличаются от «морей» тем, что они не темные и их поверхность усеяна многочисленными кратерами.

Новый этап в изучении природы Луны начался в феврале 1966 г., когда станция «Луна-9» совершила мягкую посадку в восточной части Океана Бурь. На переданных на Землю панорамах лунной поверхности были видны мельчайшие детали поверхности в этой части Луны. По снимкам видно, что «Луна-9» заметно не погрузилась в грунт. Видно, что не погрузились при падении, пролежали длительное время и не занесены пылью лунные камни. Значит, породы поверхностного слоя Луны достаточно прочны, глубокий слой пыли отсутствует. Бытовавшая до тех пор гипотеза о мощном пылевом покрове была отвергнута.

В дальнейшем были созданы автоматические искусственные спутники Луны. Они продолжили исследования Луны и окололунного пространства. Научные приборы первого спутника — станции «Луна-10» — помогли определить содержание естествен-

ных радиоактивных элементов в лунных породах. На Луне были обнаружены породы, близкие по составу к широко распространенным на Земле базальтам.

Второй искусственный спутник Луны — станция «Луна-11», выведенная на орбиту 27 августа 1966 г., дополнила программу изучения длинноволнового космического радиоизлучения. Основные выводы, сделанные по результатам исследований на «Луне-10», были подтверждены и расширены.

Станция «Луна-12» продолжила начатые исследования. Кроме того, перед ней стояла новая задача — сфотографировать отдельные участки Моря Дождей с высот 100—340 км. Это было необходимо, чтобы детально изучить лунную поверхность в этом районе и картографировать ее.

Важный вклад в изучение Луны внесла автоматическая станция «Луна-13». Она совершила мягкую посадку в Океане Бурь в декабре 1966 г. Впервые в мире были измерены плотность лунного грунта и его механические свойства. Данные с «Луны-13» подтвердили вывод о достаточной прочности лунного грунта.

Американские ученые в эти годы исследовали Луну с помощью космических аппаратов «Рейнджер», «Сервейер» и «Лунар Орбитер».

Наблюдения за полетами искусственных спутников Луны и анализ траекторных измерений показали, что, пролетая над определенными районами Луны, спутник отклонялся от расчетной траектории полета. Эти отклонения не связаны с возмущающим воздействием Солнца и планет. Естественно предположить, что причиной отклонений служат местные концентрации масс — *масконы*. Наиболее крупные масконы залегают под круговыми «морями», например под Морем Дождей, согласно расчетам — на глубине от 25 до 125 км. Природа масконов до конца еще не ясна. Одни ученые считают, что масконы — гигантские железо-никелевые метеориты, упавшие на Луну и погрузившиеся в глубину под слой жидкой лавы. Другие связывают появление масконов с эволюцией структуры лунных недр. Будущие исследования раскроют истинную природу масконов.

Новое крупное событие в изучении Луны произошло в 1969 г. Космический корабль «Аполлон-11» с экипажем из трех космонавтов (Н. Армстронг, Э. Олдрин и М. Коллинз) достиг окрестностей Луны и вышел на окололунную орбиту. От основного блока корабля отделился двухступенчатый лунный отсек, доставивший на поверхность Луны Н. Армстронга и Э. Олдрина. Космонавты разместили на Луне два прибора — сейсмометр и лазерный отражатель, собрали образцы лунного грунта, сфотографировали

Участок земного океана под облаками и Луна над горизонтом (снимок с космического корабля).

окружающую местность. Затем они стартовали с Луны во взлетной ступени лунного отсека, которая встретилась и состыковалась на окололунной орбите с основным блоком. Там их поджидал М. Коллинз. В основном блоке корабля экипаж в полном составе вернулся на Землю. В последующие годы было еще несколько лунных экспедиций.

1970 год ознаменовался выдающимся достижением советской космонавтики: 12 сентября на Луну стартовала автоматическая станция «Луна-16», совершившая 20 сентября мягкую посадку в районе Моря Изобилия; автоматический грунтозаборник пробурил грунт до глубины 35 см, взял его и поместил в контейнер возвращаемого аппарата. 21 сентября космическая ракета с этим аппаратом стартовала с Луны. Впервые в истории космонавтики автомат стартовал с другого небесного тела Солнечной системы и вернулся на Землю.

Что можно сказать о результатах предварительного изучения лунного грунта? Лунный грунт — раз-

нозернистый порошок, который легко слипается в отдельные рыхлые комки. Эта особенность существенно отличает его от земной пыли: он скорее напоминает влажный песок или комковатую структуру земных почв.

Цвет лунного грунта темно-серый или черноватый. Правда, оценку цвета лунного грунта затрудняют его своеобразные отражающие и рассеивающие свойства. В зависимости от того, под каким углом зрения мы смотрим на лунный грунт, у него возникают то зеленоватые, то красно-бурые оттенки.

Обнаружены в лунном грунте застывшие капли-шарики — и прозрачные, и мутноватые. Интересно, что у лунного вещества оказалась чрезвычайно низкая теплопроводность: даже самые хорошие теплоизоляционные материалы на Земле передают тепло все-таки лучше, чем лунный грунт.

При изучении состава пород, доставленных из Моря Изобилия, оказалось, что лунный грунт содержит около 70 химических элементов и изотопов: кремний, титан, алюминий, железо, магний, торий, уран, цирконий и др. Изучение лунного грунта позволило ученым сделать некоторые выводы о типе лунных пород и об их происхождении. Что касается возраста образцов лунных пород, доставленных на Землю, то их анализ дал различные оценки — от 3 до 4,6 млрд. лет. Большинство ученых считают, что возраст нашего естественного спутника составляет около 4,6 млрд. лет, т. е. Луна и Земля образовались примерно в одно и то же время.

Кристаллические породы поверхности лунных «морей» базальтового типа, но содержание в них химических элементов несколько иное, чем у земных базальтов. По-видимому, лунные «моря» являются равнинами, затопленными когда-то вулканической лавой. Ученые полагают, что образование различных типов пород на Земле и Луне (и, вероятно, на других планетах земной группы) шло сходными путями, хотя и достигало разных этапов эволюции. Вещество этих лавовых морей подверглось своеобразным эрозийным процессам. На Земле горные породы разрушаются под влиянием главным образом воды, углекислоты, организмов. На Луне породы разрушают солнечный ветер, удары метеоритов, значительные колебания температуры, космический вакуум.

В чем значение выполненного космического эксперимента? Во-первых, это решение крупнейшей технической задачи, открывающее широкие перспективы в изучении Солнечной системы. Недалеко то время, когда более совершенные преемницы нашей «Луны-16» будут стартовать с других планет, чтобы доставить на Землю образцы пород с Меркурия, Марса и других небесных тел. Во-вторых, громадное значение имеет доставка на Землю лунного грунта и его изучение. Человечество стремится познать, как произошла и развивалась Солнечная система, какова ее судьба. Для этого необходимо проанализировать чрезвычайно обширную совокупность факторов, в частности определить состав вещества, из которого состоят различные небесные тела. Ученые достаточно хорошо изучили состав поверхностного слоя Земли, а также состав метеоритов. На повестке дня — изучение состава других объектов в Солнечной системе. Несомненно, важное значение имеет доставка образцов из различных районов Луны: ведь проблема происхождения Луны тесно связана с проблемой происхождения Солнечной системы. Кроме того, исследование лунных пород особенно ценно для понимания процессов на Земле в период ее раннего существования. Поэтому изучение физических свойств и химического состава пород из различных районов Луны, определение возраста Луны очень важно для решения фундаментальных космогонических проблем.

10 ноября 1970 г. с Земли стартовала автоматическая станция «Луна-17», доставившая на поверхность нашего естественного спутника самоходный аппарат «Луноход-1». Первая в мире передвижная лун-

След «Лунохода-1» на Луне.

ная лаборатория была оснащена комплексом новейшей научной аппаратуры.

Передвижная лаборатория начала работу 17 ноября 1970 г. и завершила ее 4 октября 1971 г. За эти десять с половиной месяцев на поверхности Луны в условиях космического вакуума, радиации, значительных перепадов температуры и сложного рельефа местности по трассе движения все системы и научные приборы передвижной лаборатории функционировали нормально. Как основная, так и дополнительная программа научных исследований Луны, а также программа инженерно-конструкторских испытаний были выполнены.

«Луноход-1» прошел расстояние 10 540 м. Была обследована поверхность на площади 80 тыс. м^2; телевизионные системы аппарата передали на Землю более 200 панорам и свыше 20 тыс. снимков лунной поверхности. Более чем в 500 точках по трассе движения «Лунохода-1» изучались физико-механические свойства поверхностного слоя грунта. В 25 точках проведен анализ химического состава. Планомерно измерялось космическое рентгеновское излучение и исследовалась радиационная обстановка на Луне.

С помощью «Лунохода-1» ученые изучали характер и особенности поверхности типичного лунного «моря» — Моря Дождей. Анализ комплексной информации показывает, что по общей морфологии, характеру рыхлого поверхностного слоя и распространенности кратеров и камней обследованный район близок к прежде изученным «морским» районам экваториальной зоны Луны. Это указывает на общность закономерностей формирования и эволюции поверхностей на значительном пространстве лунных «морей». Изучение относительной распространенности и характера кратеров показало, что количество свежих каменистых кратеров с четкими формами рельефа незначительно. Похоже, что процесс образования кратеров на поверхности Луны сильно растянут во времени и с возрастом контуры кратеров становятся сглаженнее, смягченнее. Происхождение большинства таких кратеров ударно-взрывное. Поля камней, обнаруженные «Луноходом-1» на пути движения, в основном связаны с выбросами из кратеров. Сравнение формы камней в зоне выбросов показывает, что со временем они округляются и сглаживаются.

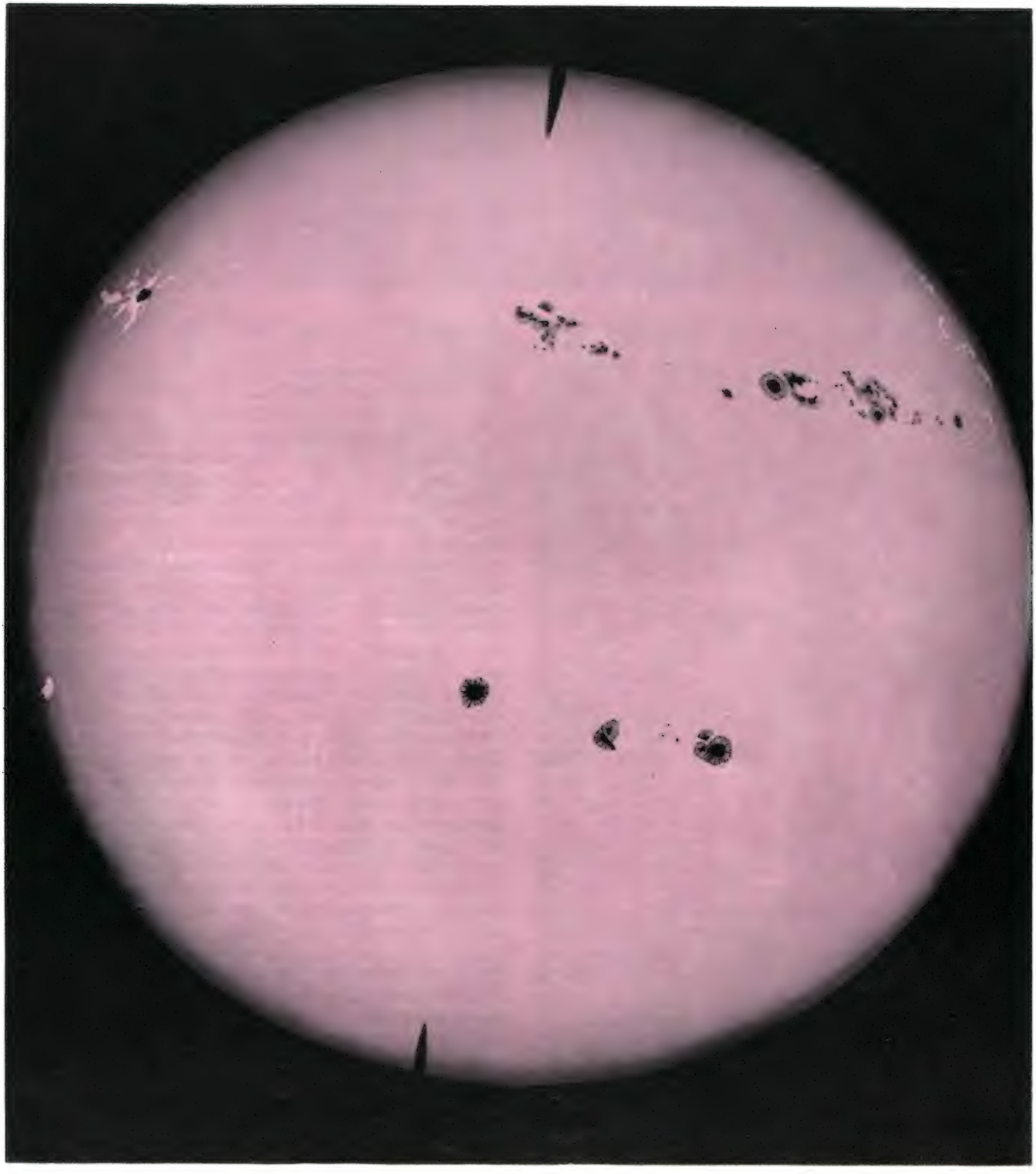
Результаты анализа химического состава пород показали, что горные породы в районе исследований по составу близки к базальтам. Эти данные подтверждают гипотезу интенсивного развития базальтового вулканизма на Луне в ранние этапы ее существования. Базальты широко распространены и на Луне, и на Земле. Это свидетельствует о том, что на всех планетах земного типа процесс выплавления базальтовой магмы проходил одинаково.

«Луноход-1» передал на Землю уникальную по своему характеру и обширную по объему научную информацию. Она послужит дальнейшему расширению наших знаний о космическом пространстве.

Сложная техническая задача была решена в ходе полета станции «Луна-20» в феврале 1972 г. Станция совершила мягкую посадку в труднодоступном горном районе между Морем Изобилия и Морем Кризисов, забрала грунт и доставила его на Землю. Образцы грунта с «Луны-20» представляют собой мелкозернистый порошок с примесью более крупных частиц, в основном полевого шпата и пород типа анортозитов; их содержание в грунте, доставленном «Луной-16», не превышало 1—2%. В то же время базальтовых пород в новом грунте значительно меньше. Грунт с «Луны-20» серый, местами светло-серый, т. е. значительно светлее грунта с «Луны-16». В нем несравненно меньше оплавленных частиц и стеклянных шариков. Он резко отличается от грунта с «Луны-16» и по своему химическому составу, а именно содержит значительно больше алюминия и кальция, обеднен железом и титаном. Изучение Луны продолжается, и мы будем свидетелями новых выдающихся достижений советской науки и космонавтики.

Солнце

Солнце Современный снимок.



Спокойное Солнце

Возможна ли жизнь на Земле без Солнца? Чтобы ответить на этот вопрос, представим себе, что Солнце вдруг исчезло или что-то преградило путь его лучам. Тогда Земля внезапно погрузится во мрак. Погаснут Луна и планеты, отражающие солнечные лучи. Лишь далекие звезды будут освещать Землю. Зеленые растения погибнут, так как они могут усваивать углерод из воздуха, только используя энергию солнечных лучей. Животным нечем будет питаться, и они вымрут от голода. Воздух, океаны и суша очень скоро отдадут мировому пространству ту энергию, которую они постоянно получают от Солнца, и все живое замерзнет от страшного холода. Начнет сжижаться воздух, и на Землю польется дождь из жидкого кислорода и азота. Наша планета покроется слоем льда из твердого воздуха и станет безжизненной. К счастью, этого не может случиться.

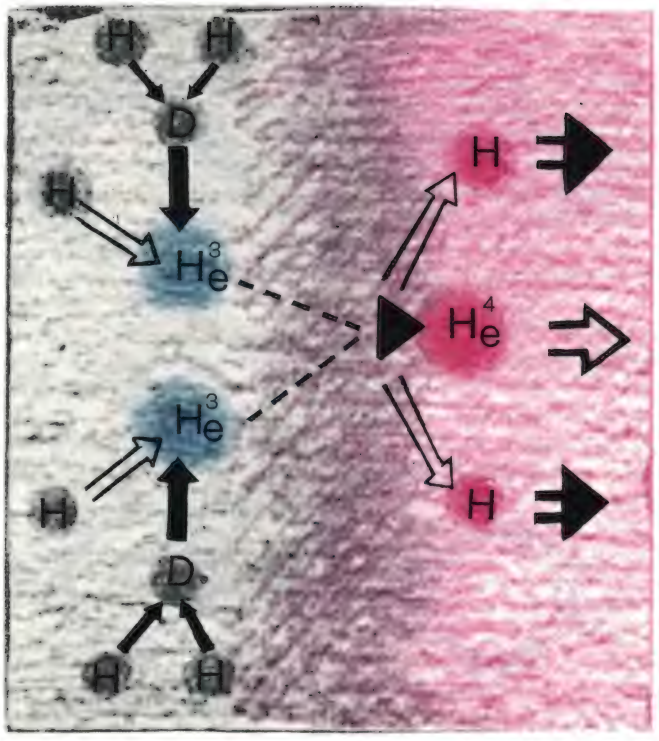
Энергия Солнца огромна. Даже та ничтожная ее доля, которая попадает на Землю, очень велика. Энергия солнечных лучей, падающих на 1 м^2 площади земной поверхности, может заставить работать двигатель мощностью около 1,4 кВт, а вся Земля получает от Солнца в десятки тысяч раз больше энергии, чем могли бы выработать все электростанции мира, если бы они работали на полную мощность.

С Земли Солнце кажется нам сравнительно небольшим. Измеряя видимые угловые размеры Солнца, легко высчитать, что расстояние до него в 107 раз превышает его диаметр. А диаметр Солнца очень велик, он в 109 раз больше земного, который составляет около 13 тыс. км. После этого нетрудно вычислить размеры Солнца и расстояние до него в километрах.

Зная расстояние до Солнца и количество энергии, получаемое от него Землей, можно определить всю энергию, излучаемую Солнцем. Чем ближе мы подходим к источнику света, тем более концентрированным оказывается его излучение. Если бы Земля была к Солнцу вдвое ближе, то она получала бы от него в 4 раза больше энергии, а у самой поверхности Солнца — в 46 тысяч раз!

Каждый участок поверхности Солнца величиной с клеточку школьной тетради (т. е. $^1/_4$ см^2) излучает энергию мощностью более 1,5 кВт, а 1 см^2 поверхности Солнца — более 6 кВт. Из физики известно, что столько энергии с 1 см^2 излучает тело, нагретое до температуры около 6000 К. Следовательно, такова температура внешних слоев Солнца.

Атом гелия имеет чуть меньшую массу, чем четыре атома водорода, которые пошли на его образование. Этот дефект массы и выделяется в недрах Солнца в виде энергии.

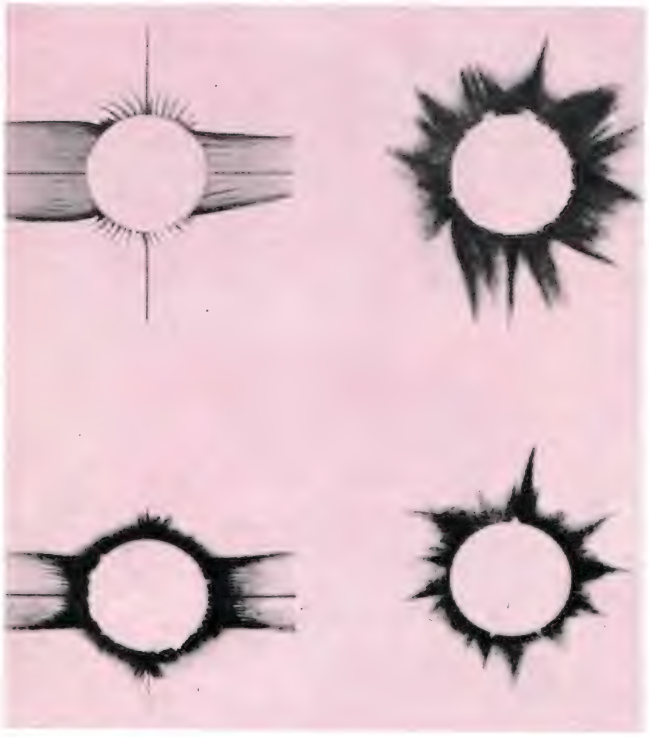


Масса Солнца в 333 тыс. раз больше массы Земли, а объем — в 1 млн. 304 тыс. раз. Отсюда следует, что плотность Солнца меньше плотности Земли. В среднем Солнце раза в полтора плотнее воды. Но это только в среднем. Внутри Солнца вещество сильно сжато давлением вышележащих слоев и раз в десять плотнее свинца. Зато наружные слои Солнца в сотни раз разреженнее воздуха у поверхности Земли.

Давление определяется силой, приходящейся на единицу площади. Если из Солнца (до его центра) вырезать вдоль радиуса столбик сечением в 1 см^2, масса его будет равна 100 тыс. т. Но на Солнце это вещество в 1000 раз тяжелее, чем на Земле, а потому давление газа в недрах Солнца в сотни миллиардов раз больше, чем воздуха у поверхности Земли.

При таком огромном давлении температура вещества превышает 10 МК (10 000 000 К) и оно находится в газообразном состоянии. По своим свойствам этот газ сильно отличается от обычных газов, например воздуха: почти все атомы полностью теряют свои электроны и превращаются в «голые» атомные ядра. Свободные электроны, оторвавшиеся от атомов, становятся составной частью газа. Такой газ называется *плазмой*. Частицы плазмы, нагретой до 10 МК, движутся с огромными скоростями — в сот-

Солнечная корона во время максимумов (справа) и минимумов (слева) числа пятен на Солнце (по А. П. Ганскому)



Фотография солнечной короны во время полного солнечного затмения.

ни и тысячи километров в секунду! Из-за чрезмерного давления частицы сильно сближаются, а отдельные ядра атомов иногда даже проникают друг в друга, при этом происходят ядерные реакции, являющиеся источником неиссякаемой энергии Солнца. На рисунке изображено, как возникает одна из таких реакций. В результате ее водород превращается в гелий, причем на промежуточных этапах образуются ядра тяжелого водорода — дейтерия (D), а также изотопа гелия, отличающегося от обычного тем, что его масса не в четыре, а в три раза превышает массу атома водорода.

В основном Солнце состоит из тех же самых химических элементов, что и Земля. Однако водорода на Солнце несравненно больше, чем на Земле. Можно сказать, что Солнце почти целиком состоит из водорода. Водородные ядерные реакции — основной источник солнечной энергии. За время своего существования, т. е. за 4—5 млрд. лет, Солнце не израсходовало еще и половины запасов водородного ядерного топлива. В течение почти всего этого времени излучение Солнца примерно такое же, как и теперь. Так оно будет светить многие миллиарды лет, пока в недрах Солнца весь водород не превратится в гелий.

Как же выделяется ядерная энергия внутри Солнца?

Когда ядра одного элемента (например, водорода), соединяясь, образуют ядра другого (например, гелия), возникают особые гамма-лучи, обладающие огромной энергией. Всякие лучи испускаются атомами в виде отдельных порций — *квантов*. Энергия квантов гамма-лучей очень велика. Атомы вещества в недрах Солнца обладают свойством жадно поглощать любое излучение, при этом, как правило, поглощая квант с очень большой энергией, атом излучает два или несколько квантов с меньшей энергией. Пока порожденные ядерными реакциями гамма-лучи дойдут до поверхности Солнца, произойдет очень много таких дроблений квантов первоначальных гамма-лучей. В результате с поверхности Солнца будут испускаться преимущественно лучи со значительно меньшей энергией: ультрафиолетовые, видимые и инфракрасные.

Рисунок (см. стр. 80) дает представление о том, как «устроено» Солнце. Для того чтобы показать внутренние слои Солнца, художник как бы вырезал из него шаровой сектор. Внутренняя часть, закрашенная в темно-красный цвет (высветленный в центре), соответствует *ядру*, где происходят ядерные реакции и выделяется энергия. Радиус ядра составляет примерно $^1/_3$ радиуса Солнца. В ядре сосредоточена наибольшая часть солнечного вещества.

К ядру примыкает слой такой же толщины, на схеме закрашенный в желтый цвет. Отсюда в результате поглощения квантов, их дробления и переизлучения энергия переносится наружу. Выше находится *конвективная зона,* она тянется примерно на 200 тыс. км. Температура в конвективной зоне уже значительно ниже. Эта зона переходит во внешние слои Солнца — *атмосферу.* Из-за более низкой температуры конвективная зона не может обеспечить перенос всей энергии, поступающей снизу только путем поглощения и переизлучения. В переносе энергии начинает принимать участие само вещество: из глубины поднимаются вверх отдельные потоки более горячих газов, передающих энергию непосредственно внешним слоям, а более холодные газы опускаются. На рисунке эти потоки (или отдельные сгустки газа) изображены кружочками, заполняющими область конвективной зоны.

Конвекция на Солнце несколько напоминает кипение воды в кастрюле. Но в кастрюле одна и та же струя перемешивает кипяток на всю его толщину. В конвективной же зоне из-за ее большой глубины всплывающая масса перегретого газа, возникшая в нижних слоях, не успевает достигнуть самых верхних: гораздо раньше она распадается, передав избыток энергии окружающей среде. Таким образом в этой среде образуются массы газа либо более горячие, поднимающиеся вверх, либо более холодные, опускающиеся вниз. Конвективные струи образуют как бы своеобразную эстафету: в более глубоких слоях циркулируют одни, а выше — другие массы газа, или, как говорят, элементы конвекции, которые в глубоких слоях крупнее, чем в наружных. Ученые предполагают, что в конвективной зоне по крайней мере три яруса конвективных «ячеек». Самые глубокие имеют поперечник 100—200 тыс. км, самые внешние — несколько сотен километров. Между ними находится слой с промежуточными размерами конвективных ячеек в 20—30 тыс. км. Такая структура конвективной зоны отражается на строении всей солнечной атмосферы.

Солнечная атмосфера также состоит из нескольких различных слоев (см. схему на стр. 81). Самый глубокий и тонкий из них — *фотосфера.* Здесь возникает подавляющее количество световых и тепловых лучей, посылаемых Солнцем в мировое пространство. Фотосферу можно наблюдать в телескоп, снабженный специальным темным светофильтром. Если этого не сделать, то наблюдатель ослепнет. Однако лучше проецировать увеличенное изображение Солнца на белый экран.

Толщина фотосферы всего 200—300 км, поэтому на рисунке она условно изображена тонкой линией. Более глубоких слоев Солнца мы не видим, так как вещество фотосферы непрозрачно.

Чем глубже слои фотосферы, тем они горячее. Если смотреть на центр солнечного диска, то видны наиболее глубокие слои фотосферы по той же причине, по какой земная атмосфера в зените прозрачнее, чем у горизонта. Если смотреть на край Солнца, видны не такие глубокие слои, как в центре. Поскольку эти слои холоднее и дают меньше света, по мере приближения к краю диск Солнца кажется темнее, а сам край — очень резким.

При помощи большого телескопа можно изучить характерную структуру фотосферы. Чередование маленьких (на самом деле размером около 1000 км) светлых пятнышек, окруженных темными промежутками, создает впечатление, что на поверхности Солнце имеет ячеистую структуру из мелких зернышек — *гранул.* Они представляют собой отдельные элементы конвекции самого верхнего яруса конвективной зоны. Они горячее, а значит, и ярче окружающей фотосферы. Темные промежутки между ними — потоки опускающихся более холодных газов.

От движения гранул в солнечной атмосфере возникают волны, подобные звуку в воздухе. Распространяясь вверх, они быстро превращаются в так называемые ударные волны (такие волны возникают, например, когда реактивный самолет преодолевает звуковой барьер). В верхних слоях солнечной атмосферы эти волны поглощаются, а их энергия переходит в тепло. Поэтому в солнечной атмосфере над фотосферой температура начинает повышаться, и чем дальше от фотосферы, тем больше. В сравнительно тонком слое — *хромосфере* — она поднимается до нескольких десятков тысяч кельвинов. А в наиболее разреженной, самой внешней оболочке Солнца — *короне* — температура более 1МК.

Хромосферу и корону можно видеть во время полного солнечного затмения. Когда Луна целиком закроет ослепительно яркую фотосферу, вокруг ее диска, который кажется черным, внезапно вспыхивает серебристо-жемчужное сияние в виде венца, часто имеющего длинные лучи. Это и есть солнечная корона — чрезвычайно разреженная газовая оболочка. Непосредственно вокруг черного диска Луны во время затмения видна блестящая тонкая розовая кайма. Это хромосфера Солнца — слой раскаленных газов толщиной 10—20 тыс. км.

Хромосфера значительно прозрачнее фотосферы. Ее вещество непрозрачно только в узких участках спектра — в некоторых наиболее сильных спектральных линиях. Поэтому она имеет линейчатый спектр, испускаемый светящимися парами водорода, гелия, кальция и других элементов. Хромосферу можно

Схема строения внутренних слоев Солнца:
1 — ядро, где выделяется ядерная энергия;
2 — область лучистого переноса энергии;
3 — конвективная зона.
За ними идут внешние слои (см. схему на стр. 81).

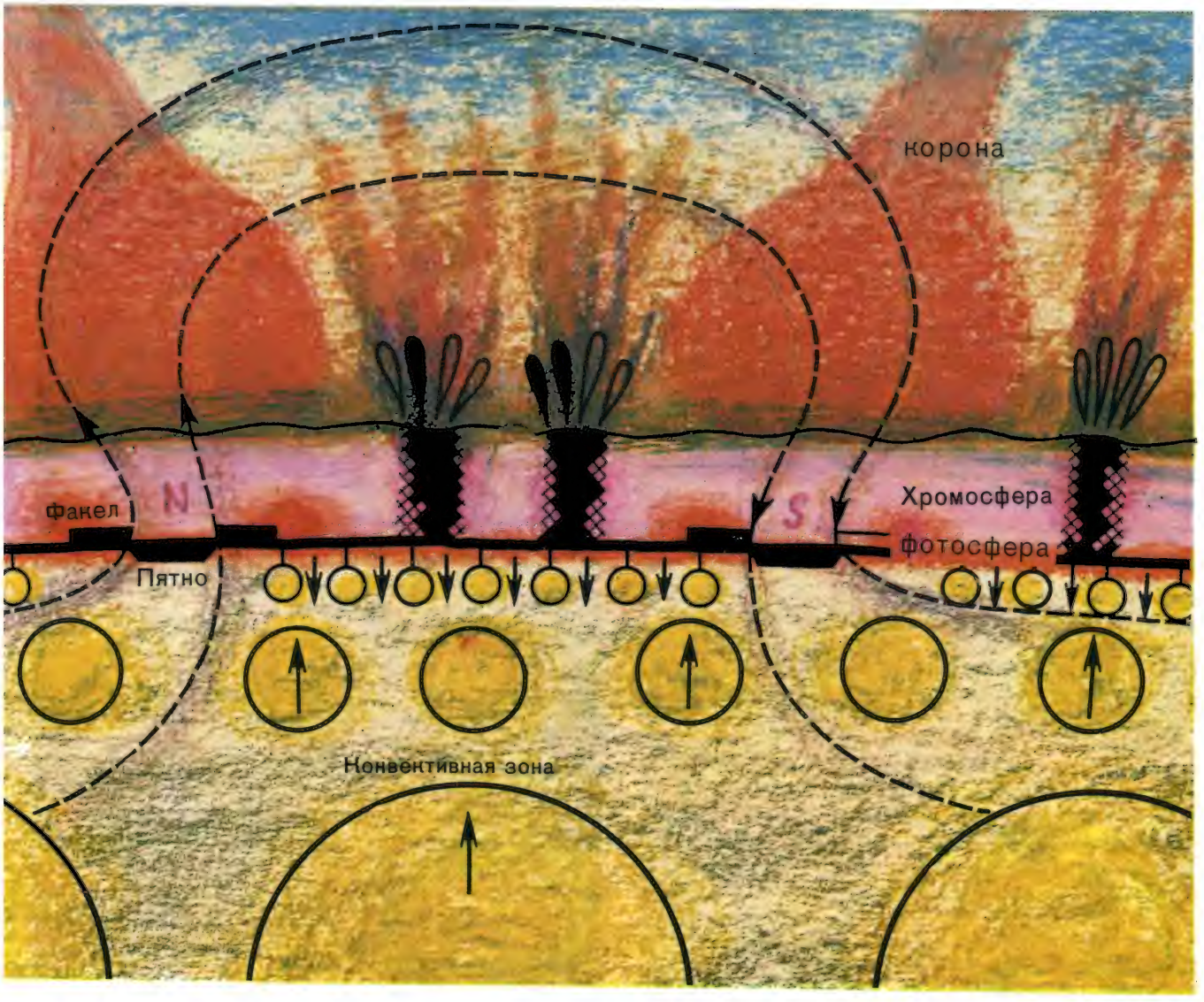
наблюдать, если с помощью специальных приборов выделить излучаемые этими элементами лучи.

В фотосфере много нейтральных атомов. В хромосфере из-за высокой температуры атомы водорода и гелия начинают переходить в ионизованное состояние. Это значит, что они теряют свои электроны и становятся электрически заряженными, а их электроны начинают двигаться как свободные частицы. В короне, где температура несравненно больше, ионизация вещества настолько сильна, что все легкие химические элементы полностью лишаются своих электронов, а у тяжелых атомов их недостает более десятка. Происходит это потому, что при температуре 1МК отдельные частицы движутся так быстро и с такой силой сталкиваются, что от них «щепки летят». Таким образом, атмосфера Солнца, как и его недра, состоит из плазмы.

В короне плазма очень сильно разрежена. В 1 $см^3$ ее содержится не более 100 млн. «ободранных» атомов и оторванных от них свободных электронов. Это в 100 млрд. раз меньше, чем молекул в таком же объеме воздуха. Если всю корону сжать до плотности воздуха на Земле, то получится слой вокруг Солнца толщиной в несколько сантиметров.

Вследствие большой разреженности корона еще прозрачнее, чем хромосфера, и количество излучае-

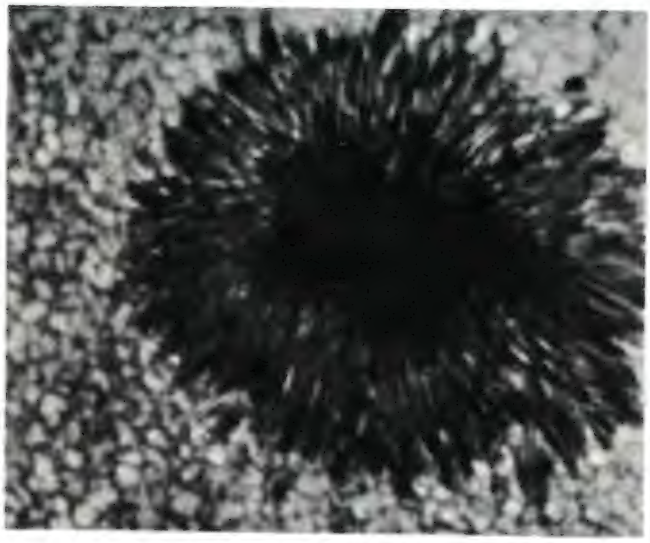
Схема строения внешних слоев Солнца.



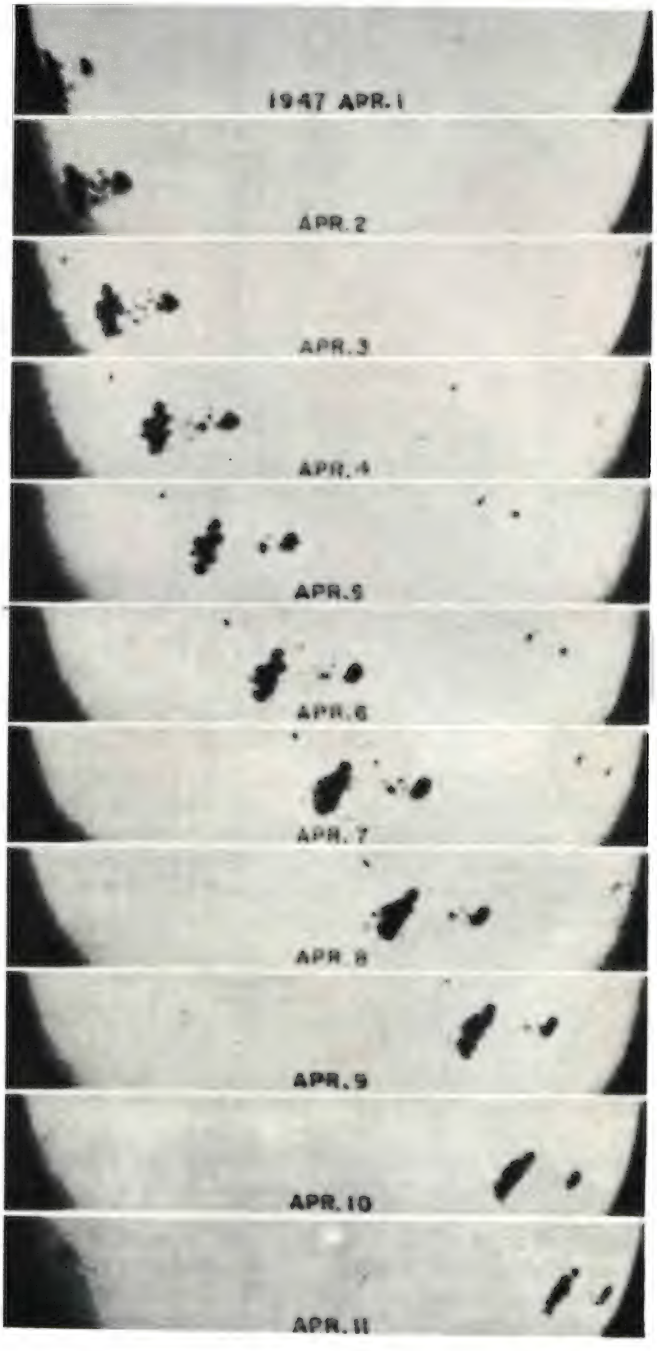
мого ею света ничтожно: яркость короны в миллион раз меньше яркости фотосферы. Именно поэтому она и видна только во время полных солнечных затмений. И хотя самые внешние слои солнечной атмосферы имеют температуру 1МК, их излучение составляет ничтожную долю от общей энергии, испускаемой Солнцем. Почти всю энергию излучает фотосфера, имеющая температуру около 6000 К. Поэтому такую температуру приписывают Солнцу в целом. Высокая же температура короны говорит лишь о том, что ее частицы движутся с огромными скоростями, достигающими сотен и тысяч километров в секунду.

Как же убедились в том, что температура солнечной короны велика, если ее излучение так мало? Есть несколько способов, и один из них основан на методах радиоастрономии. Дело в том, что наряду с другими лучами Солнце испускает радиоволны. Их оказывается гораздо больше, чем должно излучать тело, нагретое до 6000 К. Солнечная корона очень сильно поглощает радиоволны, и доходящее до нас радиоизлучение Солнца возникает не в фотосфере, а в короне. Выполненные при помощи специальных радиотелескопов измерения мощности радиоизлучения позволили определить температуру короны.

Солнечное пятно.

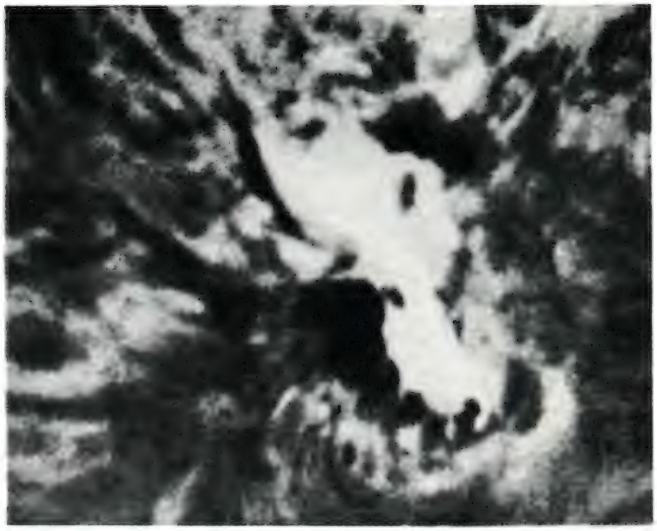


Видимое перемещение пятна по диску Солнца, вызванное вращением Солнца.



С высокой температурой короны связана одна из замечательных ее особенностей — необычайная протяженность. Даже невооруженным глазом во время затмений можно заметить, что корона простирается на расстояние нескольких солнечных радиусов. Камень, подброшенный вверх, поднимется тем выше, чем сильнее его бросить, т. е. чем большую энергию сообщить ему. Так же точно и частицы солнечной атмосферы могут далеко уйти от Солнца, если велика энергия их тепловых движений, т. е. велика температура атмосферы. Поэтому на основании наблюдаемой протяженности короны можно установить, что температура ее около 1МК. При такой температуре скорости движения частиц огромны, а так как плотность вещества чрезвычайно мала, то частицы, прежде чем столкнуться, успевают пройти большие расстояния. Поэтому вещество обладает высокой теплопроводностью и во всей короне температура почти одинакова. Только на очень больших расстояниях от Солнца температура постепенно начинает уменьшаться. В действительности солнечная корона простирается еще дальше, вплоть до орбит Земли и Марса. Это соответствует расстоянию более чем в 200 радиусов Солнца. Образно говоря, Земля вместе с нами погружена в солнечную корону. На таких больших расстояниях Солнце своим притяжением уже не удерживает частицы сильно разреженного горячего газа. Бóльшая часть их постоянно уходит в межпланетное пространство, а на их место приходят другие, из более глубоких слоев. Так возникает постоянный поток ионизованных атомов и свободных электронов от Солнца — *солнечный ветер*. Он «обдувает» верхние заряженные слои земной атмосферы (ионосферы), которые находятся «под контролем» магнитного поля Земли (магнитосферы). Вследствие этого силовые линии магнитного поля на дневной стороне сжимаются, а плотность ионосферы увеличивается.

Две стадии развития хромосферной вспышки.



Солнечная активность

Время от времени в солнечной атмосфере появляются *активные области,* число которых регулярно меняется с циклом в среднем около 11 лет.

О возникновении активной области свидетельствуют *солнечные пятна,* наблюдаемые в фотосфере. Они возникают в виде маленьких черных точек — пор. За несколько дней поры превращаются в крупные темные образования. Обычно пятно окружено менее темной полутенью, состоящей из радиально вытянутых прожилок. Пятно кажется как бы «дыркой» на поверхности Солнца, но такой большой, что в нее свободно можно закинуть «мячик» размером с Землю.

Если наблюдать Солнце изо дня в день, то по перемещению пятен можно убедиться, что оно вращается вокруг своей оси и примерно через 27 суток то или иное пятно снова возвращается почти на то же место солнечного диска. На разных широтах скорость вращения Солнца различна, вблизи экватора вращение быстрее, а у полюсов медленнее.

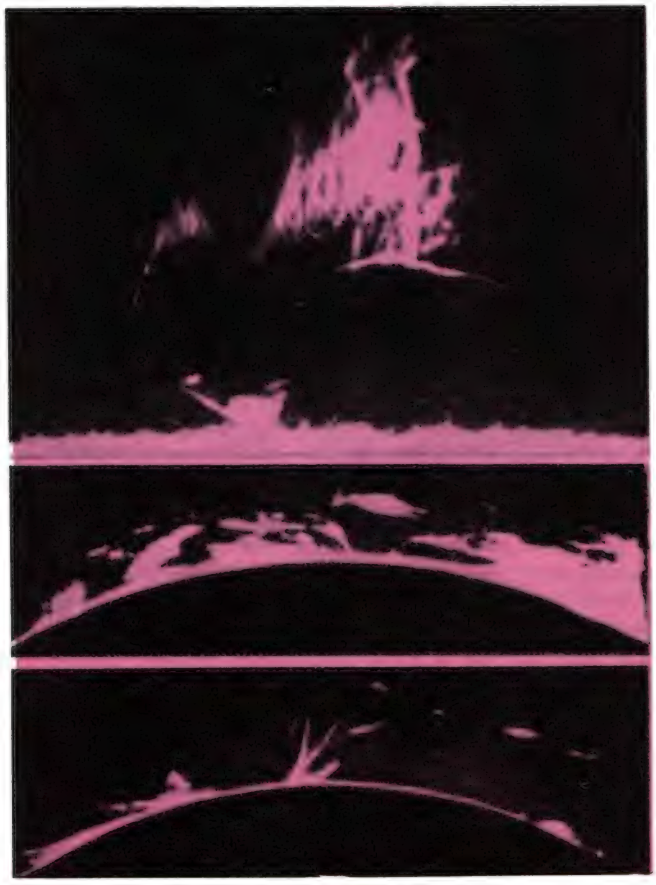
До возникновения пятен на небольшом участке фотосферы появляется яркая область — *факел,* лучше всего наблюдаемая на краю диска Солнца. Факелы на несколько сотен кельвинов горячее фотосферы. Атмосфера над факелами также горячее и плотнее. Пятна всегда окружены факелами, которые в центральной части солнечного диска почти незаметны.

По мере разрастания факела в активной области постепенно усиливается магнитное поле, особенно на некотором малом участке, где в дальнейшем может образоваться пятно. Пятна обладают сильным магнитным полем, останавливающим всякое движение ионизованного газа. Поэтому в области пятна под фотосферой прекращается обычная конвекция и тем самым прекращается дополнительный перенос энергии из более глубоких слоев наружу. Температура пятна оказывается примерно на 1000К ниже, чем окружающей фотосферы, на фоне которой оно кажется темным. Появление факела также объясняется магнитным полем, но только более слабым. Когда оно не способно остановить конвекцию, тормозится лишь беспорядочный характер движений поднимающихся струй газа в конвективной зоне. Поэтому в факеле горячие газы легче поднимаются из глубины и делают его ярче окружающей фотосферы.

Размеры и само местоположение активной области пятен и факелов тесно связаны с конвективной зоной: тень отдельного пятна покрывает одну или несколько ячеек промежуточного яруса конвективной зоны, расположенных, как правило, в узлах (местах пересечения границ) гигантских ячеек самого глубокого яруса. Обычно пятна возникают целыми группами, из которых выделяются *два* наиболее крупных пятна — одно на восточном, а другое на западном краю группы, обладающих противоположной полярностью магнитного поля. Такие группы пятен называются *биполярными.* Область, занятая всей биполярной группой, совпадает по размерам с гигантской ячейкой конвективной зоны.

В хромосфере и короне над активной областью наблюдается много очень интересных явлений.

Различные типы солнечных протуберанцев.



К ним относятся хромосферные вспышки и протуберанцы.

Вспышки — один из самых быстрых процессов на Солнце. Обычно они начинаются с того, что за несколько минут яркость в некоторой точке активной области, особенно в лучах, испускаемых атомами водорода и ионами кальция, сильно возрастает. Бывали очень сильные вспышки, которые по яркости превышали ослепительную фотосферу. После возгорания в течение нескольких десятков минут свечение постепенно ослабляется, вплоть до исходного состояния. Вспышки возникают из-за особых изменений магнитных полей, приводящих к внезапному сжатию вещества хромосферы. Происходит нечто подобное взрыву, и образуется направленный поток очень быстрых заряженных частиц и космических лучей. Этот поток, проходя через корону, увлекает с собой частицы плазмы; частицы приходят в колебание и испускают радиоволны.

Небольшая область, занятая вспышкой (всего лишь несколько сотен тысяч квадратных километров), создает очень мощное излучение. Оно состоит из рентгеновских, ультрафиолетовых и видимых лучей, радиоволн, быстрых частиц (корпускул), движущихся со скоростями в тысячи километров в секунду, и космических лучей. Все эти виды излучения оказывают сильное воздействие на земную атмосферу, особенно на верхние ее слои.

Ультрафиолетовые и рентгеновские лучи первыми достигают Земли, прежде всего верхних, ионизованных слоев ее атмосферы — ионосферы. От состояния земной ионосферы зависит распространение радиоволн и слышимость радиопередач. Под воздействием солнечных ультрафиолетовых и рентгеновских лучей увеличивается ионизация ионосферы. В нижних ее слоях начинают сильно поглощаться короткие радиоволны. Из-за этого происходит замирание слышимости радиопередач на коротких волнах. Одновременно ионосфера приобретает способность лучше отражать длинные радиоволны. Поэтому во время вспышки на Солнце можно обнаружить внезапное усиление слышимости далекой радиостанции, работающей на длинной волне.

Поток частиц — корпускул достигает Земли примерно лишь через сутки после того, как на Солнце произошла вспышка. «Продираясь» через солнечную корону, корпускулярный поток вытягивает ее вещество в длинные, характерные для ее структуры лучи.

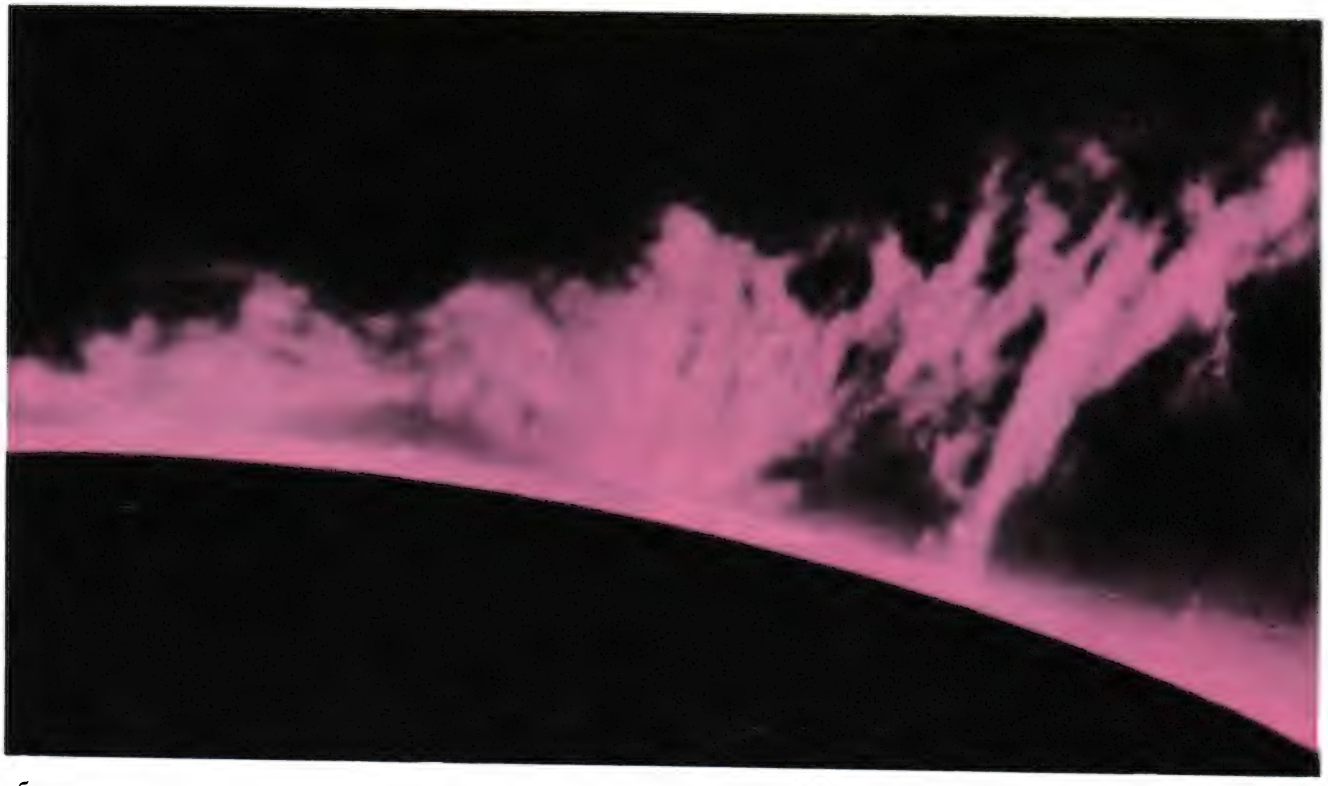
Вблизи Земли поток корпускул встречается с магнитным полем Земли, не пропускающим заряженные частицы. Однако трудно остановить частицы, мчащиеся с огромной скоростью. Они прорывают преграду и как бы вдавливают магнитные силовые линии, окружающие земной шар. От этого на Земле происходит так называемая магнитная буря, заключающаяся в быстрых и неправильных изменениях магнитного поля. Во время магнитных бурь стрелка компаса совершает беспорядочные колебания и пользоваться им невозможно.

Подходя к Земле, поток солнечных частиц врывается в окружающие Землю слои очень быстрых заряженных частиц, образующих радиационные пояса. Пройдя эти пояса, некоторые солнечные частицы прорываются глубже, в верхние слои атмосферы, и вызывают очень красивые свечения воздуха — *полярные сияния*.

Таким образом, вспышки на Солнце приводят к важным последствиям и тесно связаны с различными явлениями, происходящими на Земле.

В короне над активной областью также происходят интересные явления. Порой вещество короны начинает ярко светиться и можно видеть, как его потоки устремляются в хромосферу. Эти гигантские

Спокойный протуберанец.



облака раскаленных газов, протяженностью в десятки тысяч километров, называются *протуберанцами*. Протуберанцы поражают разнообразием форм, богатой структурой, сложными движениями отдельных узлов и внезапными изменениями, которые сменяются длительными периодами спокойного существования. Протуберанцы плотнее и холоднее окружающей их короны и имеют примерно такую же температуру, как и хромосфера. На возникновение и движение протуберанцев влияют магнитные поля. По-видимому, эти поля — основная причина всех активных явлений, происходящих в солнечной атмосфере.

С магнитными полями связана цикличность солнечной активности. Ее легко заметить, если день за днем подсчитывать имеющиеся на Солнце пятна. В начале цикла пятен совсем или почти совсем нет. Эта эпоха называется *минимумом*. Затем пятна появляются вдали от солнечного экватора. Постепенно их число, а также количество биполярных групп увеличивается, и пятна возникают все ближе и ближе к экватору. Через 3—4 года наступает *максимум* солнечных пятен, отличающийся наибольшим количеством активных образований на Солнце. Затем солнечная активность постепенно спадает, и примерно через 11 лет наступает минимум.

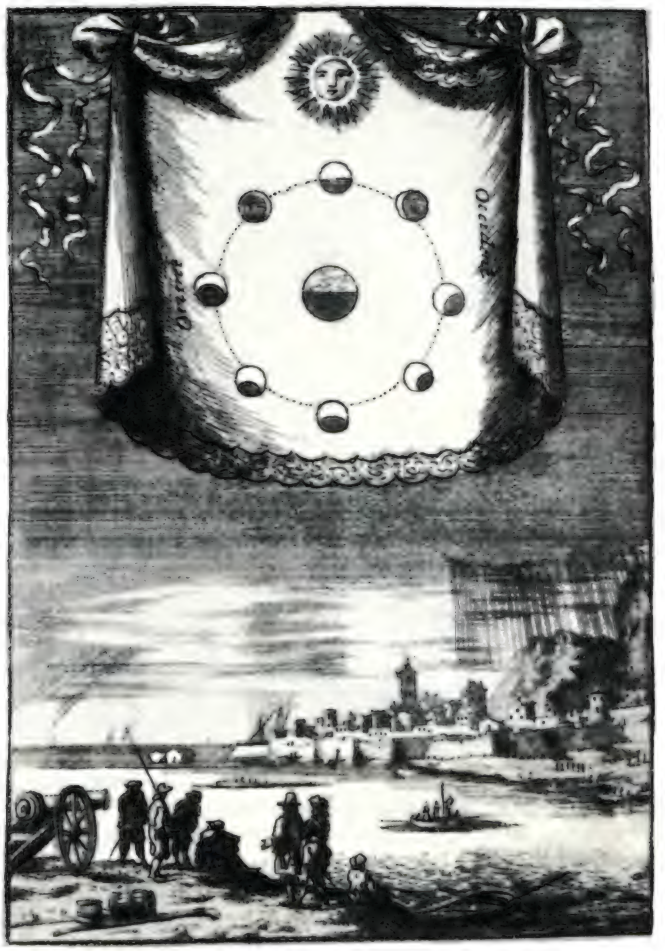
На протяжении всего цикла солнечной активности сохраняется одна и та же последовательность полярности пятен биполярных групп, причем противоположная в северном и южном полушариях Солнца. Так, например, если в северном полушарии в течение всего цикла все западные пятна групп (называемые ведущими) имеют северную полярность, то восточные пятна (хвостовые) имеют южную полярность. В южном полушарии — наоборот. В следующем цикле последовательность полярностей обязательно меняется на противоположную.

Периодичность солнечной активности пока еще остается увлекательной загадкой Солнца. Только в последние годы удалось приблизиться к ее решению. По-видимому, она связана со сложным взаимодействием ионизованного вещества Солнца и общего его магнитного поля. Результат этого взаимодействия — периодическое усиление магнитных полей, приводящее к появлению солнечных пятен и других активных образований.

Солнце — одна из бесчисленных звезд, самосветящихся горячих газовых шаров. Поэтому, изучая Солнце, мы познаем процессы, которые должны происходить и на многих других звездах, из-за удаленности пока еще недоступных такому подробному изучению.

Солнечные и лунные затмения

Солнечное затмение. Старинная гравюра.



Затмения Солнца относятся к таким явлениям природы, о моменте наступления которых заранее известно. Астрономы тщательно готовятся к наблюдениям, и в места, где они видны, отправляются специальные экспедиции.

...Наступает день затмения.

Природа живет своей обычной жизнью. В небе сияет Солнце. Ничто не предвещает грядущего события. Но вот на западном краю Солнца появляется ущерб. Он медленно увеличивается, и солнечный диск превращается в серп, обращенный выпуклостью к востоку. Солнечный свет постепенно ослабевает. Становится прохладнее. Солнечный серп превращается в тонкую светлую нить, и вдруг эта нить местами разрывается. Через несколько секунд за черным диском исчезают последние ослепительно яркие точки, оставшиеся от солнечного диска.

Это наступило полное солнечное затмение. На месте Солнца виден черный диск, вокруг которого вспыхивает узкое, но не ровное кольцо — хромосфера, окруженная серебристо-жемчужным сиянием — солнечной короной. От нее во все стороны расходятся радиальные струи и яркие лучи протяженностью в несколько солнечных радиусов. Иногда у края черного диска бывают видны выступы, напоминающие языки пламени, вырывающиеся из Солнца. Это солнечные протуберанцы (см. ст. «Солнце»).

Две, три, иногда пять минут длится необычная темнота. На небе становятся видимыми планеты и наиболее яркие звезды. Вдоль горизонта появляется кольцо оранжевого оттенка.

И также неожиданно вновь вспыхивают яркие солнечные лучи. В тот же миг разом исчезает вся эта необыкновенная картина. Солнце снова принимает вид серпа, но теперь уже повернутого выпуклостью к западу. Серп увеличивается, и уже через час в небе все как обычно.

Солнечное затмение знакомо человеку с глубочайшей древности. Но люди не знали, отчего оно происходит. Панический страх вызывало у них неожиданное, таинственное исчезновение лучезарного светила. В угасании Солнца днем люди видели проявление неведомых, сверхъестественных сил. У восточных народов существовало поверье, что во время затмения некое злое чудовище пожирает Солнце.

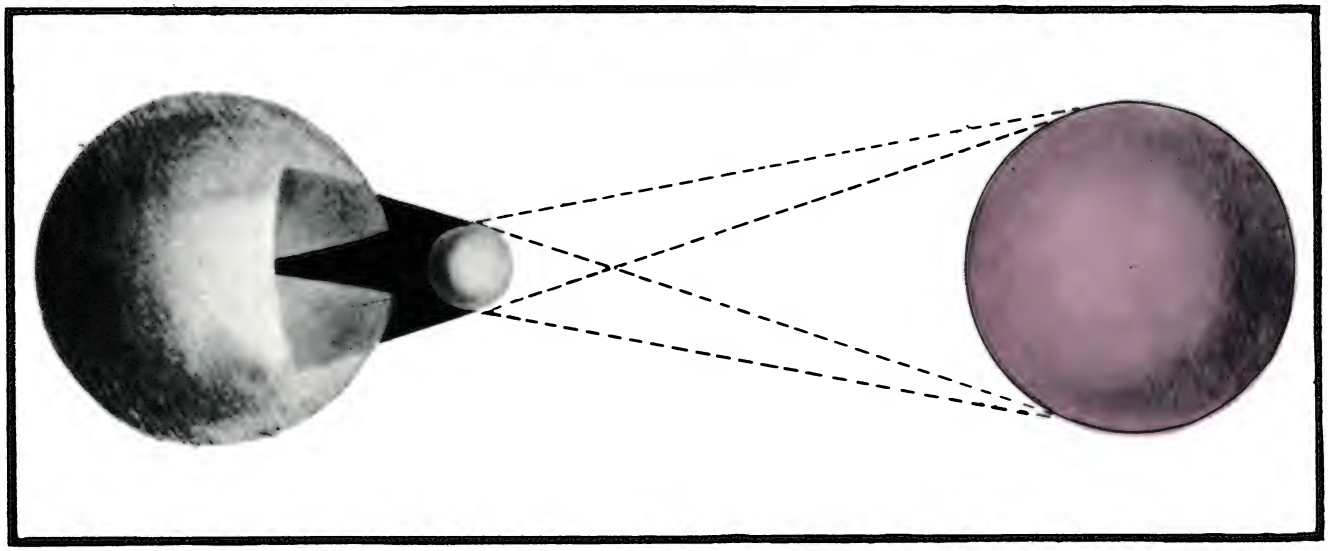
В русских летописях мы находим многочисленные записи о затмениях. Так, в Ипатьевской летописи говорится о затмении, упоминаемом в «Слове о полку Игореве».

Передовые люди разных времен старались развеять у народа страх, вызываемый затмениями. Например, Петр I обращался к ученым и должностным лицам с просьбой принять участие в распространении правильного объяснения ожидавшегося 1 мая 1706 г. солнечного затмения. Сохранилось его письмо к адмиралу Головину, в котором он писал: «Господин адмирал. Будущего месяца в первый день будет великое солнечное затмение. Того ради изволь сие поразгласить в наших людях, что когда оное будет, дабы за чудо не поставили. Понеже (поскольку.— *Ред.*), когда люди про то ведают прежде, то не есть уже чудо».

Что же такое солнечное затмение?

Во время солнечного затмения между Землей и Солнцем проходит Луна и скрывает его от нас. Земля, вращаясь в течение суток вокруг своей оси, одновременно движется вокруг Солнца и за год делает полный оборот. Луна движется вокруг Земли и полный оборот совершает за 27,32 сут. Взаимное расположение этих трех небесных тел все время меняется. Двигаясь вокруг Земли, Луна в определенные моменты времени оказывается между Землей и

Взаимное расположение Солнца, Земли и Луны во время солнечного затмения. Луна находится между Солнцем и Землей. В том месте, где тень Луны падает на Землю, Солнце затмевается Луной.



Солнцем. Но Луна — темный, непрозрачный твердый шар. Оказавшись между Землей и Солнцем, она закрывает Солнце. В это время Луна обращена к Земле своей неосвещенной стороной. Следовательно, солнечное затмение может произойти только во время новолуния. В полнолуние Луна проходит от Земли в стороне, противоположной Солнцу, и сама может попасть в тень, отбрасываемую земным шаром. Тогда мы будем наблюдать лунное затмение. В это же время с Луны можно наблюдать затмение Солнца Землей.

Среднее расстояние от Земли до Солнца — 149,6 млн. км, а от Земли до Луны — 400 тыс. км. Чем ближе предмет, тем большим он нам кажется. Луна расположена ближе к Земле, чем Солнце, почти в 400 раз, и в то же время ее диаметр меньше диаметра Солнца также приблизительно в 400 раз. Поэтому видимые размеры Луны и Солнца почти одинаковы. Луна может закрыть собой Солнце.

Расстояния Солнца и Луны от Земли не остаются постоянными, а слегка изменяются, так как орбита Земли вокруг Солнца и орбита Луны вокруг Земли не окружности, а эллипсы. С изменением расстояний между этими телами изменяются и их видимые размеры. Если в момент солнечного затмения Луна находится в наименьшем удалении от Земли, то лунный диск будет несколько больше солнечного. Луна целиком закроет Солнце, и затмение будет *полным*. Если же во время затмения Луна находится в наибольшем удалении от Земли, то она будет иметь несколько меньшие видимые размеры и закрыть Солнце целиком не сможет. Оставшийся незакрытым светлый ободок Солнца будет виден как яркое тоненькое кольцо вокруг черного диска Луны. Такое затмение называют *кольцеобразным*.

Казалось бы, солнечные затмения должны происходить ежемесячно, каждое новолуние. Однако этого не бывает. Если бы орбиты Земли и Луны лежали в одной плоскости, то в каждое новолуние Луна действительно оказывалась бы точно на прямой линии, соединяющей Землю и Солнце, и происходило бы затмение. На самом деле плоскость орбиты Земли вокруг Солнца и плоскость орбиты Луны вокруг Земли не совпадают между собой. Чаще всего во время новолуний Луна проходит или выше Солнца, или ниже.

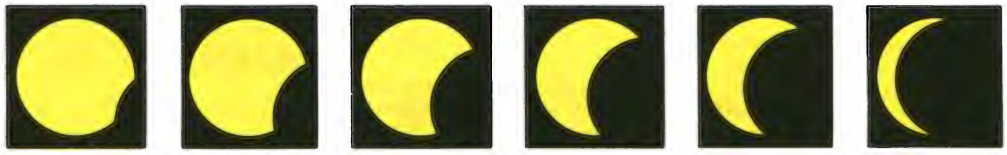
По этой же причине видимый путь Луны на небе не совпадает с тем путем, по которому движется Солнце. Эти пути пересекаются в двух противоположных точках — *узлах* лунной орбиты. Вблизи этих точек пути Солнца и Луны близко подходят друг к другу. И в том случае, когда новолуние происходит вблизи узла, оно сопровождается затмением.

Затмение будет полным или кольцеобразным, если в новолуние Солнце и Луна находятся почти в узле. Если же Солнце в момент новолуния окажется на некотором расстоянии от узла, то центры лунного и солнечного дисков не совпадут и Луна закроет Солнце частично. Тогда затмение будет *частным*.

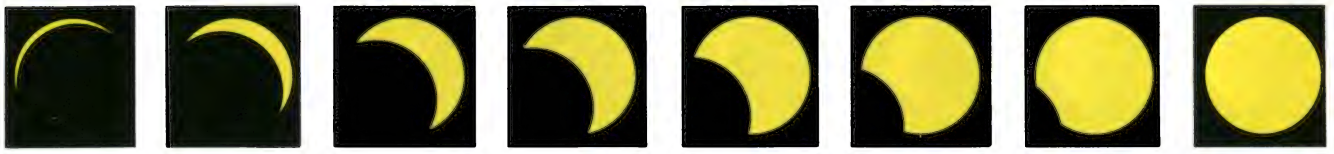
Луна, перемещаясь среди звезд с запада на восток, начинает закрывать Солнце с его западного края. Степень закрытия называется у астрономов *фазой* затмения.

Ежегодно бывает не менее двух солнечных затмений. Так было, например, в 1952 г.: 25 февраля —

Фотографии частных фаз солнечного затмения.



Цветные снимки Солнца во время полного затмения Солнца. Вверху слева — солнечная хромосфера. Виден красный выступ гигантского протуберанца. Вверху справа — внутренняя корона перед самым концом полной фазы. Внизу слева — солнечная корона. Внизу справа — солнечная корона в момент конца полной фазы. На краю хорошо видно яркое пятно — это так называемое явление «бриллиантового» эффекта или четок Бейли. Явление это возникает из-за неровности лунного края, когда через небольшие углубления проникают яркие солнечные лучи.



полное (наблюдалось в Африке, Иране, СССР) и 20 августа — кольцеобразное (наблюдалось в Южной Америке). А вот в 1935 г. было пять солнечных затмений. Это наибольшее число затмений, которое может быть в течение года.

Трудно представить себе, что солнечные затмения происходят так часто: ведь каждый из нас наблюдает их чрезвычайно редко. Объясняется это тем, что во время солнечного затмения тень от Луны падает не на всю Землю. Упавшая тень имеет форму эллипса, поперечник которого может достигать самое большее 270 км. Значит, тень покроет лишь ничтожно малую долю земной поверхности и в данный момент только на этой части Земли и будет видно полное солнечное затмение.

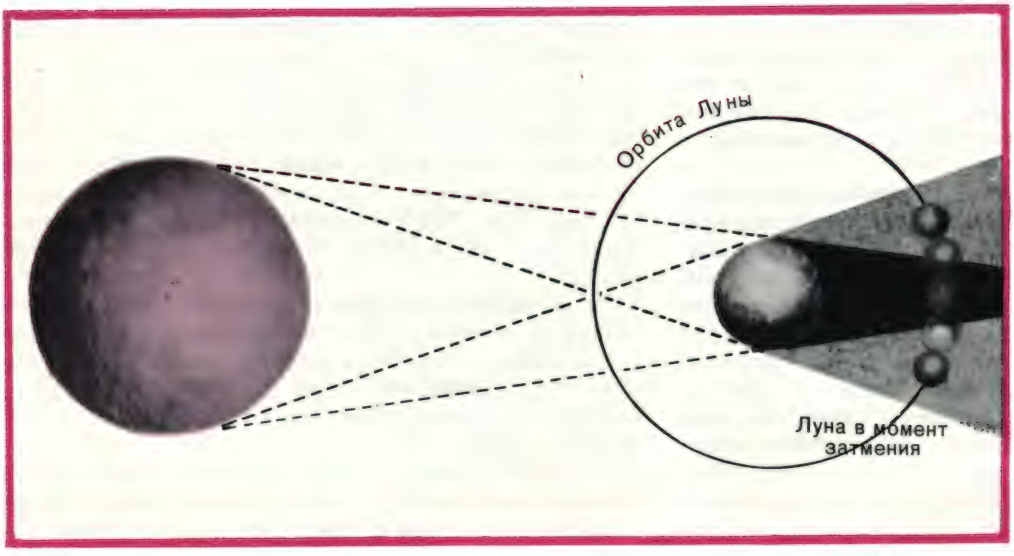
Как показано на рисунке (стр. 87), вокруг пятна лунной тени располагается область полутени, где затмение бывает частным. Поперечник области полутени — около 6—7 тыс. км. Но чем дальше от линии центрального затмения будет находиться наблюдатель, тем меньшая часть солнечного диска закроется для него Луной. Для наблюдателя же, находящегося вблизи края области полутени, будет закрыта лишь незначительная часть Солнца и такое затмение может вообще пройти незамеченным.

Луна движется по своей орбите со скоростью около 1 км/с, т. е. быстрее ружейной пули. Следовательно, ее тень с большой скоростью движется по земной поверхности и не может надолго закрыть какое-то одно место на земном шаре. Поэтому фаза полного затмения длится всего несколько минут, чаще всего две-три минуты, а в самых благоприятных условиях — около семи минут.

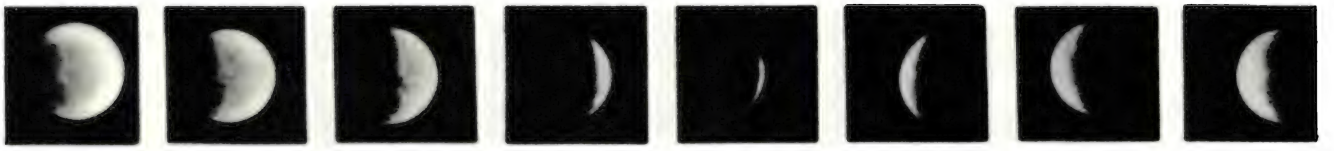
Таким образом, лунная тень, двигаясь по Земле, описывает узкую, но длинную полосу, на которой последовательно наблюдается полное солнечное затмение. Протяженность полосы солнечного затмения иногда достигает нескольких тысяч километров. И все же площадь, покрываемая тенью, оказывается незначительной по сравнению со всей поверхностью Земли. Кроме того, в полосе полного затмения часто оказываются океаны, пустыни и малонаселенные районы Земли.

Можно ли точно предсказать момент наступления затмения? Уже в древности установили, что через 6585 сут 8 ч, что составляет 18 лет 11 сут 8 ч, затмения повторяются. Происходит так потому, что по истечении этого времени Луна оказывается в прежнем положении относительно узлов орбиты и относительно Солнца, так что все бывшие за этот период затмения наблюдаются снова в прежней последовательности. Этот промежуток назвали *саросом,* что значит «повторение». В течение одного сароса бывает 43 солнечных затмения, из них 15 частных, 15 кольцеобразных и 13 полных. Прибавляя к датам затмений, наблюдавшихся в течение одного сароса, 18 лет 11 сут и 8 ч, мы можем предсказать наступление затмений в будущем. Например, уже упоминавшееся затмение 25 февраля 1952 г. повторилось 7 марта 1970 г., затем будет наблюдаться 18 марта 1988 г. и т. д.

Однако в саросе содержится не целое число суток, а 6585 сут и 8 ч. За эти 8 ч Земля повернется на треть оборота и будет обращена к Солнцу другой частью своей поверхности. Поэтому следующее затмение будет наблюдаться в другом районе



Взаимное расположение Солнца, Земли и Луны во время лунного затмения. Земля находится между Солнцем и Луной.



Земли. Так, полоса затмения 1952 г. прошла через Центральную Африку, Аравию, Иран, СССР. Затмение 1970 г. наблюдалось как полное жителями Мексики и Флориды (США).

В одном и том же месте Земли полное солнечное затмение наблюдается раз в 250—300 лет.

Итак, предсказать день затмения легко. Определить же точное время его наступления и условия видимости — трудная задача; для решения ее астрономы в течение нескольких столетий изучали движение Земли и Луны. В настоящее время затмения предсказывают точно. Выполняется эта большая вычислительная работа на электронных вычислительных машинах. В нашей стране предвычисления затмений ведутся в Институте теоретической астрономии в Ленинграде.

Астрономы вычислили условия видимости солнечных затмений на много лет вперед. До конца XX столетия на территории СССР будут наблюдаться 3 полных солнечных затмения. 10 июля 1972 г. полоса затмения пересекла Чукотский и Камчатский полуострова; 31 июля 1981 г. лунная тень пробежит от берегов Черного моря через Кавказ, Каспийское море, Западную и Восточную Сибирь до острова Сахалин; 22 июля 1990 г. полоса полной фазы пройдет от Финляндии по Северному Ледовитому океану вблизи северных берегов нашей Родины и пересечет Чукотский полуостров, и, наконец, полоса затмения 9 марта 1997 г. пересечет Якутскую АССР с севера на юг и дойдет до границы с Монгольской Народной Республикой. В средней полосе Европейской части СССР полное солнечное затмение будет наблюдаться лишь в 2126 г.

В статье о Солнце рассказано, какую роль играет оно в нашей жизни и как важно детальное и всестороннее изучение его строения и явлений солнечной активности. Во время полных солнечных затмений сама природа дает нам случай для изучения внешних слоев солнечной атмосферы — хромосферы и короны.

Затмение — лучший момент для определения плотности вещества короны и изучения происходящих в ней атомных процессов. Поскольку вещество короны способно излучать радиоволны дециметрового и метрового диапазонов, в полосе видимости полного затмения устанавливают в числе других приборов радиотелескопы и с их помощью слушают «радиоголос» Солнца. Во время затмения следят за изменениями в радиоизлучении Солнца. Радиотелескопы очень чувствительные приборы: именно они позволили во время полной фазы затмения установить, что солнечная корона простирается на миллионы километров.

Для наблюдений затмений Солнца астрономам подчас приходится отправляться в далекие экспедиции. Так, например, в 1947 г. экспедиция советских астрономов и физиков ездила в Бразилию. В полосу видимости кольцеобразного затмения 31 июля 1962 г. группе советских астрономов пришлось пробираться на вездеходах сквозь африканские джунгли в далекой Республике Мали, а для наблюдения полного затмения 7 марта 1970 г. советские ученые побывали в Мексике.

Затмение продолжается всего несколько минут. Чтобы лучше использовать их, астрономы широко применяют фотографию.

В наши дни наблюдения ведутся не только с наземных станций. Астрономы используют современную технику: авиацию и ракеты. Воздушный лайнер, превращенный в настоящую «летающую» обсерваторию, поднимается на высоту, где уже нет никаких облаков, и устремляется вслед за тенью Луны. Это позволяет значительно «удлинить» время наблюдения полной фазы.

Еще продолжительнее и с большей высоты можно наблюдать затмение с помощью ракет, снабженных соответствующей измерительной аппаратурой. Такие запуски ракет в зону полной фазы делались в нашей стране и в США. Ракеты особенно удобны для измерения изменений степени ионизации в атмосфере Земли — ионосфере в моменты, когда Луна перекрывает поток заряженных частиц, излучаемых атмосферой Солнца. Наблюдения с помощью ракет и авиации не зависят от погоды и могут проводиться в труднодоступных для экспедиции районах Земли.

Солнечное затмение сопровождается рядом любопытных явлений в окружающей природе. По мере уменьшения светящегося серпа Солнца тени от разных предметов делаются более резкими. Когда Солнце будет иметь вид узкого серпа, у предметов, расположенных параллельно этому серпу, тени станут особенно резки, а полутеней почти не будет. При других положениях предметов относительно серпа Солнца тени будут несимметричными (это очень легко заметить по тени от растопыренных пальцев руки).

За несколько десятков секунд до начала полного затмения, а также после его окончания по поверхности Земли проносятся волнообразные, «бегущие» тени. Они напоминают рябь на воде. Это струйки воздуха, освещенные тонким, но ярким пучком солнечных лучей.

Во время затмения очень интересно наблюдать за животными: они ведут себя необычно. Напуганные внезапно наступившей темнотой, звери и птицы за-

Фотографии частных фаз лунного затмения.

молкают и спешат укрыться на ночной покой, многие растения свертывают листья.

Солнечное затмение может дать богатый материал для наблюдений юным любителям природы. Учащимся совсем нетрудно организовать наблюдения за изменениями температуры воздуха, влажности, атмосферного давления, окраски облаков. Фотолюбители смогут получить снимки частных фаз, полной фазы и окружающего ландшафта. Во время полного и частного затмения очень важно точно отмечать начало и конец его. Эти данные позволят сравнить предварительно вычисленные начало и конец затмения с действительными и помогут уточнить теорию движения Луны. В местах, близких к границе тени и полутени, отметки начала и конца затмения помогут также проверить и уточнить теорию предвычислений затмений.

Если вам когда-нибудь представится случай наблюдать полное солнечное затмение, не пропустите его. Только помните: смотреть на Солнце невооруженным глазом или в бинокль нельзя, можно испортить зрение. Смотреть надо через закопченное стекло или проявленную на полном свету фотографическую пластинку. На солнечную же корону можно смотреть невооруженным глазом, но лучше видно ее в бинокль.

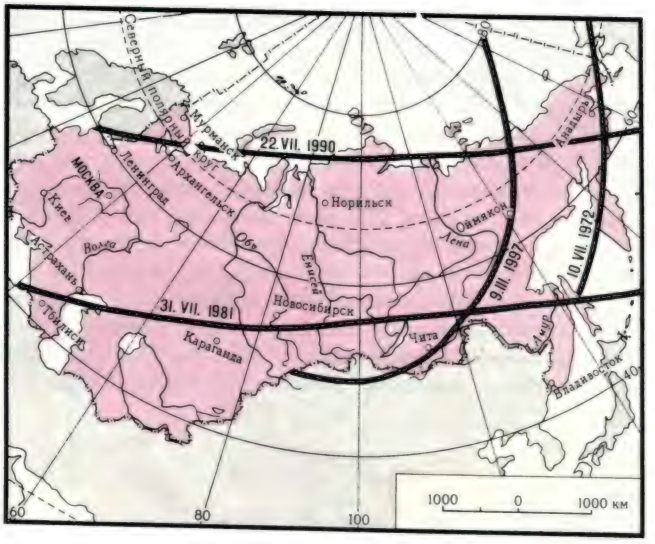
К числу «необыкновенных» небесных явлений относятся также лунные затмения. Происходят они так. Полный светлый круг Луны начинает медленно затемняться с восточной стороны. Очень редко, однако, свет Луны исчезает совсем: чаще явление имеет вид, как будто Луна скрывается за какой-то красноватый просвечивающий диск. Постепенно Луна как бы все далее уходит за этот диск, очертание которого неизменно остается частью круга, и примерно через час скрывается полностью. Луна меркнет и становится красно-бурого цвета.

Лунные затмения происходят потому, что во время полнолуния между Луной и Солнцем находится Земля, которая перехватывает солнечные лучи, и на Луну они не попадают.

Диаметр Земли больше диаметра Луны почти в 4 раза, и потому тень от Земли даже на расстоянии Луны от Земли более чем в 2,5 раза превосходит размеры Луны, значит, Луна может целиком погрузиться в земную тень. Наибольшая продолжительность полного лунного затмения 1 ч 40 мин.

По той же причине, по которой солнечные затмения бывают не каждое новолуние, лунные затмения происходят не каждое полнолуние. Наибольшее число лунных затмений в году — 3, но бывают годы, когда совсем нет затмений; таким был, например, 1951 год.

Карта пути лунной тени при полных солнечных затмениях.



Лунные затмения повторяются через тот же промежуток времени, что и солнечные. В течение сароса бывает 28 лунных затмений, из них 15 частных и 13 полных. Как видите, число лунных затмений в саросе значительно меньше солнечных, и все же лунные затмения можно наблюдать чаще солнечных. Это объясняется тем, что Луна, погружаясь в тень Земли, перестает быть видимой на всей не освещенной Солнцем половине Земли. Значит, каждое лунное затмение видно на значительно большей территории, чем любое солнечное.

В зависимости от того, насколько далеко от узла лунной орбиты происходит полнолуние, Луна в большей или меньшей степени погрузится в земную тень.

Даже во время полного затмения Луна, как уже говорилось, не исчезает совершенно, а бывает все же видна: часть солнечных лучей проходит сквозь земную атмосферу, преломляется в ней, входит внутрь земной тени и попадает на Луну. Так как из состава белого солнечного света красные лучи менее всего рассеиваются и ослабляются в атмосфере, то Луна во время затмения и приобретает медно-красный или бурый оттенок. Густота красного цвета бывает различна при отдельных затмениях и зависит от состояния земной атмосферы в тех местах, через которые проходят солнечные лучи на границе освещенной и неосвещенной сторон Земли.

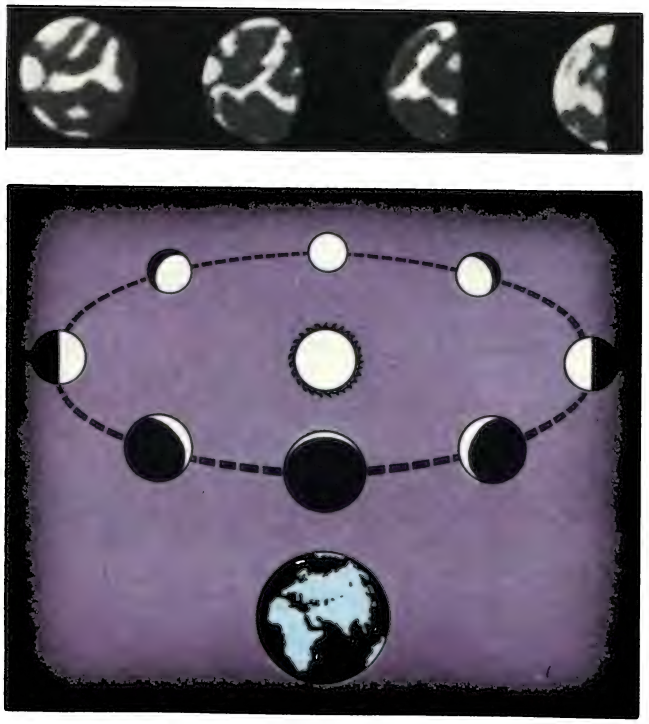
Во время лунных затмений любители могут наблюдать за изменением окружающего ландшафта и фотографировать частные фазы затмения.

Планеты Солнечной системы

В Солнечной системе 9 больших планет. Они имеют шарообразную форму. Планеты не самосветящиеся тела и видны только потому, что освещены Солнцем.

Находясь на Земле, можно исследовать физические и химические характеристики планет по особенностям приходящего к нам излучения в различных длинах волн. Но это чрезвычайно трудная задача — из-за малых угловых размеров планет вследствие их огромной удаленности, из-за слабости приходящего к нам излучения и в силу различных помех, создаваемых земной атмосферой. В последние годы получены новые важные данные в области изучения планет. О некоторых из них вместе с общими сведениями о планетах рассказано в этой статье.

Вверху — зарисовки Меркурия в разных фазах. Внизу — схема фаз Меркурия.



Меркурий

Меркурий — самая близкая к Солнцу планета — движется вокруг дневного светила на среднем расстоянии от него 57,9 млн. км, т. е. в 2,5 раза ближе к Солнцу, чем Земля. Эллиптическая орбита Меркурия отличается от круговой значительно больше, чем орбиты всех остальных планет, кроме Плутона: в перигелии Меркурий подходит к Солнцу на расстояние 45,9 млн. км. В афелии расстояние увеличивается до 69,7 млн. км, а затем снова начинает убывать, и цикл повторяется с периодичностью в 88 наших суток: такова продолжительность одного полного оборота Меркурия по орбите.

Для земного наблюдателя Меркурий удаляется от Солнца не более чем на 28°. Только вблизи таких крайних положений планету можно увидеть в лучах вечерней или утренней зари. Для невооруженного глаза Меркурий — светлая точка, а в сильный телескоп у него вид серпика или неполного круга. Изменения вида (фаз) планеты с течением времени показывают, что Меркурий — это шар, с одной стороны освещенный Солнцем, а с другой — совершенно темный. Диаметр этого шара — 4870 км.

Меркурий окружен атмосферой. Она очень разрежена по сравнению с воздухом, которым мы дышим, и отличается от него по химическому составу. Недавно в спектре Меркурия обнаружены полосы поглощения углекислого газа CO_2. Атмосферное давление у поверхности планеты приблизительно в 1000 раз меньше, чем у поверхности Земли.

Поверхность Меркурия в солнечных лучах кажется яркой, но измерения показали, что она темно-бурая и похожа на лунную.

При особо хороших условиях видимости на Меркурии заметны темные и светлые пятна. Неоднократно предпринимались попытки составить карту расположения этих пятен и найти период суточного вращения планеты. Карта была составлена, но в процессе решения второй задачи из неизменности видимого положения пятен на диске планеты был сделан неправильный вывод, что Меркурий повернут к Солнцу всегда одной и той же стороной. На самом же деле он вращается, но так медленно, что его осевое вращение трудно заметить в течение короткого промежутка времени, благоприятного для наблюдений Меркурия. К следующему периоду наилучшей видимости Меркурий успевает повернуться вокруг своей оси на *целое число* оборотов как по отношению к Солнцу, так и по отношению к Земле и занять прежнее положение, такое же, как если бы он вовсе не вращался.

Новые результаты принес радиолокационный (или радарный) метод исследования, сущность которого состоит в облучении далеких предметов направленным пучком радиоволн и в приеме отраженного радиоэха. Радиолокация позволяет с высокой точностью измерить расстояние до отражающего предмета по времени прохождения радиоволн и найти его скорость в направлении вдоль луча зрения. Радиолокационное измерение лучевой скорости основано на

Серп Венеры.

Вверху — радиолокационная карта Венеры.

Внизу — фотография Земли из космоса.

использовании принципа Доплера, в соответствии с которым длина волны электромагнитного излучения искажается пропорционально величине скорости движения отражающего объекта: уменьшается при наблюдении приближающегося к нам предмета и увеличивается для удаляющегося.

Если первичный радиолокационный импульс был заключен в очень узкой полосе по шкале длин волн, то радиоэхо от планеты может содержать радиоволны как с возросшей, так и с уменьшенной длиной волны и имеет увеличенную ширину по той же шкале. Это понятно: ведь восточный и западный края вращающейся планеты имеют различную скорость вдоль луча зрения. Зная эту разность в километрах в секунду (по ширине спектра радиоэха) и линейное расстояние между восточным и западным краями планеты, вычисляют скорость ее осевого вращения.

Меркурий, по данным радиолокации, совершает один оборот вокруг своей оси относительно звезд за 59 сут. Ось вращения приблизительно перпендикулярна к плоскости орбиты планеты. Направление осевого вращения у Меркурия, как и у большинства планет, совпадает с направлением вращения по орбите. За один оборот по орбите Меркурий успевает повернуться вокруг своей оси ровно на полтора оборота, а по отношению к Солнцу — только на 0,5 обо-

рота. Таким образом, солнечные сутки на Меркурии длятся ровно два меркурианских года и насчитывают 176 земных суток.

Длительность дня и ночи на Меркурии приводит к резкому различию температуры между полуденными и полуночными участками, а близость планеты к Солнцу и ее темная поверхность — к высоким дневным температурам. В подсолнечной точке Меркурия (т. е. в пункте, где Солнце находится в зените) температура поверхности достигает 440—500°С.

Очень высокая дневная температура на Меркурии говорит об отсутствии жидкой воды на его поверхности. В таких природных условиях едва ли может существовать жизнь.

Венера

Венера — ближайшая к Земле планета Солнечной системы. Ее орбита лежит внутри орбиты Земли, и кратчайшее расстояние между ними 39 млн. км. Период обращения Венеры вокруг Солнца равен 225 сут. По размерам Венера почти такая же, как земной шар. Ее линейный диаметр равен 12 100 км. Но на расстоянии даже «всего» 39 млн. км видимый угловой диаметр ее оказывается около 1′ дуги. Поэтому только люди с очень острым зрением могут видеть Венеру не как точку, а как маленький серпик, изменяющий свои фазы. В телескоп этот серп виден хорошо, но поверхность планеты всегда скрыта облаками. Облака плавают в газовой оболочке Венеры, открытой М. В. Ломоносовым в 1761 г. Атмосфера Венеры резко отличается по химическому составу от земной и совершенно непригодна для дыхания. По данным спектральных исследований, она состоит из углекислого газа CO_2 с небольшой примесью окиси углерода CO и содержит HCl и HF, водные растворы которых известны под названием соляной кислоты и фтористоводородной кислоты. На Земле эти ядовитые соединения встречаются в природных условиях только в составе продуктов вулканических извержений.

Астрономическая спектроскопия, как правило, не дает возможности обнаружить в атмосферах планет инертные, или «благородные», газы и азот, даже если они там присутствуют. Не могли определить и точную величину атмосферного давления у поверхности планеты. Чтобы получить надежную научную информацию, нужно было провести измерения непосредственно на Венере. В октябре 1967 г. с борта советской автоматической межпланетной станции «Венера-4» во время плавного снижения спускаемого аппарата в атмосфере Венеры впервые была передана на Землю научная информация. Следующим этапом были полеты станций «Венера-5» и «Венера-6». Приборы показали, что атмосфера «утренней звезды» состоит приблизительно на 97% из углекислого газа, на долю азота приходится не более 2%, а кислорода — не более 0,1%.

В глубоких слоях атмосферы Венеры спускаемые аппараты подверглись действию высокой температуры и высокого давления. Передача телеметрической информации прервалась на высоте около 20 км при давлении 2,7 МПа (27 атм) и температуре 325°С.

Изучение атмосферы вплоть до самого «дна» и проведение измерений непосредственно на поверхности Венеры впервые осуществила советская автоматическая станция «Венера-7». Чтобы приборы спускаемого аппарата не успели перегреться до вхождения в еще не исследованные самые нижние слои атмосферы, программа спуска была изменена. Верхнюю и среднюю части пути в атмосфере планеты «Венера-7» прошла значительно быстрее благодаря изменениям в конструкции парашютной системы. После того как аппарат совершил посадку, сигналы с него продолжали поступать еще в течение 23 мин. Во время спуска и после посадки передавалась информация о температуре окружающей среды. По мере снижения температура постепенно возрастала, на поверхности она составила 475±20°С при давлении 9±1,5МПа (90±15 атм). Все эти измерения были проведены на ночной стороне Венеры.

По данным наземных радиоастрономических измерений, температуры ночного и дневного полушарий Венеры почти одинаковы. Неожиданным оказалось отсутствие значительной разницы в температуре поверхности экваториальных и полярных областей. Причиной этого могут быть интенсивные процессы переноса тепла в толстой и плотной атмосфере. Температура облачного покрова значительно ниже и составляет около −40°С. Химический состав частиц, образующих облака Венеры, не установлен.

Из-за сплошной облачности на Венере определить период осевого вращения планеты оптическими методами не удалось. Его определили только радиолокационным методом. Один полный оборот Венеры по отношению к звездам равен 243 сут.

Ось вращения Венеры направлена почти в точности к полюсу орбиты; по различным определениям, наклон экватора к плоскости орбиты у Венеры составляет 2—4°. Суточное вращение Венеры происходит не в прямом, а в обратном направлении, т. е. в направлении, противоположном движению

планеты по орбите вокруг Солнца. Солнечные сутки на поверхности Венеры почти в 117 раз длиннее наших.

Используя луч радиолокатора, который проникает сквозь облака, предприняли несколько попыток построить карту поверхности Венеры. Задача далеко не проста: нельзя направить радиоимпульс только на отдельный участок поверхности Венеры, угловой диаметр которой при наблюдениях с Земли меньше, чем ширина радиолокационного луча. Тем не менее остроумная методика позволяет рассортировать отраженный сигнал на отдельные части, принадлежащие разным участкам планеты. Для этого используют разделение каждого радиоэха на отдельные «порции», различающиеся между собой по времени возвращения на Землю. Прежде всего отраженный радиоимпульс приходит к нам от ближайших частей поверхности шара Венеры — от центра ее диска, это начальная часть записи радиоэха на графике, где слева направо идет шкала времени, а снизу вверх отмечается мощность сигнала. Заключительная часть записи радиоэха принадлежит, очевидно, самым краям диска планеты как наиболее удаленным частям ее полушария, обращенного к нам в момент наблюдений. Все промежуточные части радиоэха принадлежат отдельным кольцевым зонам на поверхности Венеры, удаленным от центра диска на разное расстояние, пропорционально времени задержки от начала до соответствующей части радиоэха.

Можно отделить одну от другой и те части радиоэха, которые имеют одно и то же время задержки и принадлежат одной и той же кольцевой зоне на планете, но разным ее участкам. Для этого разделение по времени задержки дополняют разделением по величине доплеровского смещения длины волны. Разбивая запись радиоэха на части по шкале длин волн, мы тем самым делим диск планеты на участки по величине скорости их собственного движения вдоль луча радиолокатора. Другими словами, мы выделяем на диске планеты узкие полоски, параллельные оси ее суточного вращения. Комбинация отбора по двум признакам — по времени задержки и по длине волны — позволяет выделить часть радиоэха, принадлежащую пересечению соответствующей полоски с соответствующей кольцевой зоной. При этом выделяются не одна, а две маленькие площадки. Остается неопределенность: которой из этих двух площадок на планете принадлежит бо́льшая доля выделенной таким способом части радиоэха? Разрешить эту неопределенность позволило применение так называемого радиоинтерферометра (два радиотелескопа, удаленных друг от друга на значительное расстояние и работающих как один инструмент).

Таким сложным способом была построена радиолокационная карта Венеры (см. стр. 93). Это карта расположения областей с различным коэффициентом отражения радиоволн с длиной волны 3,8 см. Авторы эксперимента считают: природа аномально ярких районов свидетельствует скорее всего о том, что яркие области имеют более неровную структуру, чем темные, и менее вероятно, что причина различия яркости заключается в различиях материала поверхности или в разности их уровней, приводящей к неодинаковому поглощению радиоволн в газовой оболочке Венеры.

Земля

Многие свойства земного шара доступны непосредственному изучению методами геофизики, потому что мы живем на его поверхности. Но некоторые «глобальные» характеристики, например диаметр и полярное сжатие планеты, строение крупных массивов облачности, особенности атмосферной циркуляции и ряд других, было бы легче изучать, смотря на Землю со стороны.

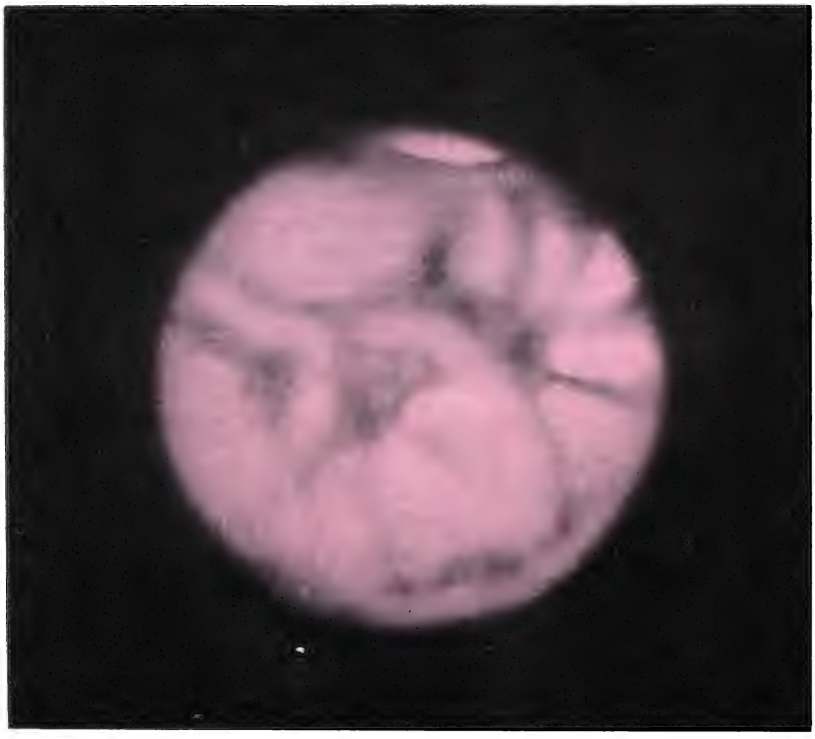
Данные о сложных особенностях суточного вращения земного шара и характеристики земной орбиты найдены при помощи астрономических наблюдений. Они помогли и построению географических карт, основанному на определении координат отдельных пунктов.

А знаете ли вы, почему форма Земли и других планет шарообразная? Любое небесное тело достаточно крупных размеров приобретает такую форму под действием силы своего собственного притяжения. На Земле не могут существовать неровности, заметно искажающие ее шарообразность, например выступы высотой хотя бы в 0,1 радиуса планеты: они не выдержат собственной тяжести, разрушатся и осядут, раздавив свои нижние слои. Ведь средняя величина радиуса Земли составляет 6371 км. А как же горы? Высочайшие горные хребты на большом школьном глобусе следовало бы изобразить в виде шероховатостей высотой не более $^1/_3$ мм.

Центробежная сила суточного вращения Земли поддерживает более чем 20-километровый избыток экваториального радиуса по сравнению с полярным.

Из величины ускорения свободного падения найдена масса Земли: $6 \cdot 10^{24}$ кг, что соответствует средней плотности вещества — 5500 кг/м^3 (5,5 г/см^3). Плотность земной коры значительно меньше. Это

Марс.



Кратеры на поверхности Марса.

подтверждает теоретические выводы о более высокой плотности вещества в глубоких недрах.

Земля, подобно другим планетам, движется вокруг Солнца по эллиптической орбите, большую полуось которой (или среднее расстояние между центрами Земли и Солнца) принято считать *астрономической единицей* длины (а. е.) для измерения расстояний между небесными телами в Солнечной системе. По новейшим определениям, 1 а. е.=149 597 892,0± ±1,5 км. Высокие требования к точности измерения этой величины вызваны потребностями космонавтики.

Истинное расстояние Земли от Солнца в различных точках орбиты неодинаковое, в перигелии (3 января) оно приблизительно на 2,5 млн. км меньше, а в афелии (3 июля) — настолько же больше.

Плоскость земной орбиты в астрономии принята за основную и называется *плоскостью эклиптики*. а ее проекция на звездное небо называется *линией эклиптики* или просто *эклиптикой*.

Один оборот по орбите Земля завершает за год, обращаясь к Солнцу своим Северным полушарием в одних участках орбиты, а Южным — в других.

Ось суточного вращения Земли отклонена от перпендикуляра к плоскости земной орбиты на угол 23°27′

Земной шар своим притяжением удерживает возле себя атмосферу, состоящую преимущественно из азота и кислорода с примесью аргона и углекислого газа и с незначительным содержанием водорода и других элементов и соединений. Атмосферное давление на уровне поверхности океана составляет при нормальных условиях приблизительно 101 325 Па (1013 мб). Полагают, что земная атмосфера сильно изменилась в процессе эволюции: обогатилась кислородом и приобрела современный состав в результате длительного химического взаимодействия с горными породами и при участии биосферы, т. е. растительных и живых организмов.

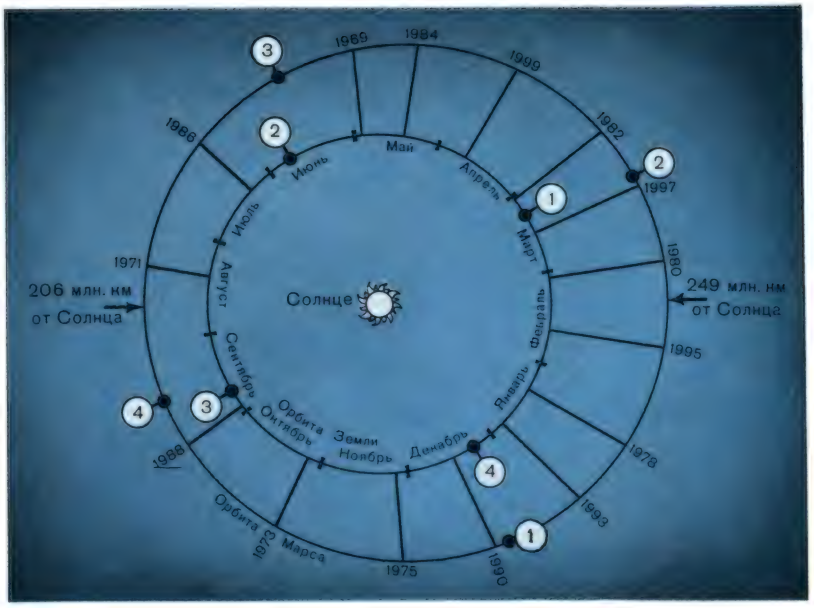
Большое влияние на многие процессы, происходящие на нашей планете, оказывает гидросфера, или Мировой океан, поверхность которого в 2,5 раза больше площади суши.

Земной шар обладает магнитным полем. За пределами плотных слоев атмосферы он опоясан невидимыми тучами из очень быстро движущихся частиц высоких энергий. Это так называемые *пояса радиации*.

Строение и свойства поверхности нашей планеты, ее оболочек и недр, магнитного поля и поясов радиации исследуются комплексом геофизических наук.

Спутник Марса — Фобос. На поверхности видны кратеры.

Схема противостояний Марса.



Марс

Марс — последняя из четырех ближайших к Солнцу планет, похожих в какой-то мере на Землю и потому называемых *планетами земной группы*. Марс значительно меньше Земли. Диаметр его приблизительно 6800 км, масса примерно в $\frac{1}{10}$ раз меньше массы земного шара, ускорение свободного падения на его поверхности в 2,6 раза меньше, чем на Земле.

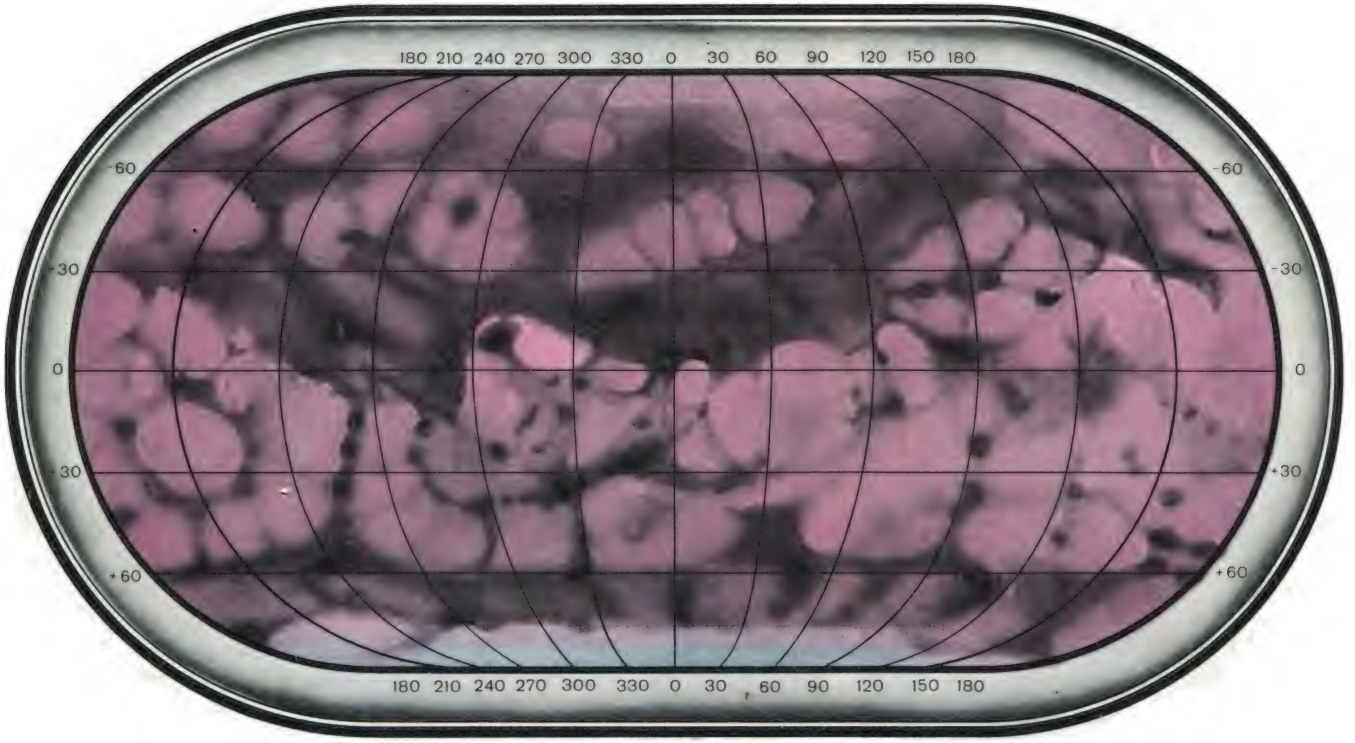
Марс движется на среднем расстоянии от Солнца 227,8 млн. км и затрачивает на один оборот по орбите 687 земных суток. Такова продолжительность марсианского года, но марсианских дней и ночей в нем содержится 668, так как марсианские сутки (период осевого вращения Марса) приблизительно на 40 мин длиннее наших. Продолжительность светлого времени дня и полуденная высота Солнца над горизонтом в каждом месте поверхности Марса изменяются на протяжении года примерно так же, как и на Земле, из-за почти одинакового у этих планет наклона плоскости экватора к плоскости орбиты (угол между ними составляет у Земли 23°27′, а у Марса около 25°).

Когда Марс приходит в ближайшую к Земле точку своей орбиты (это повторяется каждые 780 суток), он, в отличие от Венеры, обращен к нам своим освещенным, дневным полушарием и виден в направлении, противоположном Солнцу. Тогда говорят, что он находится в *противостоянии*. В это время он бывает столь ярким, что его можно с первого взгляда отличить от других светил по красновато-оранжевому цвету. Не все противостояния Марса достаточно благоприятны для его наблюдений. Расстояние между земной орбитой и орбитой Марса в различных участках неодинаково.

В 1965 г. Земля прошла, обгоняя своего небесного брата, в 100 млн. км от него, а в августе 1971 г. произошло сближение до 56 млн. км. Такие наиболее «тесные» противостояния, как в 1971 г., случаются один раз в 15—17 лет и называются *великими*.

Предельно маленькие детали, которые можно различить в сильный телескоп на поверхности Марса во время великого противостояния при исключительно благоприятных атмосферных условиях, имеют размер 60 км. Что видно на Марсе в телескоп? Легче всего заметить на его поверхности белую полярную шапку; иногда бывают видны сразу две. Они охватывают районы северного и южного полюсов, поочередно увеличиваясь и уменьшаясь на протяжении марсианского года. Когда одна растет, другая уменьшается. Более $\frac{2}{3}$ поверхности планеты занимают сравнительно светлые участки красновато-охристого цвета — «материки», остальную площадь занимают различного оттенка темные участки — «моря». Это чисто условные названия, так же как на Луне.

Карта Марса, составленная по наземным наблюдениям в телескоп (конец XIX — начало XX в.).



Временами мутная желтая пелена заволакивает огромные пространства на Марсе, скрывая на своем пути даже обширные темные области и полярные шапки. Принято считать, что это грандиозные тучи пыли, образующиеся во время бурь.

Облака — один из признаков существования газовой оболочки Марса. Другой ее признак — поверхность планеты окутана дымкой, светлой и непрозрачной при наблюдении через синий светофильтр и на фотоснимках, полученных в ультрафиолетовых

Таблица противостояний Марса

Дата противостояния	Дата минимальной дистанции	Минимальное расстояние (в млн. км)	Видимый диаметр Марса (в секундах дуги)	Склонение (в градусах)
1971, 10 августа	12 августа	56,2	24,9	— 22
1973, 25 октября	17 октября	65,2	21,5	+ 10
1975, 15 декабря	8 декабря	84,6	16,6	+ 26
1978, 22 января	19 января	97,7	14,3	+ 24
1980, 25 февраля	26 февраля	101,3	13,8	+ 14
1982, 31 марта	5 апреля	95,0	14,7	— 1
1984, 11 мая	19 мая	79,5	17,6	— 18
1986, 10 июля	16 июля	60,4	23,2	— 28
1988, 28 сентября	22 сентября	58,8	23,8	— 2
1990, 27 ноября	20 ноября	77,3	18,1	+ 23
1993, 7 января	3 января	93,7	14,9	+ 27
1995, 12 февраля	11 февраля	101,1	13,9	+ 18
1997, 17 марта	20 марта	98,6	14,2	+ 5
1999, 24 апреля	1 мая	86,5	16,2	— 11

Участок поверхности Марса. Снимок с искусственного спутника Марса.

лучах. Свойства этой дымки, которую называют *фиолетовым слоем* атмосферы Марса, изменчивы, и вопрос о ее природе неясен.

Попытки определить химический состав марсианской атмосферы путем спектральных наблюдений привели к открытию на Марсе углекислого газа. По современным оценкам, его *количество* эквивалентно слою толщиной 78±10 м при давлении в 100 кПа (1 атм). Но истинная толщина марсианской газовой оболочки составляет сотни километров, а среднее давление на поверхности планеты 550—650 Па (5,5—6,5 мб). Это соответствует давлению в земной атмосфере на высоте 40 км. Большая высота марсианских гор (до 10 км) и глубокие впадины (до 2 км) увеличивают диапазоны давления у поверхности от 200 Па до 1 кПа (от 2 до 10 мб).

В атмосфере Марса обнаружен водяной пар. Его количество очень мало и соответствует толщине от 5 до 60 мкм осажденного слоя воды.

Низкая абсолютная влажность атмосферы не может служить достаточным признаком того, что на Марсе мало воды, например, в виде льда. Дело в том, что холодная атмосфера, по законам физики, не может содержать много водяного пара. При понижении температуры происходит насыщение, а затем конденсация и выпадение осадков.

На Марсе очень холодно. Даже в тропическом поясе поверхность планеты еще до захода Солнца остывает до образования на ней инея. Ночью там стоит сильный мороз, и только в околополуденное время поверхность нагревается до температур выше 0°С. В 1969 г. были предприняты дистанционные измерения температуры поверхности Марса с американских космических кораблей «Маринер-6» и «Маринер-7». В полдень в тропиках была зарегистрирована температура до 15°С, а ночью она упала до −75°С. Минимальная температура определена в пределах Южной полярной шапки: −153°С. Это близко к точке замерзания углекислого газа в условиях Марса. Температура затвердевания CO_2 зависит от давления и составляет на поверхности Земли −78°С, а на Марсе она значительно ниже. Продуктом замерзания является «сухой лед» — твердая углекислота.

Одновременно с измерениями температуры были получены спектры полярной шапки Марса; в них найдены полосы, характерные для твердой углекислоты. Таким образом, это вещество входит в состав белого полярного покрова, который прежде считался состоящим из обычного льда. Вопрос о том, имеется ли там значительная примесь обычного льда, еще не выяснен. Но твердая углекислота при нагревании превращается в углекислый газ, не оставляя следов,

а «таяние» шапки сопровождается интересными следствиями. По данным наземных наблюдений, вдоль отступающих краев марсианской полярной шапки образуется темная кайма, в прилегающих районах возрастает контраст темных деталей. «Волна потемнения» темных областей распространяется к экватору со скоростью примерно 80 км/сут. Это, пожалуй, наиболее интересная особенность Марса. Попытки объяснить периодическое потемнение областей не привели специалистов к единому мнению. Некоторые ученые допускают возможность, что потемнение возникает при образовании покрова из растениеподобных организмов, которые весной появляются и оживают, а осенью увядают. Противники этой точки зрения ссылаются на суровые природные условия Марса. Впрочем, никакие твердо установленные факты, относящиеся к физическим условиям на поверхности Марса, не исключают возможности существования каких-либо форм жизни на этой планете. На Земле в окружающей нас природе много ярких примеров «изобретательности» организмов, приспособившихся к трудным условиям существования путем естественного отбора. Организмы на Марсе, вероятно, могли бы приспособиться к современным условиям, но они там должны были сперва зародиться, а для этого в свою очередь требуются относительно благоприятные условия, хотя бы в отдельных «оазисах» в течение длительных сроков. Были такие условия на Марсе или нет? Имеются ли доказательства, что живые организмы там существуют в действительности? Такими доказательствами наука пока не располагает

Не удалось еще выяснить природу темных областей и по снимкам, полученным при подлете к Марсу американских автоматических станций «Маринер-4, 6 и 7». Зато на этих снимках найдено множество кольцевых гор, или кратеров. Они придают поверхности Марса внешнее сходство с поверхностью Луны. По мнению большинства астрономов, многие кратеры на Марсе имеют, по-видимому, ударно-взрывное метеоритное происхождение, но на снимках некоторых из них геологи находят застывшие следы вулканических процессов.

При помощи приборов, установленных на космических аппаратах, получены изображения поверхности Марса с деталями рельефа в сотни раз более мелкими, чем при наблюдениях с Земли. Тем не менее на снимках нет знаменитых «каналов» в виде прямых темных линий, как их изображали итальянский астроном Дж. Скиапарелли и его американский последователь Персиваль Лоуэлл в конце прошлого века. Сетку геометрически правильных линий, видимую на Марсе в небольшие телескопы, многие астрономы считали результатом оптической иллюзии. Но некоторые «каналы» получались на телескопических фотоснимках с Земли. Поэтому были основания ожидать, что на поверхности Марса существуют группировки пятен, располагающиеся полосами. Высказывалось мнение, что эти полосы — древние каньоны или трещины, вдоль которых есть участки, покрытые растительностью. Существовало также несколько других объяснений, ни одно из них не было общепризнанным. На снимках, полученных со станций «Маринер» в 1969 г., «каналов» не видно. Но при радиолокационном изучении участков тропического пояса Марса найдены длинные и узкие прямолинейные впадины. Они могли не получиться на снимках потому, что на Марсе уклоны поверхности обычно пологи и не дают резких теней.

Во время великого противостояния 1877 г. были открыты два спутника Марса: Фобос и Деймос.

По сравнению со спутниками других планет они необычайно близки к планете и очень малы: поперечники их 20 и 8 км. Спутники обращаются вокруг Марса в направлении с запада на восток почти в плоскости экватора. Фобос движется над марсианской поверхностью почти в 70 раз ближе к ней, чем Луна к Земле, и совершает полный оборот по орбите за 7 ч 39 мин, обгоняя суточное вращение планеты. Спутники Марса — естественные малые небесные тела, они не шарообразны и по форме неправильны. На их поверхности тоже есть несколько кратеров.

В мае 1971 г. к Марсу были направлены советские автоматические станции «Марс-2» и «Марс-3». При подлете к планете от станции «Марс-2» отделилась капсула, доставившая 27 ноября на Марс вымпел с изображением Герба Советского Союза. 2 декабря 1971 г. от «Марса-3» отделился спускаемый аппарат и совершил мягкую посадку на планету.

Тормозные двигательные установки обеспечили перевод станций «Марс-2» и «Марс-3» на две различные орбиты искусственных спутников Марса. В соответствии с намеченной программой станции выполняли комплексную научную программу исследований Марса и околопланетного космического пространства. Кроме того, по командам с Земли производилось фотографирование Марса с различных расстояний и велась передача снимков и научной информации на Землю по радио.

Наряду с нашими «Марсами» работал «Маринер-9» — их американский собрат. Условия для исследований планеты оказались неблагоприятными: с сентября 1971 г. почти весь Марс был скрыт мощной пылевой бурей, а с февраля 1972 г. расстояние между планетами стало настолько большим, что резко затруднило передачу данных на Землю.

Юпитер

Юпитер отстоит от Солнца в 3,5 раза дальше, чем Марс, и затрачивает на один оборот по орбите почти 12 лет. Экваториальный диаметр Юпитера, по новым данным, составляет около 142 тыс. км. Юпитер превосходит нашу Землю по объему более чем в 1200 раз. Он принадлежит к группе *планет-гигантов,* в которую входят также Сатурн, Уран и Нептун. Юпитер в два раза массивнее, чем все остальные планеты, вместе взятые. Но масса Юпитера мала по сравнению с массой Солнца. Обладая могучим притяжением, планеты-гиганты удерживают в своих газовых оболочках даже водород и гелий.

По своему строению, химическому составу и физическим условиям у «поверхности» Юпитер не имеет ничего общего с Землей и с планетами земной группы. Прежде всего, неизвестно, есть ли у него вообще твердая или жидкая поверхность. В телескоп на Юпитере видны светлые и темные полосы изменчивых облаков. Эти полосы хорошо заметны и имеют множество четко очерченных, но непостоянных деталей. Единственная постоянная деталь, которая наблюдается на Юпитере вот уже более 300 лет,— Большое красное пятно; оно представляет собой то красноватый, то темно-красный овал. Видимые размеры, яркость и окраска Большого красного пятна изменяются неправильным образом, а его место на планете подвержено колебаниям. Данные наблюдений говорят о газовой природе этого пятна.

Наружный слой светлых и темных облаков Юпитера состоит из частичек замерзшего аммиака. Аммиак может там замерзать только при температуре ниже −103°С. Измерения температуры надоблачных слоев (по особенностям в спектре) методами астрофизики дают около −145°С.

Выше облаков атмосфера Юпитера состоит, по-видимому, из водорода и гелия. Спектральный анализ показывает, что на Юпитере есть газообразные метан и аммиак в относительно малых количествах.

Наблюдая за движением облаков на Юпитере, астрономы нашли положение оси суточного вращения планеты и вычислили длительность каждого оборота. Оказалось, что угловая скорость суточного вращения этого гиганта в 2,5 раза больше, чем Земли. Значительная центробежная сила на экваторе сделала фигуру планеты сплюснутой у полюсов, что хорошо заметно при наблюдениях в телескоп и на фотоснимках. Но самое удивительное, что Юпитер вращается не как твердое тело: в экваториальном поясе сутки длятся 9 ч 50 мин, а в высокоширотных зонах — 9 ч 55 мин. Кроме того, период вращения южного полушария планеты несколько короче, чем северного.

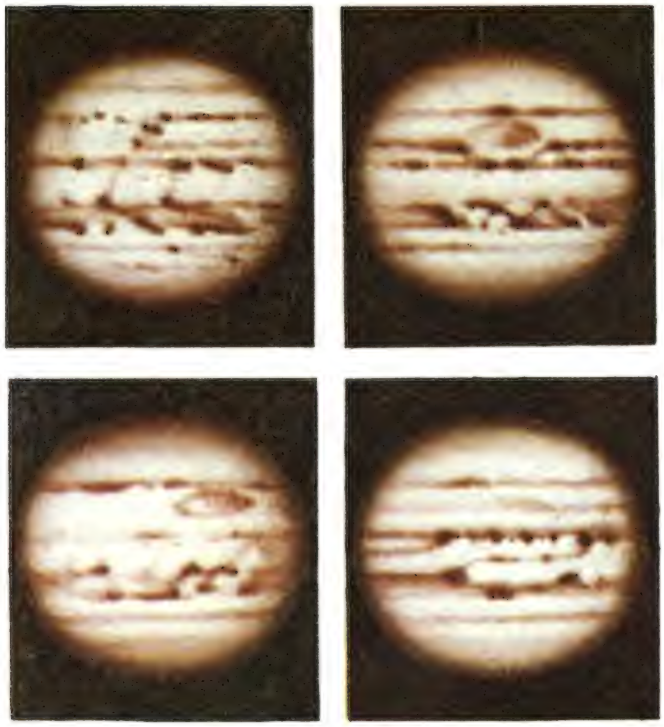
Толщина газовой оболочки Юпитера чрезвычайно велика. Об этом говорит низкая средняя плотность Юпитера, составляющая лишь 24% средней плотности Земли. Зная радиус и массу планеты, а следовательно, и ускорение свободного падения на поверхности облаков (26 м/с^2), можно воспользоваться известными физическими формулами и вычислить для всех слоев водородно-гелиевого «океана» Юпитера на разной глубине под уровнем облаков давление и плотность, которые возрастают с глубиной. На глубине около 0,2 радиуса Юпитера давление достигает 500 ГПа (5 млн. атм) и структура молекул водорода нарушается. Водород изменяет свойства, переходя в «металлическую фазу». Это сопровождается скачком плотности от 1260 до 1400 кг/м^3. Но в каком агрегатном состоянии находится «металлический» водород — жидкий он или твердый, пока не установлено. В еще более глубоких слоях давление превосходит 10 ТПа (100 млн. атм). Состояние вещества в таких условиях не изучено, так как пока невозможно воспроизвести эти условия в земных лабораториях.

На основании ряда косвенных признаков специалисты пришли к выводу, что по меньшей мере 0,1 часть массы Юпитера заключена в тяжелом ядре, которое находится в центре водородно-гелиевого шара и имеет приблизительно такой же химический состав, как и Земля. В то же время ядру не может принадлежать 30% массы планеты, иначе средняя плотность Юпитера была бы выше.

Из теории следует, что всякая планета теряет (за счет излучения в инфракрасном, субмиллиметровом и радиоволновом диапазонах) ровно столько энергии, сколько она получает от Солнца во всех диапазонах. При этом за длительный срок излучающая поверхность планеты должна была приобрести «равновесную» температуру, соответствующую определенной интенсивности излучения. Но измерения показали, что планеты-гиганты (по крайней мере Юпитер и Сатурн) теряют энергии больше, чем получают от Солнца. Инфракрасное излучение Юпитера соответствует температуре приблизительно на 25°С выше равновесной, а его излучение в радиодиапазоне в 2—3 раза больше, чем «полагается». Это послужило основанием для предположения о существовании в недрах Юпитера мощных источников энергии.

Вокруг Юпитера обращается 12 спутников; из них 4 самых ярких видны в сильный бинокль, а остальные — только в телескоп и на фотоснимках. Они движутся по эллиптическим орбитам вокруг плане-

Изменения облаков на Юпитере.



Изменение вида колец Сатурна.

ты, 8 внутренних — в «прямом» направлении, совпадающем с направлением суточного и орбитального вращения Юпитера, а 4 наружных — в обратном направлении. В первой группе 2 спутника выделяются своими размерами, это Каллисто и Ганимед — крупнейший из спутников в Солнечной системе.

Сатурн

Приблизительно вдвое дальше от Солнца, чем Юпитер, расположен Сатурн, второй по величине гигант. Его экваториальный диаметр составляет 120 тыс. км, это лишь немного меньше, чем у Юпитера, но по массе Сатурн уступает Юпитеру более чем втрое и потому имеет низкую среднюю плотность: всего 700 кг/м^3, или 13% средней плотности Земли. Это легко объясняется тем, что планеты-гиганты состоят главным образом из водорода и гелия, но в недрах Сатурна давление и плотность вещества не достигают столь высоких значений, как на Юпитере. В надоблачной атмосфере Сатурна найдена небольшая примесь газообразного метана, как и на Юпитере, но аммиак обнаружить не удалось; это вызвано, по-видимому, его замерзанием и опусканием из наружных слоев атмосферы вследствие очень низкой температуры.

Астрофизические оценки температуры на видимой поверхности Сатурна дают величину, близкую к температуре замерзания метана (−184°С), из твердых частиц которого скорее всего состоит облачный слой этой планеты. В телескоп видны темные и светлые зоны, вытянутые вдоль экватора, но они менее контрастны, чем на Юпитере, и отдельные детали в них наблюдать труднее.

Период осевого вращения Сатурна составляет 10 ч 14 мин в экваториальном поясе, а в полярных областях — 10 ч 38 мин. Быстро вращаясь, Сатурн приобрел сплюснутую форму.

Одно из самых удивительных образований в Солнечной системе — *кольца* Сатурна. Плоская система колец опоясывает планету вокруг экватора, нигде не соприкасаясь с ее поверхностью. Сатурн с кольцами хорошо виден даже в школьный телескоп, а в сильный телескоп объемность изображения подчеркивается тем, что на плоскости колец бывает виден край тени от Сатурна, а на Сатурне — полоска тени от колец. В кольцах различают три основные зоны, разделенные узкими концентрическими щелями: *внешнее* кольцо *A*, *среднее* кольцо *B* (наиболее яркое) и *внутреннее* кольцо *C* (очень прозрачное,

Сравнительные размеры планет: 1 — Юпитер, 2 — Сатурн, 3 — Нептун, 4 — Земля, 5 — Марс, 6 — Меркурий, 7 — Венера, 8 — Уран.

Размеры Плутона очень приблизительны и поэтому не указаны.

«креповое», внутренний край его нерезкий). В каждой из этих крупных зон можно выделить несколько более узких.

Кольца Сатурна не сплошные, а представляют собой массу мелких спутников планеты-гиганта, расположенных в одной плоскости. Скорость их вращения вокруг Сатурна в разных зонах различна. Плоскость колец практически совпадает с плоскостью экватора Сатурна и имеет постоянный наклон к плоскости орбиты, равный приблизительно 27°. В зависимости от положения планеты на орбите ко́льца поворачиваются к нам то одной, то другой стороной, в переходный период превращаются в узкую полоску, а затем вновь «раскрываются». Полный цикл изменения их вида завершается в течение 29,5 лет: таков период обращения Сатурна вокруг Солнца. Время от времени кольца на короткий срок исчезают, точнее говоря, перестают быть видимыми. Это происходит либо когда плоскость колец проходит точно через Солнце и боковая поверхность лишается яркого освещения, либо когда кольца бывают обращены к наблюдателю в точности «ребром» и представляют собой слишком тонкую полоску.

Толщина колец Сатурна — около 3 км — очень мала по сравнению с их диаметром, который по наружному краю составляет 275 тыс. км. Кольца состоят из частиц размером от нескольких сантиметров до нескольких метров.

Инфракрасные спектры колец Сатурна напоминают спектры инея при очень низких температурах. Но, состоят ли частицы колец полностью изо льда или только покрыты инеем снаружи, пока неизвестно.

Кроме колец Сатурн имеет 10 спутников. Диаметр самого большого из них — Титана — около 5 тыс. км, он почти равен диаметру Ганимеда — крупнейшего из спутников Юпитера. Оба они больше Меркурия, но уступают ему по массе.

Уран и Нептун

Уран был открыт английским ученым Вильямом Гершелем в 1781 г. Он удален от Солнца на 19 а. е. (это приблизительно вдвое дальше, чем от Солнца до Сатурна) и совершает полный оборот по орбите за 84 года.

Уран сильно отличается от других планет тем, что он вращается как бы лежа на боку: плоскость его экватора почти перпендикулярна к плоскости орбиты. Планета имеет 5 спутников. Все они движутся в направлении суточного вращения Урана приблизительно в плоскости его экватора. Наклон оси вращения к плоскости орбиты хотя и немного (на 8°), но все же превосходит 90°, поэтому направление вращения планеты является обратным, так же как и направление движения спутников.

Из-за необычного расположения оси вращения Урана Солнце там поднимается высоко над горизонтом, почти до зенита, даже на полюсах (разумеется, попеременно: то на северном, то на южном). Полярный день и полярная ночь (длительность которых возрастает с увеличением широты пункта и достигает на полюсах 42-летней продолжительности) там бывают повсеместно, исключая только узкий пояс вдоль экватора, где Солнце всегда восходит с периодичностью 10 ч 49 мин. Но даже в подсолнечной точке измеренная температура атмосферы возле поверхности (облаков) составляет −205—220°С.

В атмосфере Урана найдены водород и небольшая примесь метана. В относительно большом количестве имеется, вероятно, гелий, так как средняя плотность Урана (1490 кг/м^3 или 1,49 г/см^3) больше, чем Юпитера.

Еще более далекая планета — Нептун — была открыта «на кончике пера», как говорят астрономы. Она обнаружила себя прежде всего силой своего притяжения. Оказалось, что Уран движется не совсем так, как ему полагалось бы двигаться под действием притяжения Солнца и известных в то время планет. Тогда заподозрили существование еще одной планеты и попытались предвычислить ее положение на небе. Эту чрезвычайно сложную математическую задачу успешно решили англичанин Адамс и французский ученый Леверье независимо друг от друга. Они оба правильно предсказали, в каком месте звездного неба должна быть видна неизвестная планета. Получив данные Леверье, немецкий астроном Иоганн Галле в 1846 г. обнаружил планету. Ее средняя удаленность от Солнца — 30 а. е., период обращения по орбите — 164 года и 280 сут.

Видимый угловой диаметр Нептуна — всего 2″; точность измерений такой величины не может быть высока, так как земная атмосфера вносит искажения, величина которых редко бывает меньше 1″ Уточнить диаметр Нептуна удалось без помощи угломерных приборов 7 апреля 1968 г., когда планета в своем движении на фоне звездного неба заслонила одну из далеких звезд. (Угловой диаметр любой звезды ничтожно мал по сравнению с угловыми размерами планет.) Длительность затмения при точно из-

вестных характеристиках движения Нептуна позволила ученым найти линейный диаметр планеты. Уровень слоя в атмосфере Нептуна, которому соответствуют начало и конец затмения, представляет собой сплюснутый сфероид с экваториальным диаметром 50 530±70 км. Новые сведения о диаметре позволили уточнить величину средней плотности Нептуна: она оказалась близкой к 1700 кг/м³ (1,7 г/см³). Детальная теоретическая обработка записей ослабления блеска звезды при ее заходе за атмосферу Нептуна дала много дополнительной информации. В частности, найдено, что средняя молекулярная масса надоблачных слоев атмосферы Нептуна равна 38. Это соответствует молекулярной массе водорода с небольшой примесью метана.

У Нептуна два спутника. Их размеры известны довольно приблизительно, однако ясно, что один из них — Тритон — очень крупный, его диаметр около 4 тыс. км, а масса вдвое больше массы Луны.

Плутон

Эту девятую по счету большую планету в Солнечной системе открыл Клайд Томбо в Лоуэлловской астрономической обсерватории (Аризона, США) в 1930 г., после длительных поисков на телескопических фотоснимках звездного неба. Плутон выглядит как точечный объект 15-й звездной величины, т. е. примерно в 4 тыс. раз слабее тех звезд, которые находятся на пределе видимости невооруженным глазом. Плутон очень медленно, всего на 1°,5 в год, движется по орбите, которая имеет необычайно большой наклон (17°) к плоскости эклиптики и сильно вытянута: в перигелии приближается к Солнцу на более короткое расстояние, чем орбита Нептуна, а в афелии отходит на 3 млрд. км дальше. При средней удаленности Плутона от Солнца (5,9 млрд. км) наше дневное светило выглядит с этой планеты не как диск, а как сияющая точка и дает освещенность в 1560 раз меньшую, чем на Земле. Не удивительно, что изучать Плутон очень трудно: мы о нем почти ничего не знаем.

Несколько лет назад астрономы попытались измерить угловой диаметр Плутона по затмению звезды, как это было сделано для Нептуна. Но затмение «не состоялось», хотя центр планеты прошел на угловом расстоянии всего 0″,1 от направления на звезду. Это привело к выводу, что радиус Плутона меньше 3 тыс. км, т. е. значительно меньше радиуса Земли.

Малые планеты

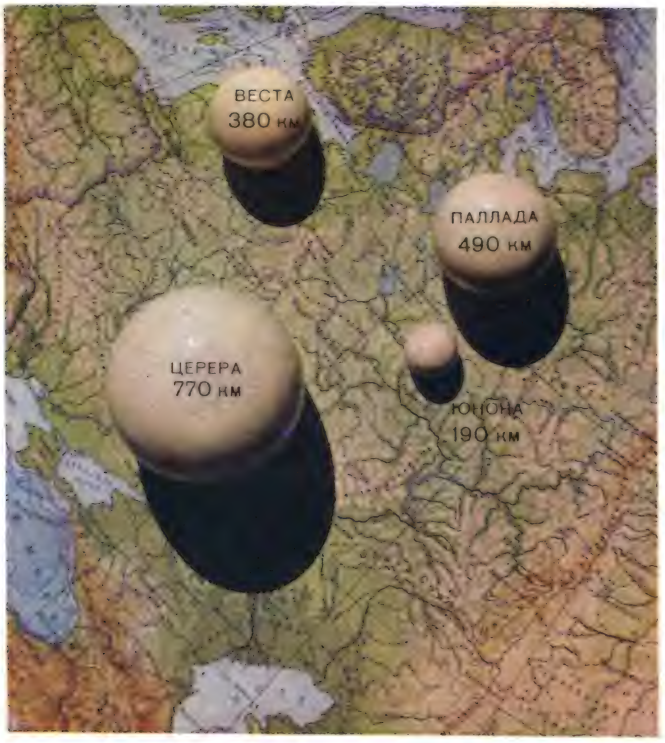
Их называют *астероидами,* т. е. звездоподобными. Со звездами они не имеют ничего общего и названы так только потому, что в поле зрения современного телескопа почти все они остаются точечными объектами даже при самых больших увеличениях. Диаметр крупнейшей из малых планет — Цереры — 770 км. Самые мелкие астероиды — из числа доступных наблюдениям — имеют поперечник около километра. Некоторые астероиды малых размеров, например Адонис, Аполлон, Гермес и другие, удалось обнаружить только благодаря их сближению с Землей, когда они проходили на расстоянии нескольких десятых долей астрономической единицы от нашей планеты. В наши дни астрономы обнаруживают по нескольку десятков малых планет ежегодно, сравнивая фотоснимки одного и того же участка звездного неба, полученные в разное время. Заметное смещение какой-либо звездочки как раз и отличает небесные тела, находящиеся в Солнечной системе, от подлинных звезд, расположенных в миллионы раз дальше от нас. Именно так сейчас открывают еще неизвестные или «утерянные» в прошлом астероиды.

Орбиты всех астероидов сосредоточены вблизи плоскости эклиптики и образуют широкое, но сравнительно тонкое и плоское кольцо, напоминающее диск с отверстием в середине. Толщина этого диска составляет приблизительно 1,7 а. е., причем количество астероидов в середине слоя значительно больше, чем по краям.

Среднее расстояние от Солнца для большинства малых планет заключено в пределах от 1,9 до 4,0 а. е. Но эллиптичность орбит приводит к смещению внутренней границы пояса астероидов до 0,3 а. е. от Солнца, а наружной — до 8,0 а. е. Таким образом, многие астероиды иногда подходят к Солнцу значительно ближе, чем Земля, а некоторые даже ближе, чем Меркурий, тогда как другие удаляются за пределы орбиты Юпитера, приближаясь к Сатурну. Орбиты таких астероидов сходны с орбитами короткопериодических комет.

Астероиды с точно известными орбитами имеют свои номера, а многие из них и собственные имена. Малым планетам, открытым в прошлом веке, давали имена богов и героев из древнеримской мифологии. Запас таких названий исчерпался, а малые планеты все продолжали открывать. Тогда стали присваивать им женские имена, названия городов и стран или называть их в честь выдающихся уче-

Сравнительные размеры самых крупных астероидов, если их поместить на территории СССР.



ных и государственных деятелей. В названии одной из малых планет — Владилены — увековечено имя В. И. Ленина.

Чтобы не «потерять» уже открытые малые планеты, ученые как можно точнее вычисляют орбиту каждой из них. На основании элементов орбиты можно вычислить так называемые *эфемериды*, указывающие положение планеты на звездном небе в любой заранее заданный момент. В соответствии с международным договором Институт теоретической астрономии в Советском Союзе вычисляет и ежегодно публикует эфемериды для более чем 1700 сравнительно ярких малых планет. Но известны и более слабые астероиды, количество которых значительно пополнилось в результате специально предпринятого фотографического патрулирования звездного неба. Последний обзор, опубликованный в октябре 1970 г., насчитывает 9614 астероидов. Предполагают, что их общее число может достигать 50 тыс., но оценка суммарной массы всех малых планет, вместе взятых, дает не более 0,001 массы Земли.

Изучение планет вооружает человека новыми сведениями, многие из которых непосредственно или косвенным образом используются сегодня или понадобятся в будущем для практических целей.

Вспышки на Марсе

Одной из самых интригующих загадок Марса являются знаменитые «вспышки». Не раз наблюдатели замечали яркие пятна, неожиданно появлявшиеся на поверхности планеты.

Особенно интересной была вспышка, которую отметил японский наблюдатель Сидзуо Маэдо 4 июня 1937 г. Вблизи края марсианского диска неожиданно появилось сверкающее пятно, мерцавшее подобно звезде. Его яркость значительно превосходила сияние полярной шапки...

По поводу загадочных вспышек на Марсе был выдвинут целый ряд разнообразных гипотез.

Несколько лет назад загадочной проблемой заинтересовался московский астроном В. Д. Давыдов.

Внимательно изучив все имеющиеся в распоряжении науки данные о таинственных вспышках, В. Д. Давыдов пришел к любопытному заключению: это явление может быть объяснено отражением солнечных лучей от облака ледяных кристаллов, взвешенного в атмосфере Марса.

Подобное оптическое явление, получившее название *гало*, нередко наблюдается и на Земле. Чаще всего можно увидеть светлое кольцо, в центре которого расположено Солнце. Но бывают и более редкие формы гало. Одна из них представляет собой круг, проходящий через Солнце и параллельный линии горизонта.

Не исключено, что как раз такое явление и наблюдалось на Марсе 4 июня 1937 г. Скорее всего облако, состоявшее из кристалликов льда определенной формы, образовалось задолго до момента наблюдения. Вспышка же была замечена тогда, когда вследствие суточного вращения Марса отраженный солнечный блик оказался на короткое время направленным точно на Землю.

Многие астрономы не раз наблюдали на Марсе довольно интенсивные белые пятна, по всей вероятности облака. Видимо, образование достаточно плотных облаков, состоящих из множества ледяных кристалликов определенной формы, представляет собой для Марса довольно обычное явление.

И поэтому, заключил В. Д. Давыдов, вспышки, наблюдавшиеся на Марсе в разное время, представляют собой скорее всего различные формы гало, возникающие в марсианских облаках.

Кометы

Комета
Таго Сато — Косака.

Комета Мркоса.

Кометы принадлежат к числу наиболее красивых небесных тел. Появление на небе яркой кометы сразу привлекает к себе всеобщее внимание. Светлые туманные оболочки, окружающие небольшое ядро, длинный хвост, тянущийся иногда на полнеба, быстрое движение среди звезд — все это делает комету непохожей на остальные небесные светила. Необычный вид комет и неожиданность их появления служили в течение многих веков источником всевозможных суеверий.

Астрономы и поныне, как правило, не могут предсказывать появление на небе большинства ярких комет. Это объясняется особенностями движения и строения комет. Подавляющее большинство комет движется вокруг Солнца по огромным, сильно вытянутым путям, уходящим в сотни и тысячи раз дальше орбит наиболее далеких от Солнца планет. Один оборот по такой орбите длится многие тысячи и даже миллионы лет.

Кометы холодные, не самосветящиеся тела; они начинают светиться и становятся видимыми только тогда, когда подходят близко к Солнцу. От одного их приближения к Солнцу до следующего проходят тысячелетия. Следовательно, кометы, которые будут наблюдаться в ближайшие годы, предстанут перед глазами астрономов впервые — их предыдущие появления были так давно, что даже в древнейших летописях нельзя найти о них никаких сведений. Поэтому нет ничего удивительного в том, что астрономы и поныне не могут предсказать появления комет.

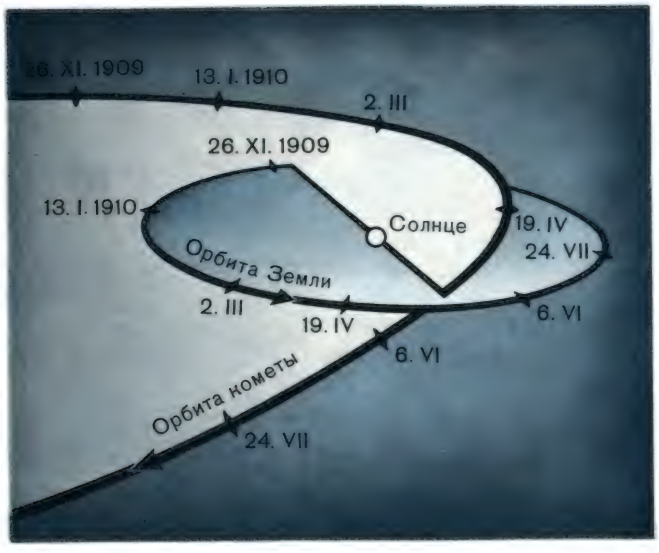
Исключение составляют сравнительно немногочисленные короткопериодические кометы. Они возвращаются к Солнцу через несколько лет или несколько десятков лет. Астрономы открыли свыше 100 таких комет. Для половины из них хорошо изучены орбиты, и появление их предсказывается с большой точностью. К сожалению, почти все короткопериодические кометы слабы и их не видно невооруженным глазом.

Приближающаяся к Солнцу комета имеет вид слабого туманного круглого пятнышка. Середина его ярче краев, и зачастую там бывает видно звездообразное *ядро*. Ядро и окружающие его оболочки составляют *голову* кометы. Постепенно яркость кометы возрастает, и наконец появляется небольшой туманный *хвост;* он всегда направлен прочь от Солнца. По мере приближения кометы к Солнцу ее яркость и длина хвоста увеличиваются. Когда комета бывает ближе всего к Солнцу, хвост достигает наибольших размеров. При удалении кометы от Солнца хвост постепенно сокращается, комета снова превращается в слабое туманное пятнышко и наконец делается совсем невидимой. У слабых комет хвост иногда вообще не удается заметить.

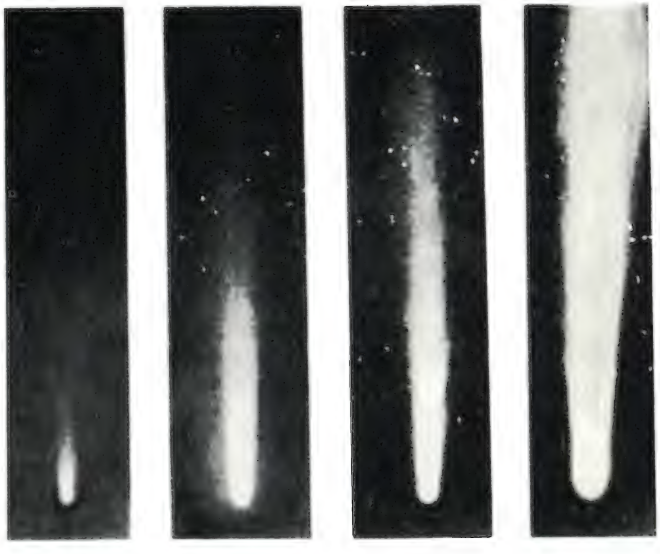
Из-за малой яркости и туманного вида кометы лучше фотографировать, чем наблюдать в телескопы. Большинство комет открывается в настоящее время по фотографиям. Но и сейчас бывают случаи, когда кометы открывают при наблюдении неба невооруженным глазом. Так, в 1939 г. два любителя астрономии из Удмуртской АССР — Ахмаров и Юрлов — независимо друг от друга заметили новую комету, которая теперь носит их имя. За ряд лет чешский астроном и геофизик А. Мркос открыл в телескоп 15 комет.

Как только открывается новая комета, об этом через Международное бюро астрономических телеграмм извещаются все обсерватории земного шара. Это делается для того, чтобы не упустить комету в случае наступления плохой погоды и как можно скорее сделать несколько измерений ее положения среди звезд. Измерения эти необходимы для вычисления орбиты и предвычисления дальнейшего движения кометы по небу. Все обсерватории оповещаются и в тех случаях, когда появляется уже известная периодическая комета, завершившая очередной оборот по своей орбите и вновь приближающаяся к Солнцу.

Расположение плоскости орбиты кометы Галлея.



Изменение вида кометы по мере ее приближения к Солнцу (слева направо).



В прошлом, когда поиски новых комет производились *кометоискателями* — небольшими телескопами с большим полем зрения,— ежегодно наблюдалось в среднем 3—5 комет. В наше время благодаря широкому применению фотографии, позволившей наблюдать и слабые кометы, их обнаруживается в среднем около 10 в год.

При открытии кометы прежде всего вычисляют ее приближенную орбиту. Дальнейшие измерения положения кометы среди звезд позволяют уточнить ее орбиту. Когда же комета скроется из виду, удаляясь от Солнца, какой-либо астроном собирает со всех обсерваторий данные о наблюдениях положения кометы и вычисляет «окончательную», наиболее точную орбиту. Однако если комету удалось наблюдать недолго и за это время она прошла малый отрезок своего пути, то даже и такая окончательная орбита может оказаться недостаточно точной. Неточное определение орбиты периодической кометы приводит к тому, что ее бывает трудно или даже невозможно найти при следующем появлении.

Предвычисляя будущие появления периодических комет, астрономы тщательно учитывают отклонения в их движениях, которые вызываются притяжением планет, в первую очередь массивного гиганта Юпитера.

Комету называют по фамилии человека, ее открывшего, реже — по фамилии астронома, много ее изучавшего. Двойные и даже тройные названия встречаются у комет, которые были почти одновременно открыты несколькими наблюдателями, а также у некоторых утерянных и потом вновь открытых периодических комет. Так, одна из комет 1957 г. носит название: комета Латышева — Вильда — Бэрнхема.

Последний сводный каталог кометных орбит, доведенный до конца 1960 г., содержит орбиты 566 различных комет. Самый короткий период — 2,3 года у кометы Вильсона — Харрингтона. Она наблюдалась в 1949 г., а затем была утеряна. Комета Энке — Баклунда (названа так по фамилии двух крупных ученых, изучавших ее сложное движение) с периодом в 3,3 года наблюдается с 1786 г. и поныне. За это время она 55 раз возвращалась к Солнцу. У кометы Галлея, имеющей период около 76 лет, прослежены по записям в летописях все ее появления начиная с глубокой древности. Очередное приближение этой кометы к Солнцу ожидается в 1985—1986 гг.

Те кометные орбиты, которые являются огромными, сильно вытянутыми эллипсами, наклонены к плоскости эклиптики под всевозможными углами и совершенно беспорядочно ориентированы в пространстве. Кометы с такими орбитами движутся среди планет по всевозможным направлениям. У периодических комет, имеющих меньшие орбиты, движение более упорядоченное — у них преобладают движения в ту же сторону, в которую движутся планеты.

Особенно упорядочено движение у короткопериодических комет с периодами менее 10 лет. Они образуют так называемое *кометное семейство* Юпитера. Все эти кометы имеют умеренно вытянутые, мало наклоненные к эклиптике орбиты и движутся вокруг Солнца в прямом направлении, как и планеты. Афелии их орбит лежат недалеко от орбиты

Слева — фотография кометы Икейа — Секи.

Справа — орбиты некоторых периодических комет.

Юпитера, и потому его притяжение оказывает особенно сильное влияние на их движение.

Время от времени та или иная комета сближается с какой-либо массивной планетой, и это приводит к резкому изменению ее орбиты. Если при этом перигелийное расстояние (наименьшее расстояние кометы от Солнца) существенно увеличится, то комета может стать недоступной для наблюдения. С другой стороны, как показали расчеты, многие периодические кометы двигались раньше по орбитам с большим перигелийным расстоянием и были открыты вскоре после того, как сближение с Юпитером перевело их на орбиты, приводящие в окрестности Солнца.

Поперечник головы кометы обычно составляет десятки и сотни тысяч километров, но, например, у кометы 1680 г. и у первой кометы 1811 г. он превышал миллион километров, т. е. был почти равен поперечнику Солнца. Вдоль хвоста кометы яркость уменьшается постепенно, и потому длина видимой части хвоста — до того места, где он сливается с фоном неба,— зависит от черноты неба, от применяемого телескопа и других причин. Обычно длина видимой части хвоста составляет миллионы и десятки миллионов километров. Но у яркой кометы 1680 г., имевшей гигантскую голову, хвост был виден на протяжении 300 млн. км, т. е. его длина была вдвое больше расстояния от Земли до Солнца.

Наблюдения ярких комет уже давно позволили накопить данные о кометных хвостах, послужившие основой для изучения их природы. Еще Кеплер высказал правильную мысль, что образование кометных хвостов, направленных прочь от Солнца, обусловлено отталкивательным действием Солнца на вещество, из которого состоят эти хвосты.

Тщательно изучив наблюдения хвостов различных комет, Ф. А. Бредихин в 70-х годах прошлого века пришел к выводу, что все кометные хвосты могут быть разделены на три группы. Некоторые кометы, например яркие кометы 1811, 1843, 1874 гг., имели прямые хвосты, направленные почти прямо от Солнца (они лишь слегка отклонялись в сторону, обратную движению кометы). Ф. А. Бредихин нашел, что на частицы, образующие эти хвосты, названные им хвостами *I типа,* действует отталкивательная сила Солнца, в десятки раз превосходящая притяжение.

Другие кометы, например комета Донати 1858 г., имели широкие хвосты, изогнутые в виде рога. Бредихин считал, что в этих хвостах, названных хвостами *II типа,* отталкивательная сила приблизительно равна притяжению или раза в два больше.

Наконец, встречаются хвосты *III типа,* обычно короткие и очень сильно отклоненные назад от прямой, соединяющей комету с Солнцем. На частицы этих хвостов действуют лишь небольшие отталкивательные силы — от ничтожно малых до равных $^1/_4$—$^1/_3$ силы притяжения.

У ярких комет, которые в основном исследовались Ф. А. Бредихиным, хвосты разных типов встречаются примерно одинаково часто. Больше того, многие из них имели одновременно по нескольку хвостов. У слабых комет, исследованных советским астрономом С. В. Орловым, хвосты I типа встреча-

Слева — комета Аренда — Ролана 1957

Снимок сделан в то время, когда Земля пересекала плоскость кометной орбиты. Слой пылевых частиц, расположенных в этой плоскости, проецировался на небо в виде тонкого луча, направленного к Солнцу.

Справа — комета Морхауза 1908 г

ются чаще всего, а хвосты II и III типов — очень редко.

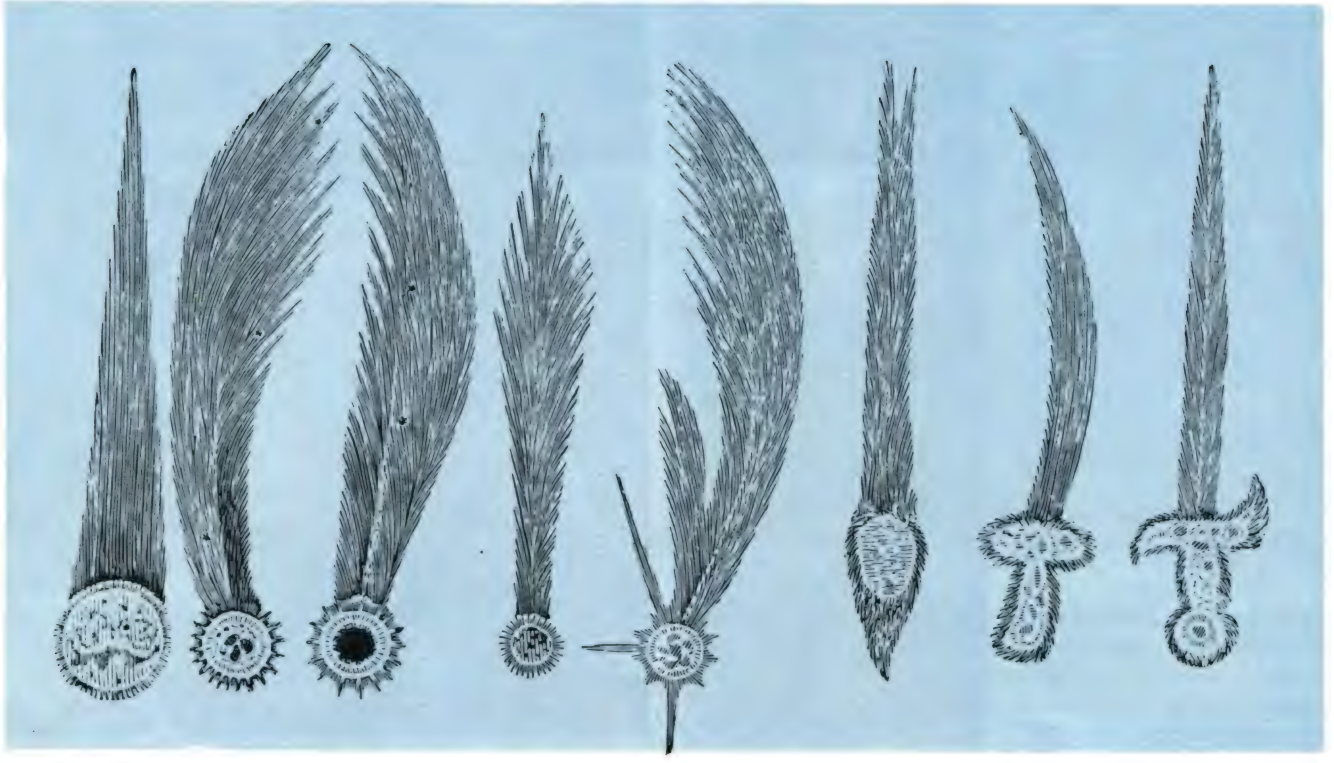
Как показали спектроскопические наблюдения, свечение оболочек головы и хвоста кометы создается главным образом газовыми молекулами и пылью. Голова и хвост кометы совершенно прозрачны. Когда комета оказывается между Землей и какой-либо звездой, свет звезды доходит до нас без малейшего ослабления. Значит, газы и пыль в кометах чрезвычайно разрежены. С этим хорошо согласуется и тот факт, что, несмотря на огромные размеры комет, во много раз превышающие размеры планет, массы комет в миллиарды раз меньше массы Земли. Даже при тесных сближениях комет с небольшими планетами ни разу не удалось заметить ни малейшего изменения движения планеты под действием притяжения кометы.

При вычислении размеров яркого ядра, наблюдающегося у многих комет, оказалось, что его поперечник убывает по мере приближения кометы к Земле. Следовательно, это не настоящее ядро кометы, а просто центральный, более яркий сгусток газа и пыли. Тем не менее не подлежит сомнению, что в голове кометы имеется какое-то твердое вещество — источник тех газов и пыли, которые определяют внешний вид и свечение комет.

В 60-х годах прошлого столетия было обнаружено, что некоторые кометы и потоки метеорных частиц движутся по одним и тем же орбитам. После этого большинство астрономов, следуя идее итальянского астронома Скиапарелли, стали считать, что ядром кометы является довольно плотный рой метеорных частиц. Распад ядра ведет к образованию метеорного потока. Связь метеорных потоков с распавшимися кометами наглядно подтверждалась обильнейшими метеоритными дождями, которые наблюдались в 1872 и 1885 гг., в дни, когда наша планета пересекала орбиту кометы Биэла. За несколько десятков лет до этого комета Биэла разделилась на глазах у астрономов на две кометы, а затем и вовсе исчезла.

Около 1950 г. удалось установить, что ядра комет — это сравнительно небольшие ледяные тела, состоящие из замерзших газов, перемешанных с некоторым количеством нелетучих каменистых веществ. В кометных ядрах присутствуют всевозможные льды — и обычный водяной лед, и «сухой лед» из твердой углекислоты, подобный тому, которым пользуются продавцы мороженого, и многие другие льды. Поперечники ядер бывают обычно от нескольких сотен метров до нескольких километров, и потому ядра остаются невидимыми.

Старинные изображения комет.



Тела и частицы, кружащиеся вокруг Солнца во внутреннем районе планетной системы и непрерывно прогреваемые его лучами, состоят из каменистых нелетучих веществ. Таковы, например, падающие на Землю метеориты. Но во внешних, холодных районах планетной системы, откуда приходят кометы, небольшие тела имеют ледяной состав.

Когда ледяное кометное ядро приближается к Солнцу и начинает прогреваться его лучами, газы испаряются и прямо переходят из твердого состояния в газообразное (подобно тому как испаряется, например, нафталин). Пока комета далека от Солнца, газы испаряются слабо, мы видим их лишь в окрестностях ядра, где они плотнее, т. е. нам видна голова кометы с ее туманными оболочками. Когда же комета подходит ближе к Солнцу и испарение усиливается, то обычно становится виден разреженный поток газов, отгоняемый прочь от ядра отталкивательным действием Солнца. Вместе с газом ядро покидают и пылинки из нелетучих каменистых веществ. Мелкие пылинки тоже испытывают отталкивательное действие Солнца, которое отгоняет их прочь от ядра. Такие потоки газа и пыли образуют один или несколько хвостов кометы.

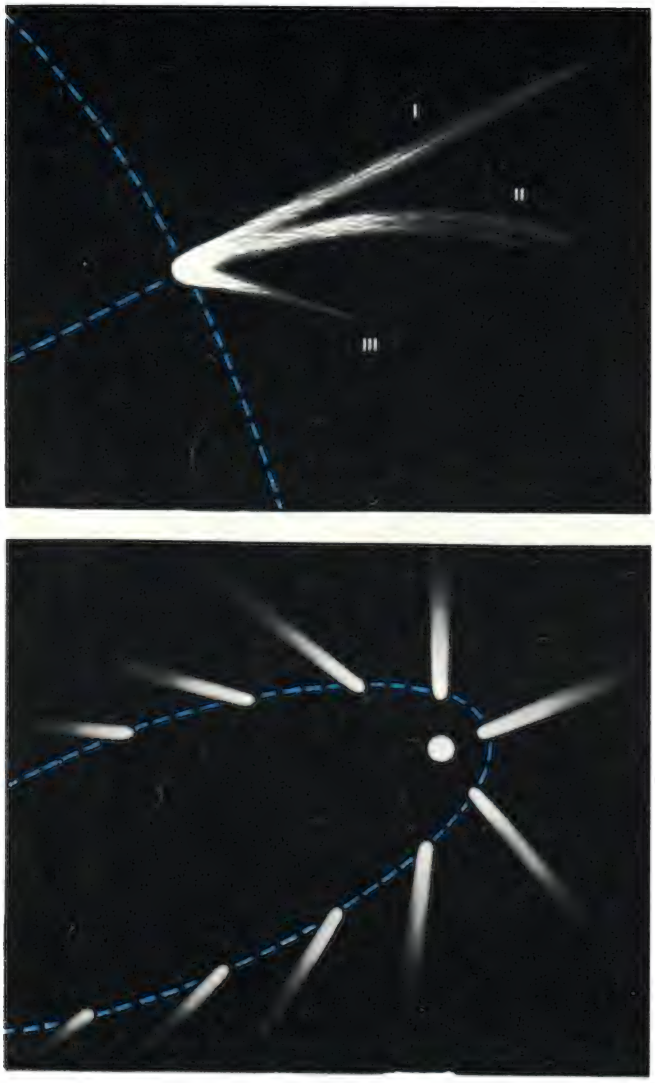
Не только пылинки, но также и более крупные частицы покидают ядро, увлекаемые потоком испаряющихся газов. Кометные ядра столь малы, что сила тяжести на их поверхности в десятки тысяч раз меньше, чем на Земле. Поэтому даже разреженный поток газов способен сдуть плотные частички размером до нескольких миллиметров и рыхлые — до нескольких сантиметров. Сдутые частички имеют очень малые скорости по отношению к ядру и потому движутся по орбитам, очень близким к орбите самой кометы. Одни из них опережают комету и уходят все дальше вперед, другие все больше и больше отстают. Через несколько оборотов получается поток частиц, распределенных вдоль орбиты кометы-родоначальницы. Это и есть процесс образования метеорного потока в результате распада кометного ядра.

Каждое приближение кометы к Солнцу сопровождается невосполняемой потерей газов и каменистых пылинок и частиц. Раньше или позже комета, регулярно приближающаяся к Солнцу, должна исчерпать свой запас газов и распасться. Чем короче период обращения кометы, тем быстрее протекает процесс ее разрушения.

Если бы комета просто отражала солнечные лучи, то при изменении ее расстояния от Солнца суммарный блеск ее изменялся бы обратно пропорционально квадрату расстояния. То же самое было бы

Вверху — типы хвостов комет по Ф. А. Бредихину.

Внизу — хвост кометы всегда направлен от Солнца.



и в том случае, если бы все солнечное тепло, получаемое ядром, расходовалось на испарение газов и если бы мы видели всю голову кометы, включая ее слабые части. Первое условие выполняется лишь у комет, заходящих внутрь орбиты Венеры, а второе никогда не выполняется — мы видим лишь центральную, более яркую часть головы, тем меньшую, чем слабее комета. Поэтому суммарный блеск кометы возрастает при ее приближении к Солнцу гораздо быстрее, чем по закону обратных квадратов расстояний. Суммарный блеск возрастает в 15—20 раз, когда расстояние кометы до Солнца уменьшается в 2 раза. И наоборот, при увеличении расстояния блеск столь же быстро убывает.

Свечение газов в кометах — это переизлучение солнечного света, причем переизлучаются лишь лучи определенных длин волн, характерных для данной молекулы.

Как показывает изучение спектров, почти у всех комет излучения головы порождаются нейтральными молекулами, состоящими из двух или трех атомов. Главное свечение дают молекулы C_2 — их излучения лежат в видимой области спектра, в том числе и в зеленой части, к которой глаз особенно чувствителен.

Применение фотографии к изучению кометных спектров позволило обнаружить в кометах многочисленные молекулы ядовитого газа циана (CN). Излучение их лежит в невидимой ультрафиолетовой части спектра. Когда удалось сфотографировать еще более коротковолновую часть спектра комет, были открыты излучения молекул OH (гидроксил) и NH. С появлением фотопластинок, чувствительных к красным лучам, были обнаружены излучения молекулы NH_2. Наблюдаются также слабые излучения трехатомной молекулы углерода (C_3) и углеводородной молекулы (CH). Наконец, всего несколько лет назад было установлено присутствие в кометах атомарного кислорода и водорода.

В головах комет, подходящих близко к Солнцу, кроме излучений перечисленных выше 7 молекул и атомов H и O появляются также излучения атомов некоторых металлов. На расстояниях, меньших 0,7—0,8 а. е., в спектре головы появляется желтая линия натрия. У комет же, приближавшихся к Солнцу на расстояние меньше 0,01 а. е. (например, вторая комета 1882 г., комета Икейа — Секи 1965 г.), наблюдались линии железа, никеля, хрома, меди, кальция и магния.

Хвосты I типа образованы ионизованными газами. В них свечение исходит главным образом от молекул окиси углерода (CO) и азота (N_2), у которых оторвано по одному электрону. Кроме того, наблюдается слабое излучение ионизованных молекул углекислого газа (CO_2) и углеводорода (CH). Что касается хвостов II и III типов, то они состоят из пылинок разных размеров.

Список молекул, присутствующих в кометах, заведомо не полон. Нам известны лишь те молекулы, которые дают достаточно яркие излучения, лежащие в области спектра, ныне доступной для наблюдений. Все молекулы, наблюдаемые в кометах, являются химически неустойчивыми — они стремятся объединиться в более сложные молекулы. Но головы и хвосты комет столь разрежены, что столкновения молекул (при которых они только и могут объединиться) происходят крайне редко, и благодаря этому хими-

чески неустойчивые молекулы могут сохраняться долгое время. Лишь в ближайших окрестностях ядра, на расстояниях, не превышающих 3—5 тыс. км, разлетающиеся от ядра молекулы часто сталкиваются друг с другом.

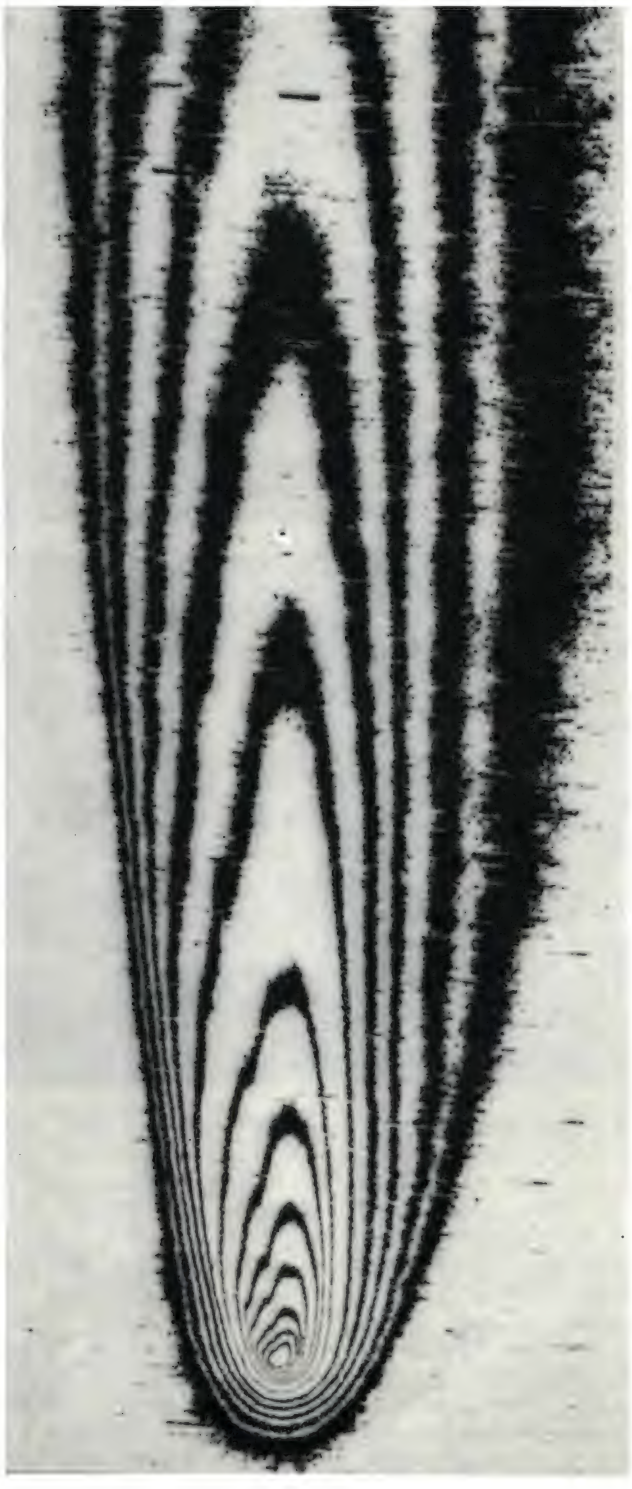
Ф. А. Бредихин предполагал, что отталкивательное действие Солнца, приводящее к появлению кометных хвостов, имеет электрическую природу. Этот взгляд был впервые высказан М. В. Ломоносовым, который писал о кометах: «...бледного сияния и хвостов причина недовольно еще изведана, которую я без сомнения в электрической силе полагаю».

На рубеже XIX и XX столетий выдающийся русский физик П. Н. Лебедев доказал, что свет давит на мелкие пылинки. В то же время теоретические соображения указывали, что свет должен давить и на газовые молекулы.

В настоящее время не подлежит сомнению, что и электрические силы, и силы светового давления играют в кометах важную роль. Отталкивательные силы, действующие на нейтральные атомы и молекулы и на пылинки, целиком определяются световым давлением Солнца. Газы непрерывно выделяются из ядра кометы, пока оно движется через внутренние районы планетной системы и достаточно прогревается Солнцем. Однако нейтральные молекулы разрушаются солнечным излучением раньше, чем они успевают покинуть голову кометы. Поэтому, несмотря на то что на них действует световое давление Солнца, они не образуют хвоста. Только атомы натрия, которые не так быстро ионизуются солнечным излучением, иногда образуют натриевый хвост.

Твердые пылинки все время покидают ядро вместе с газами. Но обычно они недостаточно многочисленны, чтобы образовать заметный пылевой хвост. Лишь у некоторых комет количество мелких пылинок оказывается огромным, и у них наблюдается хвост II типа (при этом, как правило, наблюдается также и газовый хвост I типа). Кроме того, иногда случается, что из ядра вылетает сразу целое облако пылевых частиц разных размеров. Крупные пылинки слабо отталкиваются Солнцем и остаются вблизи ядра, а более мелкие, отталкиваемые сильнее, отходят дальше. Таким образом, облако пылинок растягивается в хвост III типа. Через несколько дней пылинки рассеиваются и хвост III типа исчезает.

Иначе обстоит дело в хвостах I типа. Большие отталкивательные силы, действующие в этих хвостах, их струйчатое строение и другие особенности не могут быть объяснены световым давлением. Они связаны с тем, что эти хвосты состоят из ионизованных, т. е. электрически заряженных, молекул. По современным представлениям, пока еще не до конца



Изофоты кометы (линии, соединяющие места одинаковой яркости) и их изменение.

разработанным, хвосты I типа образуются в результате взаимодействия ионизованных кометных молекул с потоками заряженных частиц — корпускул, испускаемых Солнцем.

После тщательного изучения самых больших, наиболее вытянутых кометных орбит голландский астроном Оорт в 1950 г. предположил, что Солнечная система окружена сейчас огромным облаком комет (вернее, кометных ядер). Облако это простирается до расстояний в 100—200 тыс. а. е. (15—30 триллионов км) от Солнца и содержит около 10^{11} (т. е. около 100 млрд.) комет. Почти все они движутся по орбитам, перигелии которых лежат далеко за пределами планетных орбит. Они не приближаются близко к Солнцу и не растрачивают своих запасов газов. В районе афелиев своих орбит эти кометные ядра испытывают притяжения со стороны ближайших к Солнцу звезд, которые изменяют их движение, а следовательно, и их орбиты. Случается, что притяжение другой звезды отрывает комету от Солнца, так что число комет в облаке постепенно уменьшается. Время от времени измененная орбита оказывается такой, что приводит кометное ядро в окрестности Солнца. Тогда из ядра начинают выделяться газы, и мы наблюдаем комету, движущуюся по крайне вытянутой, почти параболической орбите.

Пролетая среди планет, кометы подвергаются действию их притяжения и снова несколько изменяют свои орбиты. В тех случаях, когда планетные притяжения уменьшают скорость кометы, размеры орбиты сокращаются, комета начинает чаще возвращаться к Солнцу, вновь и вновь меняя свою орбиту под действием планетных притяжений и теряя газы под действием солнечного тепла. В тех же случаях, когда скорость кометы увеличивается, бывает, что она преодолевает притяжение Солнца и навсегда уходит от него в межзвездные просторы.

Образование облака комет, окружающего Солнечную систему, протекало в эпоху образования планет — 4,5—5 млрд. лет назад — из вещества, оставшегося при формировании планет-гигантов.

Среди множества разнообразнейших кометных орбит есть и такие, которые пересекают орбиты планет, в том числе и орбиту Земли. Поэтому изредка должны происходить столкновения планет с кометными ядрами. Судя по всем данным, взрыв Тунгусского метеорита был на самом деле столкновением Земли не с обычным крупным метеоритом, а с ядром небольшой кометы поперечником менее 100 м.

В последние годы ученые все более и более активно обсуждают вопрос о проведении исследований головы и ядра кометы «на месте» — путем посылки к комете автоматической межпланетной станции.

Метеоры и метеориты

Общий вид каменного метеорита Венгерово.

Метеоры — атмосферное явление

В межпланетном пространстве движутся с огромной скоростью мельчайшие твердые частицы, весящие доли грамма. Вторгаясь в земную атмосферу со скоростью от 11 до 72 км/с, частица встречает чрезвычайно сильное сопротивление воздуха. Поэтому она нагревается до нескольких тысяч градусов, вскипает и испаряется. Раскаленный и светящийся газ мы и наблюдаем в виде быстро проносящейся по небу «падающей звезды» — *метеора*.

После ярких метеоров на небе в течение нескольких секунд виден след — слабосветящаяся тонкая ниточка. Это — свечение отдельных молекул в воздухе.

Частица, вызывающая появление метеора, называется *метеорной частицей*.

Метеоры появляются в слое атмосферы от 80 до 120 км над поверхностью Земли.

Метеорные потоки

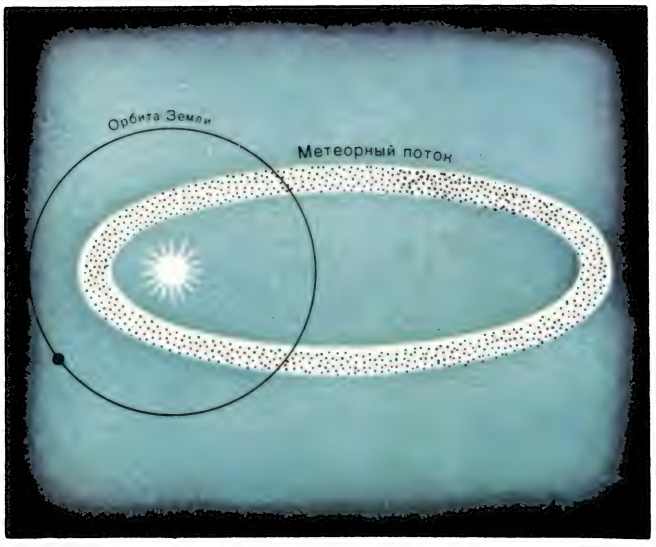
Ежегодно бывают ночи, когда можно увидеть особенно много метеоров. Они появляются один за другим и кажутся разлетающимися во все стороны из одной точки на небе, называемой *радиантом*. Земля в это время встречает целый рой метеорных частиц, образующих *метеорный поток*. Все частицы потока движутся параллельно друг другу, а метеоры кажутся нам разлетающимися лишь в перспективе. Так, рельсы железной дороги, параллельные между собой, тоже кажутся нам расходящимися из одной удаленной точки.

Метеорные потоки названы по созвездиям, в которых расположены их радианты. В таблице даны названия наиболее крупных метеорных потоков.

Метеорные потоки возникают в процессе распада комет, вдоль орбит которых рассеиваются метеорные частицы. Пересекая орбиту кометы, Земля

Фотография звездного неба, на котором слева запечатлен след яркого метеора, а справа видна фотография далекой звездной системы в созвездии Андромеды.

Расположение орбиты Земли и потока метеорных частиц.



встречает множество рассеянных метеорных частиц. Иногда их бывает так много, что наблюдается настоящий «звездный дождь». Так, обильный «звездный дождь» наблюдался в ночь с 9 на 10 октября 1933 г., когда метеоры сотнями и тысячами в минуту проносились по небу.

Время встречи Земли с потоком	Название метеорного потока	Название созвездия
Со 2 по 4 января	Квадрантиды	Дракон (раньше — Квадрант)
С 18 по 24 апреля	Лириды	Лира
С 28 апреля по 5 мая	Аквариды	Водолей
С 5 по 18 августа	Персеиды	Персей
10 октября	Драконіды	Дракон
С 20 по 24 октября	Орионіды	Орион
С 15 по 17 ноября	Леониды	Лев (Лео)
С 10 до 18 декабря	Гемініды	Близнецы (Гемини)

Наблюдения метеоров

Раньше астрономы наблюдали метеоры только невооруженным глазом. Следя за каким-либо участком неба, они наносили на звездную карту в виде стрелки каждый замеченный метеор. Стрелки соответствовали положению и направлению движения метеора. По картам определялись радианты и их смещения на небе от ночи к ночи; по этим данным вычислялись орбиты потоков.

В 30-х годах метеоры стали фотографировать. Но фотографировать можно лишь очень яркие метеоры, а они появляются редко. В 40-е годы на помощь пришла радиолокация. Наблюдатель посылает при помощи радиолокатора радиоволны длиной в несколько метров. В момент пролета метеора радиоволны отражаются от оставленного метеором следа и регистрируются тем же радиолокатором. Наблюдения при помощи радиолокации значительно точнее, и проводить их можно в любую погоду, и притом не только ночью, но и днем.

При наблюдении метеоров исследуют распределение метеорных частиц в межпланетном пространстве и орбиты метеорных потоков, что важно для безопасности движения космических кораблей. Кроме того, в результате наблюдений метеоров получают данные о составе и строении верхних слоев атмосферы, о направлении и силе дующего там ветра и др.

Огненные шары — болиды

Иногда на небе появляется стремительно несущийся огненный шар — *болид*. За болидом тянется огненный хвост, рассыпаются искры и остается слабосветящийся след, днем имеющий вид серой дымной полосы. Под действием ветра, дующего на разных высотах в разных направлениях, след, первоначально прямолинейный, принимает зигзагообразную форму. Ночью болид ярко освещает местность. Через несколько минут после исчезновения болида раздаются удары, подобные взрывам, а затем доносится грохот и постепенно затихающий гул.

Болиды появляются в результате вторжения в атмосферу *метеорных тел* — каменных или железных обломков. За время движения в атмосфере они не успевают полностью разрушиться, и их остатки — *метеориты* падают на поверхность Земли.

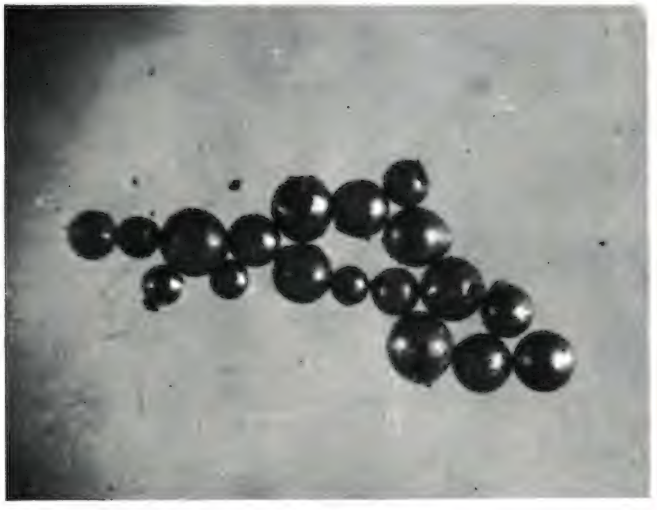
Общий вид и размеры метеоритов

Метеорит покрыт корой плавления толщиной не более 1 мм, обычно черного цвета. На поверхности метеорита видны характерные ямки — *регмаглипты*, образующиеся в результате сверлящего действия воздуха при движении метеорита с космической

Слева — пылевой след болида.

Справа — фотография того же следа спустя полчаса. Под влиянием сильного ветра след искривился и принял зигзагообразную форму.

Внизу слева — затвердевшие капельки-шарики, образовавшие след болида и после осаждения извлеченные магнитом.



Внизу справа — «Падение Сихотэ-Алинского метеоритного дождя». С картины П. И. Медведева.

скоростью. Обычно метеориты имеют форму обломков, что является результатом их действительного раскола в атмосфере во время движения.

Самый крупный цельный метеорит был найден в Юго-Западной Африке в 1920 г. Метеорит этот, названный Гоба (по наименованию населенного пункта, ближайшего к месту падения), железный, и масса его около 60 т. Такие крупные метеориты падают редко. Как правило, массы метеоритов составляют сотни граммов или несколько килограммов.

Чаще падают каменные метеориты, и в среднем из 16 упавших метеоритов только один железный. Еще реже падают железокаменные метеориты.

Как падают метеориты

Метеориты падают внезапно, в любое время и в любом месте земного шара.

Вторгаясь в земную атмосферу со скоростью около 15—20 км/с, метеорное тело уже на высоте 100—120 км встречает сильное сопротивление воздуха. Вследствие огромной скорости оно сжимает перед собой частицы воздуха. В результате перед ним образуется своеобразная подушка из сильно сжатого и нагретого воздуха. Нагревается до нескольких тысяч градусов Цельсия и поверхность самого метеорного тела. В этот момент оно и наблюдается как болид.

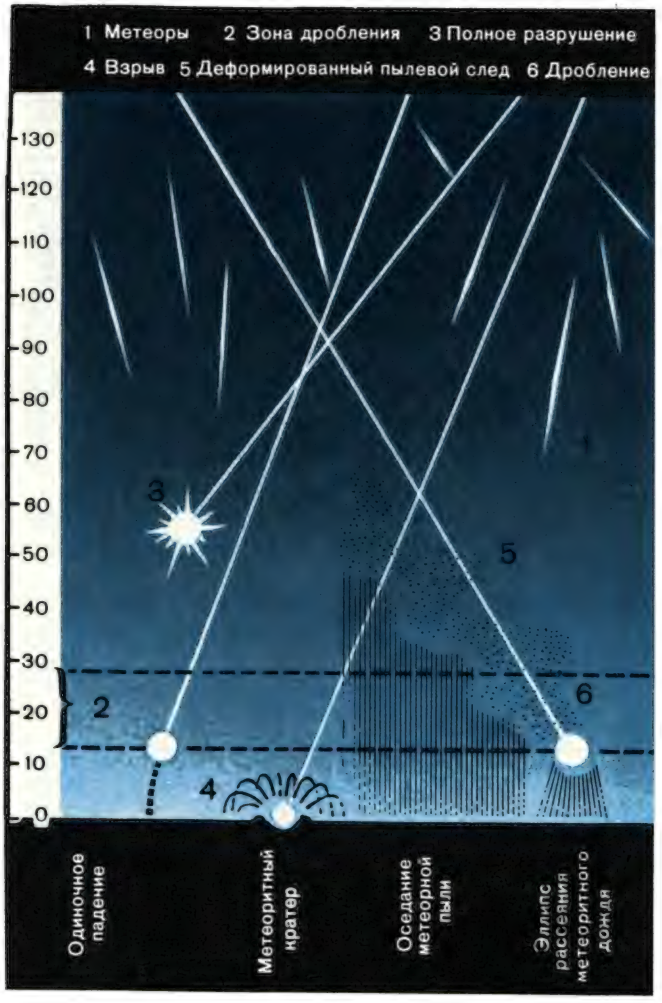
Когда метеорное тело движется в атмосфере, его вещество расплавляется, вскипает и превращается в пар, а частично разбрызгивается мельчайшими капельками. Поэтому метеорное тело как бы тает, непрерывно уменьшается. Из разбрызганных капелек, которые, затвердевая, превращаются в шарики, образуется след, остающийся на пути движения болида.

Приближаясь к земной поверхности, метеорное тело попадает в более плотные слои атмосферы и быстро тормозится. На высоте около 10—20 км вследствие огромного давления воздуха оно раскалывается на части, которые полностью затормаживаются, перестают нагреваться и светиться; в этот самый момент болид исчезает. Обломки метеорного тела — метеориты падают на Землю под влиянием силы тяжести.

Метеорит огромных размеров, в сотни тысяч тонн, не может затормозиться в воздухе. Со скоростью нескольких километров в секунду он ударяется о грунт и от удара мгновенно нагревается до очень высокой температуры; значительная часть его вещества превращается в пар. Устремляясь с огромной силой во все стороны, этот пар производит взрыв. На месте удара метеорита образуется метеоритный кратер, а уцелевшие отдельные осколки метеорита разлетаются во все стороны и падают вокруг кратера.

В разных местах земного шара известно несколько десятков метеоритных кратеров. Один из больших — Аризонский находится в США. Поперечник этого кратера равен 1200 м, а глубина — 170 м. Вокруг этого кратера было собрано много тысяч мелких осколков железного метеорита, общей массой свыше 30 т. В нашей стране группа метеоритных кратеров находится на острове Саарема в Эстонской ССР.

Схема движения в атмосфере метеоров и метеоритов.



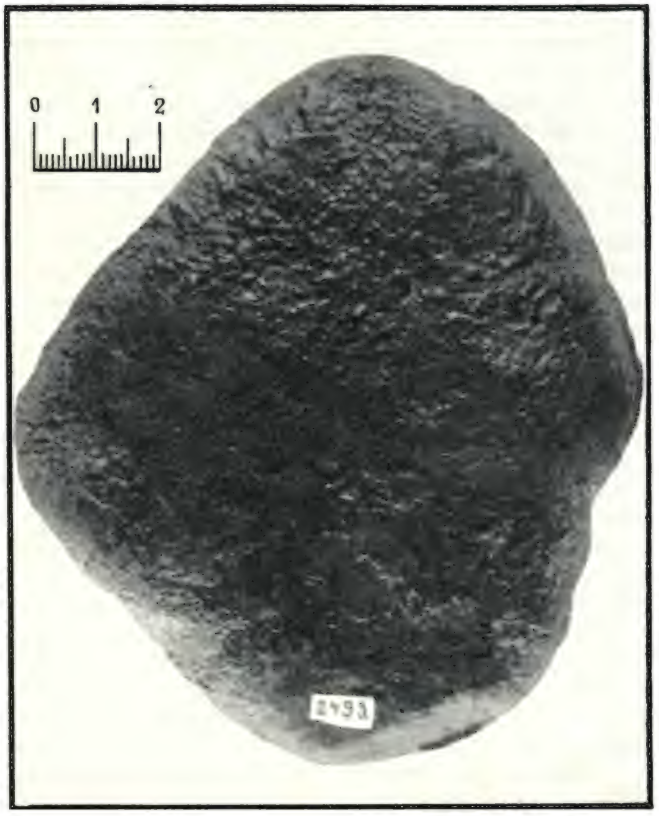
«Железный дождь»

Утром 12 февраля 1947 г. над Советским Приморьем стремительно пронесся по небу ослепительно яркий болид. После его исчезновения раздались оглушительные удары и грохот. На пути пролетевшего болида остался след в виде широкой серой полосы. Вскоре след стал изгибаться и, разрываясь на клочья, постепенно исчез. После болида в западных отрогах Сихотэ-Алиня упал огромный железный метеорит, получивший название Сихотэ-Алинского. Метеорит еще в воздухе раскололся на тысячи частей и выпал на землю «железным дождем». Наиболее крупные

Затвердевшие брызги расплавленного вещества метеорита на его поверхности.

Один из обломков Сихотэ-Алинского метеоритного дождя.

Каменный метеорит Одесса массой 1,9 кг.



Осколок метеорита массой 51 кг 300 г с реки Ясачная.

Слева — Аризонский метеоритный кратер.

Справа — поваленны˘ на месте падения Тунгусского метеорита.

Рядом — магнитные и стеклянные шарики, обнаруженные на месте падения Тунгусского метеорита-кометы.

части метеорита весили по нескольку тонн. При ударе о грунт они раздробили скальные породы, образовали в них кратеры и воронки и еще раз раскололись на тысячи осколков. Было обнаружено 200 кратеров и воронок диаметром от 20 см до 26 м.

Экспедиции Комитета по метеоритам Академии наук СССР, работавшие в 1947—1950 гг., собрали и вывезли из тайги более 5000 метеоритных осколков, общей массой около 23 т.

В 1967 г. Комитет по метеоритам возобновил работы по изучению падения Сихотэ-Алинского метеоритного дождя. В течение последних пяти лет ежегодно в районе падения работала экспедиция. При помощи миноискателей собирались метеоритные осколки, рассеявшиеся по тайге, измерялись их магнитные свойства, производились раскопки кратеров для изучения их строения, были взяты образцы грунта для изучения содержащегося в нем распыленного метеоритного вещества и т. д. Работы по изучению падения Сихотэ-Алинского метеоритного дождя и сбору его частей продолжаются.

Тунгусский метеорит-комета

Утром 30 июня 1908 г. в сибирской тайге, в бассейне реки Подкаменной Тунгуски, наблюдалось явление, похожее на падение гигантского метеорита. Ослепительно яркий болид пронесся над Центральной Сибирью. Через несколько минут после того, как болид скрылся за горизонтом, раздались оглушительные взрывы и гул. Во многих селениях в окнах раскололись стекла, попадала с полок посуда. От воздушной волны люди и животные валились с ног.

Впервые место предполагаемого падения метеорита было обследовано лишь в 1927 г., когда в район падения проник советский ученый Л. А. Кулик. Он обнаружил на площади радиусом 25—30 км поваленный лес. Деревья лежали с вывороченными корнями, образуя гигантский веер вокруг центрального участка этой области. Потом еще несколько экспедиций Кулика занимались изучением обстановки падения метеорита. Некоторые ямы, которые Кулик принял за метеоритные воронки, были раскопаны. Однако метеоритов в них найти не удалось. Как позднее было установлено, воронки оказались обыкновенными болотами.

Великая Отечественная война прервала исследования Кулика, он ушел добровольцем на фронт и погиб в 1942 г.

После войны Комитет по метеоритам провел несколько экспедиций, которые установили, что метеорит взорвался в воздухе и что он был ядром небольшой кометы, полностью разрушившейся в атмосфере. Поэтому в районе падения нет ни метеоритных кратеров, ни осколков метеорита. Однако в почве были обнаружены мельчайшие частицы (шарики), представляющие собой продукт разрушения метеорита-кометы. Изучение Тунгусского падения еще не окончено и в настоящее время продолжается Комиссией по метеоритам Сибирского отделения АН СССР.

Из чего состоят метеориты

Метеориты состоят из тех же химических элементов, которые имеются и на Земле. Это в основном следующие восемь элементов: железо, никель, сера, магний, кремний, алюминий, кальций и кислород. Все остальные элементы встречаются в метеоритах в ничтожных количествах. Указанные элементы, соединяясь между собой, образуют в метеоритах различные минералы, большинство которых распространено и на Земле.

Однако в метеоритах встречаются, правда в очень незначительных количествах, и неизвестные на Земле минералы.

Железные метеориты почти целиком состоят из железа в соединении с никелем и с малым количеством кобальта. Каменные метеориты состоят главным образом из силикатов — минералов, представляющих собой соединения кремния с кислородом и с примесью различных других элементов, например магния, алюминия, кальция и др. В каменных метеоритах встречается и никелистое железо в виде мелких включений — зернышек, рассеянных по всей массе метеорита. Железокаменные метеориты состоят приблизительно из равных количеств никелистого железа и каменистого вещества.

Метеориты имеют интересную внутреннюю структуру. Так, если отполировать поверхность железного метеорита и протравить ее слабым раствором кислоты, то на поверхности появится своеобразный рисунок из переплетающихся между собой полосок, называемый *видманштеттеновыми фигурами*. У более редких железных метеоритов на протравленных поверхностях появляются тонкие параллельные линии, называемые *неймановыми линиями*.

Если посмотреть на излом каменного метеорита, то даже невооруженным глазом можно заметить округлые частицы — *хондры*. Хондры имеют форму шарика диаметром в среднем около 1 мм.

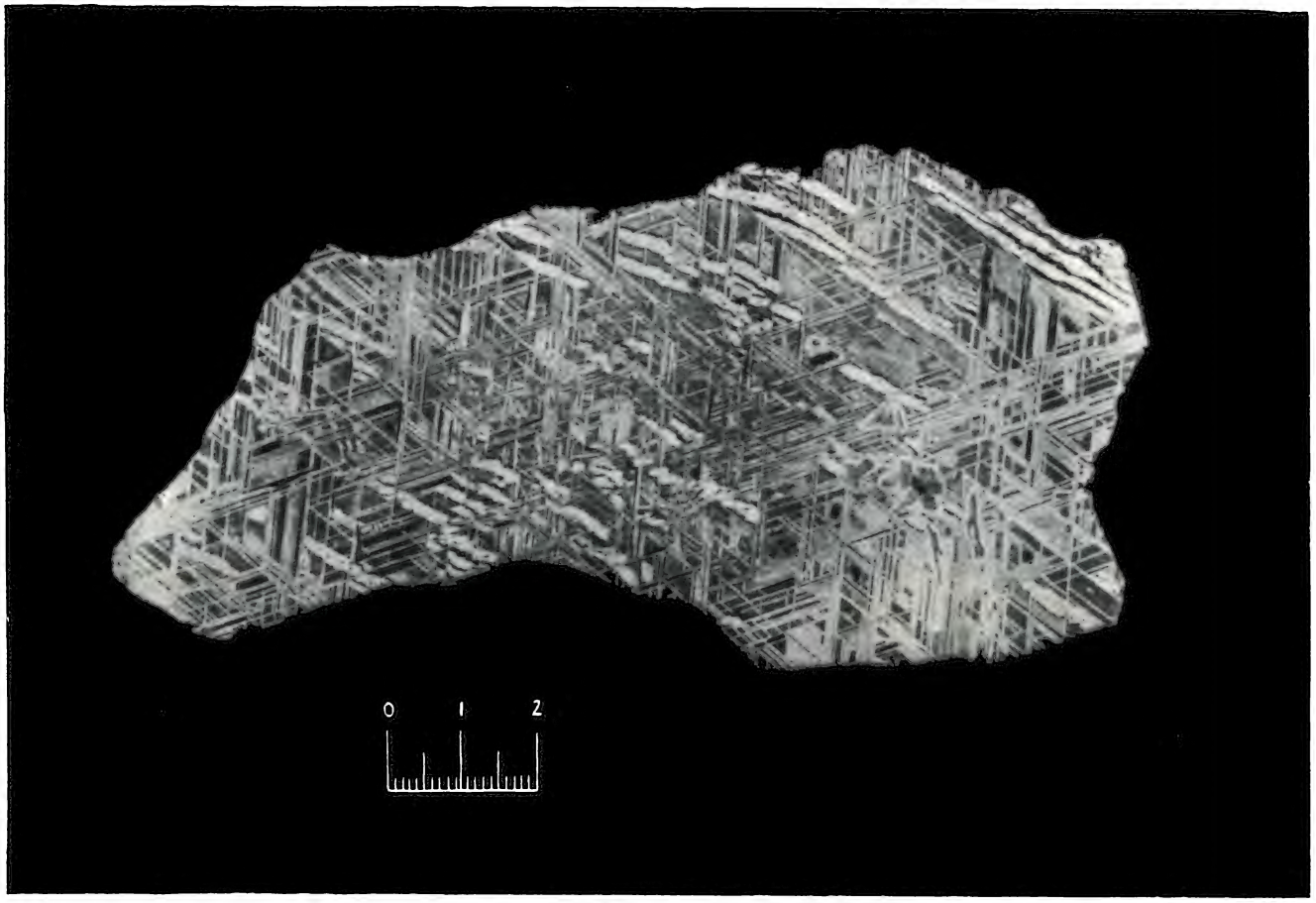
В разных местах земного шара были найдены *тектиты* — стеклянные куски небольшого размера массой в несколько граммов. Как и где (на Земле или в космосе) образовались тектиты, пока не установлено. Некоторые ученые считают тектиты особым, стеклянным, классом метеоритов, другие предполагают, что тектиты образовались на Земле в результате какого-то процесса; пока никто и никогда не наблюдал падений тектитов.

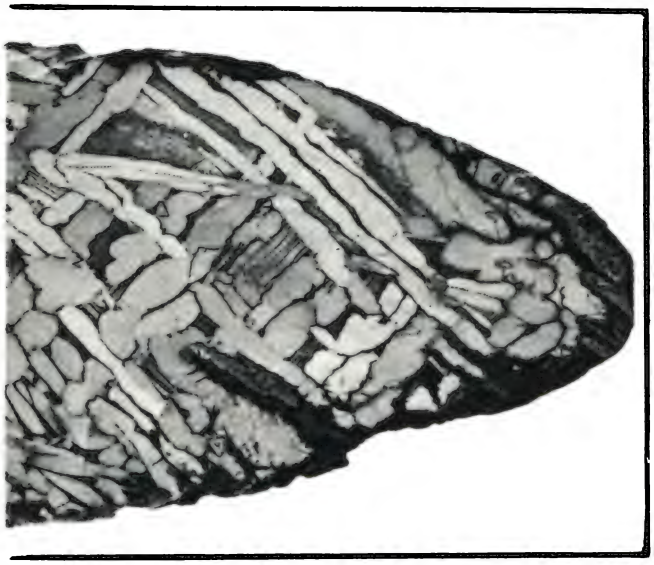
Происхождение и значение метеоритов

Подавляющее большинство ученых считают, что метеориты представляют собой осколки малых планет — астероидов. В межпланетном пространстве кроме небольшого числа крупных астероидов есть множество мелких: их поперечники не превышают

Вверху — видманштеттеновы фигуры на протравленной поверхности железного метеорита.

Внизу — видманштеттеновы фигуры.





километра, а бывают и значительно меньше. Сталкиваясь между собой, они дробятся на все большее число еще более мелких осколков. Эти осколки, встречаясь с Землей, падают на ее поверхность в виде метеоритов.

Изучение метеоритов позволяет получать все более детальные и точные сведения о составе, структуре и физических свойствах других небесных тел — астероидов, спутников больших планет и др. Изучение метеоритов пополняет также наши сведения о внутреннем строении и составе Земли. Особенно важное значение изучение метеоритов имеет для решения проблемы образования и дальнейшей эволюции планетной системы. В последние годы ученые разработали новые методы, позволяющие по данным изучения метеоритов (изотопного состава отдельных химических элементов) исследовать космические лучи в межпланетном пространстве, что имеет огромное значение для полетов космических кораблей.

Тектиты.

Вверху — неймановы

Внизу — хондры.

Помощь населения в сборе метеоритов

Метеориты падают всегда неожиданно, и нельзя заранее предсказать, когда и где упадет метеорит. (Поэтому нельзя заблаговременно подготовиться к наблюдениям падений метеоритов.) Но ученым большую помощь оказывают случайные очевидцы, присылающие описания наблюдавшихся ими явлений (болидов), а в случае находки метеоритов — и самые метеориты. Описания явлений и найденные метеориты следует посылать в Комитет по метеоритам Академии наук СССР по адресу: Москва, 117313, улица Марии Ульяновой, 3, корпус 1.

В описании болида нужно, по возможности, ответить на следующие вопросы: 1) дата и время появления болида; 2) место наблюдения; 3) направление движения болида; 4) продолжительность движения болида в секундах; 5) размеры болида по сравнению с видимым размером Луны или Солнца; 6) цвет болида; 7) была ли освещена местность во время движения болида; 8) наблюдалось ли дробление болида; 9) остался ли после болида след, каковы его форма и последующие изменения, а также продолжительность видимости; 10) какие звуки были слышны во время полета болида и после его исчезновения.

В описании нужно также указать фамилию, имя и отчество и почтовый адрес.

Газовая туманность Рыбачья Сеть в созвездии Лебедя.

Звезды и глубины Вселенной

Сколько звезд на небе?

Когда в ясную ночь с открытого места за городом вы смотрите на небо, вам кажется, что оно усыпано бесчисленными звездами.

Наш великий ученый и поэт М. В. Ломоносов в одной из своих од так писал о небе:

Открылась бездна, звезд полна,
Звездам числа нет, бездне — дна.

Впечатление о бесчисленности звезд, видимых невооруженным глазом, ошибочно. Даже в самую ясную безлунную ночь за городом, где не мешает городской свет, невооруженным глазом на небе видно всего лишь около 3000 звезд.

Число звезд кажется преувеличенным, пока мы еще не разбираемся в узоре созвездий. Впечатление бесчисленности звезд усиливается их мерцанием — одни и те же звездочки кажутся то ярче, то слабее из-за того, что между ними и нами протекают струйки воздуха различной плотности.

Самые яркие звезды условились называть звездами 1-й величины, а самые слабые из видимых невооруженным глазом — звездами 6-й величины. Звезды 1-й величины ярче звезд 6-й величины в 100 раз. В бинокль видны звезды до 8—9-й величины, а в телескоп — еще более слабые.

Звезд 1-й величины, особенно ярких, на всем небе около 20, звезд 2-й величины, таких, как главные звезды созвездия Большой Медведицы, около 70, а всех звезд ярче 6-й величины около 6000; но над горизонтом видна только половина всего неба.

Звездные карты, атласы и каталоги

Астрономы для множества звезд определили очень точно их положение на небе и установили их видимую звездную величину. Такие большие списки с обозначением положений звезд получили название *звездных каталогов*.

Положение звезд на небе определяют при помощи различных специальных инструментов. В наше время для этого служат небольшие телескопы, снабженные металлическими кругами, разделенными на градусы и их доли. По этим кругам можно точно отсчитать в угловой мере направление телескопа, когда в него видна данная звезда.

Положение на небе более ярких звезд определено с большей точностью, чем положение многочисленных слабых звезд. В общей сложности усилиями ученых разных стран и в разное время занесены в каталоги положения почти миллиона звезд.

Итак, около миллиона звезд находится на строгом учете, а не просто сосчитано. Подсчитано, что звезд ярче 21-й звездной величины около 2 млрд. Самыми большими из современных телескопов можно было бы сфотографировать в несколько раз больше звезд.

По установленным положениям звезд на небе можно составить *карты* звездного неба. Одна такая звездная карта, содержащая звезды, которые видны невооруженным глазом в северном полушарии, дана в этой книге на стр. 60.

Недавно одним из самых больших телескопов было заснято $^3/_4$ всего неба и с этих фотографий сделаны отпечатки. Такой фотографический *атлас* неба показывает все звезды до 21-й величины. Он состоит почти из 900 листов, каждый из которых представляет квадрат размером 36×36 см.

Видимое и действительное. Светимости звезд

В астрономии всегда нужно ясно отличать видимое от действительного. Мы говорим: «Солнце коснулось горизонта»,— и мы это видим. Но ведь на самом-то деле Солнце горизонта не касается и горизонт — это только кажущийся край Земли.

Самое грубое указание видимого места звезды на небе — это указание созвездия, в котором звезда находится. Но это указание говорит лишь о приблизительном направлении к звезде. Соседние на вид звезды одного созвездия могут быть на совершенно различных расстояниях от нас, а в пространстве очень далекими друг от друга. Следовательно, указание «в таком-то созвездии» есть указание направления к звезде, а не положения ее в пространстве.

Расстояния до многих ближайших звезд, а следовательно, их положения, не только видимые, но и в пространстве, удалось определить с большим трудом. Расстояния же до подавляющего большинства звезд пока не поддаются точному определению.

Звезда, кажущаяся яркой, может выглядеть такой или оттого, что она близка к нам, или оттого, что хотя она и далека, но ее истинная сила света очень велика. Из 20 ближайших к нам звезд только три видны невооруженным глазом, а из 20 звезд, кажу-

щихся самыми яркими, только три входят в число ближайших. Другие самые яркие звезды находятся очень далеко от нас, но они излучают много света.

Сила света звезды по сравнению с Солнцем называется ее *светимостью*. Если говорят, что светимость звезды равна 5, то это значит, что она в действительности в 5 раз ярче Солнца, а если ее светимость обозначается 0,2, то она в 5 раз слабее Солнца.

Светимость звезды можно рассчитать, если известно расстояние до нее. И наоборот, зная светимость звезды, можно определить расстояние до нее, так как видимый блеск источника света меняется обратно пропорционально квадрату расстояния до него.

Велик и разнообразен мир звезд. Если свет Солнца принять за свет свечи, то во Вселенной есть звезды, которые светят и как ночные светлячки, и как мощные прожекторы. Точнее говоря, есть звезды по силе света в 50 тыс. раз слабее Солнца (из них мы видим лишь ближайшие) и в миллион раз ярче его. Некоторые звезды иногда светят в миллиард раз ярче Солнца, о них будет сказано дальше.

Самые яркие звезды ярче самых слабых в десятки миллиардов раз. Таким образом, когда мы говорим, что все звезды — это такие же солнца, как наше, то подразумеваем под этим лишь то, что все они самосветящиеся вследствие высокой температуры небесные тела. Сила же их света, или светимость, и размеры очень разнообразны.

«Градусники» для звездных температур

Если мы присмотримся к более ярким звездам, то заметим, что они различного цвета: голубоватого, белого, желтого, оранжевого и красного. Как установили ученые, цвет звезд соответствует температуре их поверхности. Голубоватые звезды самые горячие — температура на их поверхности составляет десятки тысяч градусов. У белых звезд (таких, как Сириус и Вега) температура около 10 000 К, у желтых (как Капелла и наше Солнце) — порядка 6000 К и у красных (как Бетельгейзе и Антарес) — 3000 К и ниже. Повторяем, это температура их поверхности. В направлении к центру звезд температура растет и в центре достигает миллионов и десятков миллионов градусов. На Земле совсем недавно такие высокие температуры были недостижимы. Только в последние десятилетия при взрыве атомных и водородных бомб они возникают на короткое время. Причина и тут и там одного и того же характера — в недрах звезд происходят превращения водорода в гелий. Эти реакции поддерживают мощное тепловое и световое излучение Солнца и звезд в течение огромных промежутков времени.

Изучение звездных температур и происходящих в звездах атомных реакций имеет очень важное практическое значение. Именно оно и помогло овладеть атомной энергией на Земле. Недра звезд — это как бы гигантские физические лаборатории. Они помогают нам изучать свойства вещества в условиях, вообще неосуществимых на Земле или осуществимых лишь на миг в лабораториях.

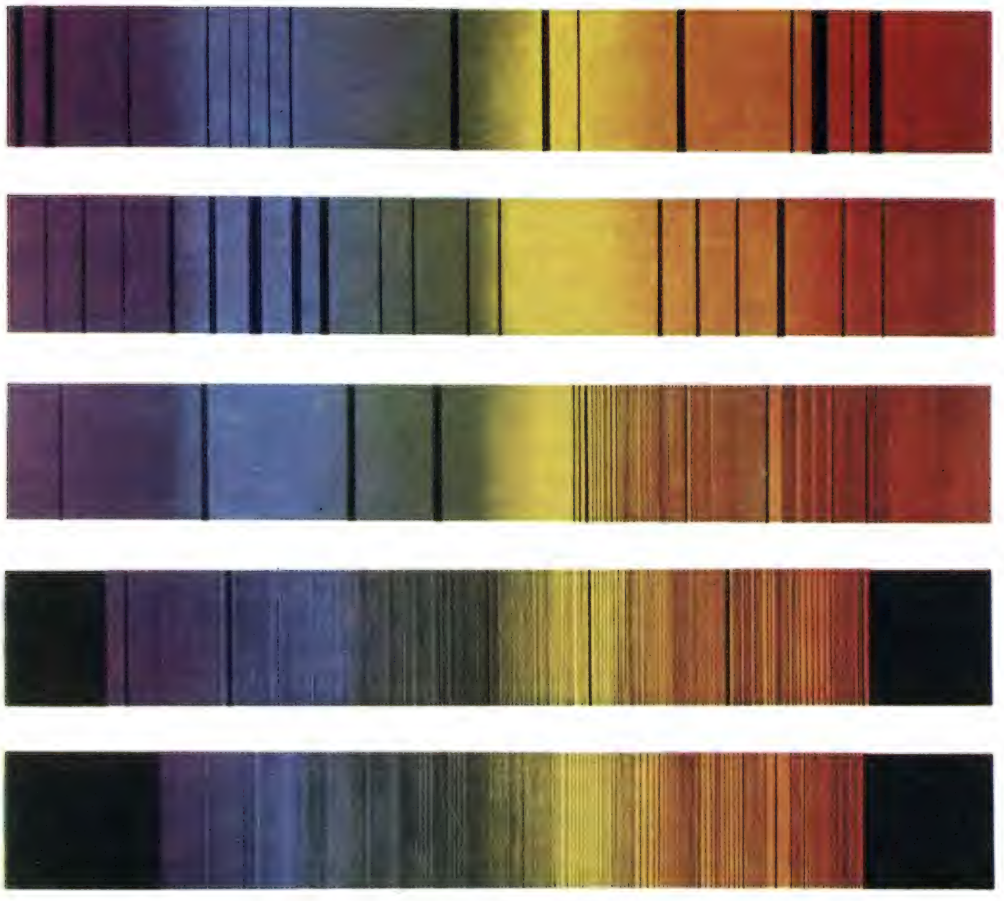
Физические данные о недрах звезд, в частности температуру в них, узнают на основе изучения поверхности звезд путем расчетов, которые производят по законам физики. Температуру звезд на их поверхности нельзя, конечно, измерить градусником. Для этой цели существуют другие способы.

Если свет звезды разложить стеклянной призмой в спектр, имеющий вид радужной полоски, то окажется, что чем краснее цвет звезды и чем ниже ее температура, тем ярче красные лучи в ее спектре. По распределению яркости вдоль спектра и судят о температуре поверхности звезды.

Температуру звезды можно определить также измерением количества тепла, приходящего от нее на Землю. Для этого надо знать расстояние до звезды и ее размеры. Излучение звезды, собранное большим телескопом, направляют на термоэлемент — спай тонких проволочек из двух разнородных металлов. При нагревании спая в проволочках возникает электродвижущая сила, по ней и узнают о количестве тепла, доходящего к нам от звезд. Так как тепла доходит мало, то, чтобы измерить его, термоэлемент должен быть очень чувствительным.

Даже у самых холодных звезд температура настолько высока, что вещество их представляет собой раскаленный газ, как и у Солнца. Если мы вспомним, что масса планет гораздо меньше массы Солнца и звезд, то придем к интересному выводу: во Вселенной подавляющее большинство вещества находится в состоянии раскаленного газа. Очень малая его доля находится в твердом или жидком состоянии, а на долю живого вещества, даже если у очень многих звезд имеются обитаемые планеты, приходится уже совсем ничтожная часть.

По темным линиям в спектрах звезд узнают их химический состав. Он оказывается по большей части почти таким же, как у Солнца. В основном это водород, затем гелий. Доля других химических элементов очень мала. Значит, все небесные тела состоят из тех же химических элементов, какие мы встречаем на Земле.



Типы звездных спектров.

Пульсары

Осенью 1967 г. английскими учеными под руководством профессора А. Хьюиша на радиоастрономической обсерватории Кембриджского университета был обнаружен источник радиоизлучения, расположенный в пределах нашей Галактики.

В отличие от «обычных» космических радиостанций, излучение которых в большинстве случаев довольно постоянно, а если и меняется, то медленно, в виде отдельных беспорядочных вспышек и всплесков, новые радиоисточники, получившие название *пульсаров*, излучают радиоволны в виде отдельных импульсов, следующих друг за другом с необыкновенной точностью. Так, промежуток времени между двумя последовательными сигналами пульсара CP 1919, открытого первым, составлял 1,33730113 с, что сравнимо с точностью искусственно созданных кварцевых и атомных эталонов времени.

Интересно, что сначала кембриджские астрономы склонны были допустить, что ими обнаружен искусственный передатчик другой космической цивилизации. Возможно, что именно это обстоятельство явилось одной из причин, заставившей Хьюиша и его сотрудников хранить свое открытие в секрете. Сообщение о загадочных пульсирующих источниках космического радиоизлучения было опубликовано лишь в конце февраля 1968 г., уже после того как на Кембриджской радиоастрономической обсерватории было открыто еще три пульсара.

В настоящее время известно несколько десятков пульсаров — их наблюдают и изучают на радиоастрономических обсерваториях различных стран, в том числе и в Советском Союзе.

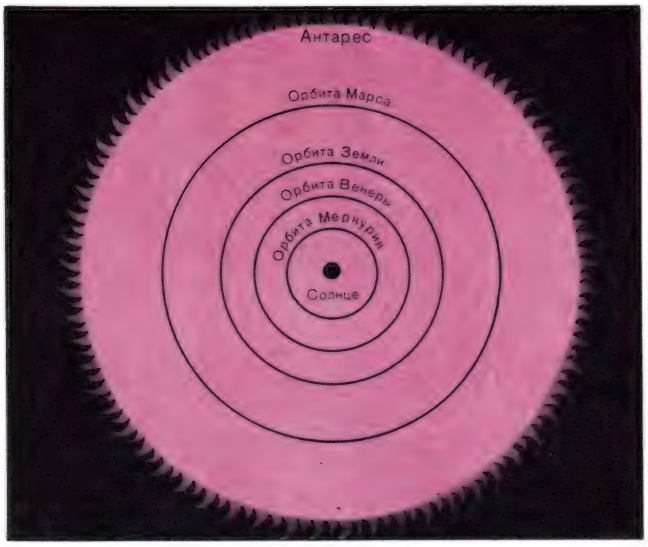
Наряду со строгой периодичностью импульсного излучения для пульсаров характерно непостоянство величины и формы отдельных импульсов. Кроме того, за длительные промежутки времени увеличивается, хотя и очень медленно, и период, т. е. расстояние между соседними сигналами. Но ни у одного из пульсаров он не превышает 4 с.

Мощность радиоизлучения пульсаров оказалась огромной.

Высокая мощность радиоизлучения особенно удивительна, если учесть, что пульсары, по всей видимости, очень небольшие звездоподобные объекты. Во всяком случае кратковременность их радиоимпульсов привела астрономов к выводу, что размеры поперечников пульсаров не превышают 15 тыс. км.

Но скорее всего пульсары — очень маленькие, быстро вращающиеся звезды с поперечником всего около 10 км. По-видимому, это и есть *нейтронные* звезды, су-

Звезда Антарес — красный сверхгигант.



Карлики и гиганты в мире звезд

Количество энергии, излучаемое единицей поверхности звезды, скажем 1 м^2, зависит от температуры звезды. У двух звезд с одинаковой температурой равные площади их поверхности излучают одинаково. Значит, если у двух звезд одинаковой температуры светимости различаются, например, в 100 раз, то во столько же раз различаются по площади и их поверхности. Бóльшая поверхность в сумме излучает и больше энергии. Но у шаров, форму которых имеют звезды, поверхность пропорциональна квадрату радиуса. Значит, в нашем примере звезда, у которой при той же температуре светимость в 100 раз больше, имеет радиус в 10 раз больше.

Так по светимости звезды, но с учетом ее температуры можно вычислить ее радиус. Оказалось, что разнообразие в размерах звезд громадно, хотя и меньше, чем в их светимости.

В мире звезд существуют *карлики* и *гиганты*. Наше Солнце и даже звезды значительно больше его считаются карликами. А ведь Солнце больше Земли по диаметру в 109 раз. Чем холоднее и краснее карлики, тем они меньше. Красные карлики меньше Солнца по диаметру раз в десять, и, по-видимому, они составляют большинство звездного «населения». Чем звезды больше, тем реже они встречаются в пространстве. Особенно редко встречаются звезды-

ществование которых было предсказано теоретиками много лет назад, но которые до последнего времени не были обнаружены.

Нейтронная звезда обладает чудовищной плотностью. В каждом кубическом сантиметре ее помещается от 10^{12} до 10^{15} г вещества. Это приблизительно соответствует плотности атомного ядра.

Нейтронные звезды могут возникнуть в результате вспышек сверхновых, когда звезда сбрасывает с себя внешнюю оболочку, а бóльшая часть ее вещества катастрофически сжимается. Однако пульсары обнаружены далеко не во всех туманностях, образовавшихся в результате таких вспышек.

Но в одной из самых знаменитых туманностей подобного рода — Крабовидной, образовавшейся на месте вспышки сверхновой звезды в 1054 г., пульсар есть. Кстати, этот объект пульсирует не только в радиодиапазоне, но также в видимых и в рентгеновских лучах.

Какова же природа импульсного радиоизлучения пульсаров?

Согласно наиболее распространенной гипотезе, которой придерживаются большинство астрофизиков, это излучение порождается вращением и одновременными пульсациями звезды, хотя возможны и различные комбинации этих свойств.

С течением времени вращение нейтронной звезды должно постепенно замедляться. Этим, видимо, и объясняется медленное увеличение промежутка между соседними импульсами.

Пульсары — необычные астрономические объекты, открытые недавно, и потому их физическая природа и свойства еще далеко не выяснены.

гиганты. В противоположность карликам, они, чем холоднее и краснее, тем больше, так что самыми огромными звездами являются красные *сверхгиганты*. Красный Антарес в созвездии Скорпиона по диаметру в 450 раз больше Солнца. Желтый гигант Капелла из созвездия Возничего только в 12 раз больше Солнца. Одна из самых больших ныне известных звезд VV Цефея. Благодаря своей громадной силе света сверхгиганты видны нам на огромных расстояниях. С расстояния в 7 раз большего, чем расстояние до ближайшей звезды, наше Солнце выглядело бы слабой звездочкой, не видимой невооруженным глазом, а звезды-сверхгиганты с этого расстояния сверкали бы ярче планеты Венеры.

Массы звезд различаются не так сильно, как их светимости и размеры, хотя, чем больше светимость звезды, тем больше и ее масса. Чтобы уравновесить сверхгиганта, брошенного на чашу весов, на другую чашу пришлось бы положить несколько десятков звезд, подобных Солнцу, и еще больше красных карликов, так как они в несколько раз легче Солнца.

Поделив массу звезды на ее объем, мы узнаем среднюю плотность звезды. Средняя плотность Солнца в 1,4 раза больше плотности воды, а у красных карликов она много больше. У гигантов и сверхгигантов плотность газов, из которых они состоят, очень мала — в тысячи и миллионы раз меньше плотности обычного воздуха.

Особенно большой интерес представляют собой редко встречающиеся звезды — белые карлики. Так они названы за свой белый цвет и малые размеры. Эти белые и горячие звезды имеют массу примерно такую же, как Солнце, или несколько меньшую. Но эта масса «утрамбована» в малом объеме. Например, спутник Сириуса меньше Солнца по диаметру в 30 раз, а по объему — в 27 тыс. раз. Его средняя плотность примерно в 30 тыс. раз больше плотности воды.

Что же это за необычное вещество? Оказывается, это такие же газы, какие мы знаем на Земле, только они находятся в особом состоянии. Атомы газов — сложные системы. Они состоят из ядер и обращающихся вокруг них электронов. Под действием давления их нельзя сблизить друг с другом больше, чем до взаимного касания их систем, не нарушив эти системы. В недрах белых карликов, как и других звезд, при очень высокой температуре атомы носятся с бешеной скоростью и при столкновениях разрушаются. Из систем ядер и обращающихся вокруг них электронов они превращаются в неправильную смесь из ядер и электронов. Размеры последних гораздо меньше размеров атомов как систем. Поэтому такие разрозненные частицы можно сблизить гораздо теснее, отчего получается необычайно плотное вещество. Силой, сдавливающей газ до состояния плотного вещества, является вес вышележащих слоев звезды.

Итак, и невообразимо разреженные сверхгиганты, и чудовищно плотные белые карлики состоят из раскаленных газов; иногда эти газы в звездах имеют такие свойства, какие неизвестны у нас на Земле.

Часто спрашивают: есть *ли потухшие* звезды? Таких звезд мы не знаем. Все звезды хотя и слабо, но светятся. Можно утверждать, что если несветящиеся звезды и есть, то их очень мало, иначе бы они заметно влияли на движение остальных звезд.

Почему это так? Потому, очевидно, что мы находимся в мире, полном жизни. Звезды вокруг нас на необозримых расстояниях процветают, а их упадок, увядание отодвинуты на какой-то огромный срок в далекое будущее. Излучательной способностью звезды наделены на миллиарды лет, а свет даже самых дальних из них, известных сейчас нам, идет до Земли только сотни и тысячи лет. Поэтому таких звезд, которые «уже не светят, а свет их все еще идет к нам», по-видимому, не существует.

Пары и тройки в звездном мире

Если вы посмотрите на вторую с конца яркую звезду в ручке ковша Большой Медведицы, то увидите, что близко-близко к ней есть звездочка послабее — ее спутник. Яркую звезду арабы когда-то прозвали Мицаром, а ее спутника — Алькором.

Звезда, обозначенная греческой буквой эпсилон (ε) в созвездии Лиры, если смотреть на нее в бинокль, оказывается, состоит из двух очень близких друг к другу звезд. В телескоп таких *двойных* звезд обнаружено множество. Иногда почти по одному и тому же направлению видны две звезды. В пространстве они находятся очень далеко друг от друга и не имеют между собой ничего общего. Но часто бывает, что такие звезды и в пространстве близки друг к другу.

Иногда это звезды-близнецы, не отличающиеся друг от друга ни цветом, ни блеском. Иногда же они разного цвета. Одна из них — желтая или оранжевая, а другая — голубоватая. Рассматривать их в телескоп очень интересно — они необычайно красивы. Физически двойные звезды связаны друг с другом узами всемирного тяготения, они возникли вместе.

Как узнать, в каких случаях близость двух звезд кажущаяся и в каких случаях она реальная? На этот вопрос ответ дает тщательное измерение видимого расстояния между звездами и их взаимного расположения. Если звезды взаимно близки и притягивают друг друга, то они должны обращаться около общего центра масс, как Земля вокруг Солнца или как Луна вокруг Земли. Это действительно и наблюдается, но период обращения звезд обычно очень долгий — десятки, сотни и даже десятки тысяч лет. Чем звезды ближе друг к другу, тем быстрее они обращаются по своим эллиптическим орбитам и тем короче период их обращения. Если движение очень медленное и период очень долгий, то трудно обнаружить, реальна ли близость двух звезд.

Мы уже упоминали, что ярчайшая звезда неба Сириус — двойная. Спутник этой звезды — белый карлик — обращается вокруг главной звезды за 50 лет и отстоит от нее в 20 раз дальше, чем Земля от Солнца.

Ближайшая к нам звезда (видимая в Южном полушарии Земли) — альфа Центавра в действительности состоит из двух главных звезд, очень сходных с нашим Солнцем. Период их обращения почти 80 лет, а среднее взаимное расстояние в 23 раза больше расстояния от Земли до Солнца.

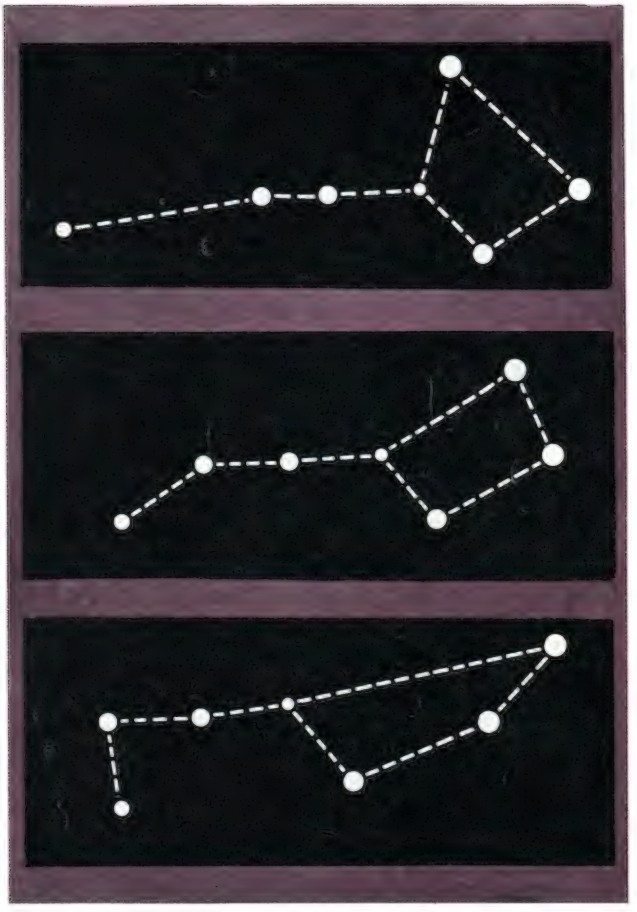
У этих двух звезд есть далекий спутник. Он обращается вокруг них с крайне долгим периодом. Спутник — красный карлик и находится сейчас на своей орбите немного ближе к нам, чем обе главные звезды. Поэтому спутника альфа Центавра называют Ближайшей (по-латыни proxima) Центавра. Это ближайшая к нам звезда, свет от нее идет к Земле около четырех лет. Она находится от нас в 270 тыс. раз дальше, чем Солнце.

Альфа Центавра — пример *тройной* звезды. Такие звезды встречаются гораздо реже, чем двойные, но бывают и более сложные системы. Звезды, входящие в состав двойных, тройных и бо́льших систем, называют *компонентами* этих систем.

Посмотрим, например, в телескоп на Мицара и Алькора в Большой Медведице. Оказывается, Мицар сам состоит из двух звезд. А каждый из видимых в бинокль компонентов звезды эпсилон Лиры, в свою очередь, оказывается двойным.

Спектральный анализ позволяет обнаруживать двойственность таких звезд, у которых компоненты очень близки друг к другу и обращаются по орбитам очень быстро. В самые сильные телескопы свет таких звезд сливается, и мы видим лишь одну звезду, но спектральный анализ свидетельствует о двойственности. Дело в том, что при взаимном обращении скорости двух звезд направлены в противоположные стороны, и потому темные линии их спектра смещены в противоположные стороны. Линии спектра двойной системы оказываются раздвоенными, и, когда скорость движения звезд этой системы по своим орбитам относительно нас меняется, меняется и расстояние между двойными линиями в спектре.

Расположение звезд в ковше Большой Медведицы в результате их собственных движений со временем меняется: вверху — вид ковша несколько десятков тысяч лет назад, в центре — в настоящее время, внизу — через несколько десятков тысяч лет.

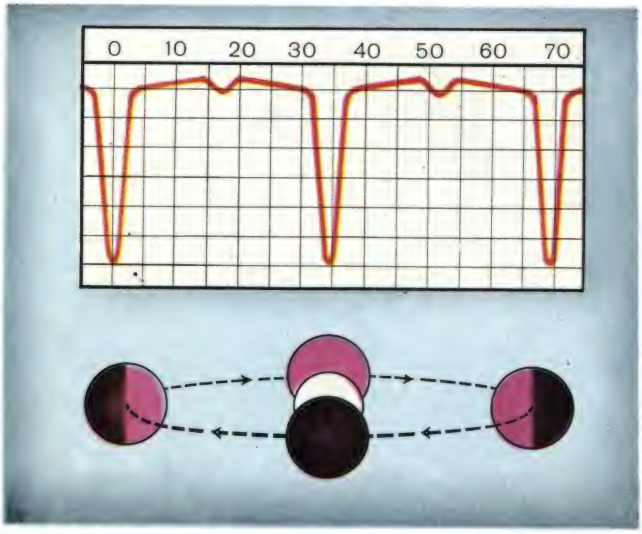


Один из компонентов Мицара оказывается двойной звездой с периодом обращения около десяти суток, так как звезды очень близки.

Такими же тесными *спектрально-двойными* звездами являются некоторые компоненты эпсилон Лиры, видимые раздельно в телескоп. Итак, Мицар с Алькором — пример *четырехкратной* звезды, а эпсилон Лиры — пример *шестикратной* звезды.

В общем, двойные или даже кратные звезды не исключение, их много. По-видимому, в среднем из каждых трех-четырех или даже из двух звезд одна двойная. Наше Солнце — одинокая звезда.

На левом рисунке вверху — кривая изменения блеска звезды Алголь; по горизонтали указано время в часах. Внизу схема затмений в системе звезд Алголя.



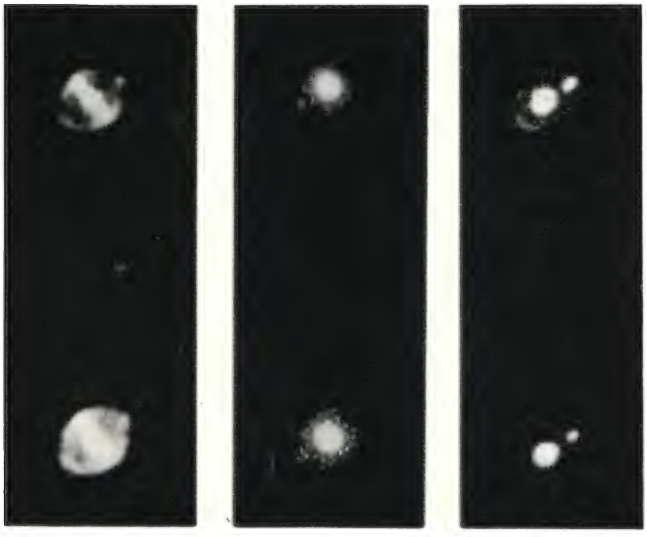
Около некоторых ближайших звезд обнаружены невидимые спутники малой массы. Их обнаружили по еле заметным движениям звезд под действием притяжения их невидимым спутником. Пока еще с достоверностью не установлено, являются ли эти спутники холодными планетами, еще более массивными, чем Юпитер, или же это крайне слабо светящиеся маленькие звезды.

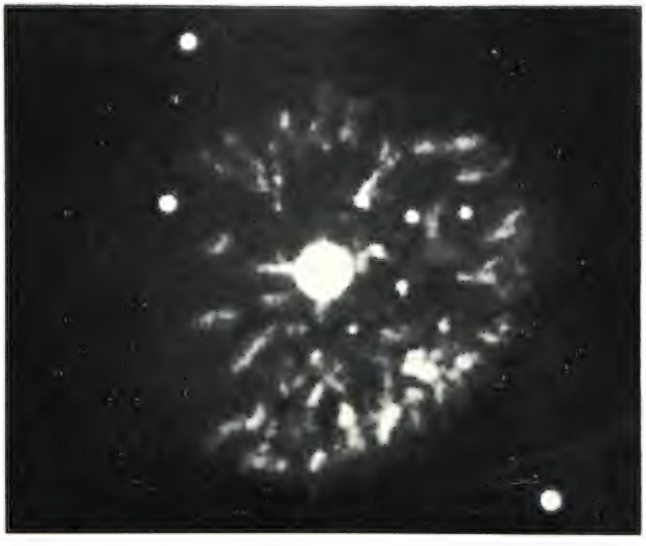
Представьте себе, что мы жители планеты, обращающейся вокруг одной или обеих звезд в системе двух солнц. Какие изумительные картины увидели бы мы на небе! Из-за горизонта встает, например, громадный красный круг солнца, которое в сотни раз больше нашего. Немного позднее на небо выплывает маленькое голубое солнце. Постепенно оно исчезает за более массивным первым солнцем, чтобы потом снова выйти из-за него. Или же дни, залитые красным светом, чередуются с голубыми днями, а ночей нет. Какие причудливые комбинации солнц разного цвета и какая игра красок должны быть на планетах, находящихся в системе кратных звезд!

«Дьявольские» звезды

Вторую по блеску звезду в созвездии Персея, обозначаемую греческой буквой бета (β), когда-то арабы назвали Алголь, что значит «дьявол». Дьявольскому наваждению они приписали то, что эта звезда 2-й

Вверху справа — фотография расширяющейся газовой оболочки, выброшенной во время вспышки новой звезды в созвездии Геркулеса. Внизу — фотография новой звезды в созвездии Персея.





видимой величины по временам ослабевает в блеске в 3—4 раза.

Английский любитель астрономии глухонемой юноша Гудрайк (1764—1786) выяснил закономерности в изменении блеска Алголя и дал им объяснение. Оказалось, что в течение 59 ч блеск звезды не меняется, затем в течение 5 ч он падает, а в следующие 5 ч возрастает до прежнего уровня. Так, с периодом в 2 сут 20 ч 49 мин блеск звезды испытывает колебания, в точности повторяющие друг друга. Причина такого странного поведения звезды, как выяснил Гудрайк, заключается в том, что Алголь — двойная звезда. Орбита ее лежит почти

Крабовидная туманность — остаток вспышки сверхновой звезды.

в точности на нашем луче зрения. Поэтому когда звезды обращаются вокруг общего центра масс, то они по очереди частично закрывают для нас одна другую. Происходят периодические затмения.

Впоследствии было обнаружено, что в промежутках между минимумами блеска, известными ранее, блеск Алголя немного ослабевает. Это означает, что спутник Алголя все же светится (Гудрайк полагал, что он темный) и общий блеск системы немного слабеет, когда менее яркая звезда закрыта более яркой.

Развитие науки подтвердило объяснение, данное Гудрайком. Алголь оказался тесной парой двух звезд с периодом обращения, равным периоду кажущегося изменения его блеска. Сейчас известны сотни других двойных звезд, подобных Алголю, блеск которых нам кажется периодически меняющимся вследствие периодически повторяющихся затмений.

Маяки Вселенной — цефеиды

У звезд типа Алголя меняется их видимый блеск вследствие периодических затмений одной звезды другой, а светимость звезд при этом не меняется. Но есть звезды, действительно физически меняющие свою светимость.

Параллельно с изменением блеска более или менее меняются цвет и температура их, а иногда и размеры.

Среди звезд переменного блеска, называемых для краткости просто *переменными,* наибольший интерес представляют *цефеиды.* Их называют так по типичной представительнице этого класса звезд — звезде дельта (δ) в созвездии Цефея. С периодом в 5 сут 8 ч 48,5 мин ее блеск непрерывно меняется в пределах $^3/_4$ звездной величины. Он возрастает быстрее, чем убывает. В минимуме блеска звезда краснее и на 800°С холоднее, чем в максимуме. Оказалось, что цефеиды — это *пульсирующие* звезды. Пульсирует, расширяясь и сжимаясь, все тело звезды. При сжатии ее происходит нагревание, а при расширении — охлаждение. Изменение размера и температуры поверхности звезды и вызывает колебания ее излучения.

Цефеид известно очень много, и периоды изменения блеска их различны, от нескольких часов до 45 сут, но у каждой в отдельности период не изменяется. У цефеид есть два замечательных свойства. Во-первых, это звезды — гиганты и сверхгиганты, видимые с огромных расстояний. Из глубин мироздания они светят нам, как маяки для кораблей в море, и поэтому их называют маяками Вселенной. Во-вторых, у цефеид длительность периода изменения блеска тесно связана с их средней светимостью.

Чем больше светимость, тем длиннее период изменения блеска. Это позволяет из наблюдений определить период, а по нему узнать светимость данной цефеиды, т. е. ее истинную силу света.

Но мы знаем, что видимый блеск источника света ослабевает обратно пропорционально квадрату расстояния. Поэтому, сравнивая истинную силу света данной цефеиды с ее видимым блеском, мы можем узнать ее удаленность от нас.

Наша звездная система в основном состоит из звезд малой светимости, и притом очень от нас далеких. Определить расстояние до них мы не можем. Цефеиды же среди общей массы звезд видны нам издали. Изучая их распределение в пространстве, мы как бы нащупываем костяк нашей звездной системы и по нему можем судить о форме и строении всей нашей звездной системы в целом.

Заметим, что есть особый вид цефеид очень короткого периода — до 80 мин. Их светимость умеренна и средняя светимость с длиной периода не связана.

Вспыхивающие и другие загадочные звезды

Изучение цефеид свидетельствует о том, что мир звезд, хотя звезды живут миллиарды лет и изменяются медленно, — это не застывший в своей неизменности мир. Многие звезды испытывают быстрые, хотя и временные, изменения грандиозного масштаба. Кроме цефеид известны переменные звезды других типов. Например, есть звезды, подобные звезде омикрон (o) Кита. Ее назвали Мира, что значит «удивительная». С периодом около 300 сут ее блеск меняется от 2-й звездной величины (как у Полярной звезды) до 9-й, когда ее не видно даже в сильный бинокль. Но изменения блеска у нее не так правильны, как у цефеид. Есть звезды с полуправильными и с совершенно неправильными колебаниями блеска. В небольших пределах и неправильно блеск меняется у многих красных сверхгигантов. У некоторых звезд блеск меняется лихорадочно и в очень больших пределах.

Внимание астрономов привлекли к себе так называемые *вспыхивающие* звезды. Это некоторые красные карлики. Блеск у них обычно колеб-

лется в небольших пределах. Но изредка совершенно внезапно блеск их усиливается в несколько раз за доли минуты и так же быстро ослабевает. По-видимому, при таких вспышках из их недр на поверхность вырываются необычайно мощные фонтаны раскаленных газов огромной яркости. Они и увеличивают общий блеск звезды. Но мы пока не знаем, какими процессами вызываются эти вспышки. Не знаем мы также, почему на поверхности некоторых звезд образуются мощные магнитные поля.

Вспышки новых и сверхновых звезд — мировые катастрофы

В 1925 г. в Южной Африке один из почтальонов — любитель астрономии — разнес почту и возвращался домой. Стало уже темно. Он остановился, чтобы окинуть взглядом знакомые созвездия. Вон там сияет Южный Крест, здесь — Центавр, а там — созвездие Живописца. Но что это? Почему так странно изменился его вид? Изменились очертания фигуры, образованной яркими звездами. В чем дело? В созвездии видна какая-то яркая звезда, которой тут вчера еще не было. Ведь это не планета. Планеты переходят из созвездия в созвездие за месяцы и даже за годы, да и созвездие Живописца не зодиакальное. В нем планеты не бывают.

Ясно, в созвездии Живописца вспыхнула *новая* звезда. Почтальон немедленно сообщил о своем открытии в ближайшую обсерваторию, а та, как обычно, оповестила центр экстренных извещений об астрономических открытиях. Через несколько часов новую звезду в Живописце уже наблюдали многие обсерватории мира.

Почтальон был не единственным любителем астрономии, которому посчастливилось открыть неожиданно вспыхнувшую новую звезду. Например, новую звезду в созвездии Персея в 1901 г. открыл киевский гимназист Борисяк, новую звезду в созвездии Геркулеса в 1960 г.— норвежский любитель астрономии Хассель.

Новые звезды вспыхивают неожиданно. Собственно говоря, это не новые звезды, а вспышки некоторых звезд, до этого светящих обычно, как наше Солнце, но более горячих, белого цвета. Далекая неприметная звездочка за несколько суток разгорается, и блеск ее усиливается в десятки тысяч раз. В это время она становится во столько же примерно раз ярче Солнца. Если так вспыхнула близкая

Шаровое звездное скопление.

звезда, то в наибольшем блеске мы видим ее как звезду 1-й величины. Если же вспыхнула очень далекая звезда, то и в наибольшем блеске она не привлечет к себе внимания и либо останется незамеченной, либо будет обнаружена через годы при сравнении друг с другом слабых звезд на фотографиях, полученных в разное время.

Новыми такие звезды назвали в прежнее время, когда думали, что это действительно появились новые, не существовавшие ранее звезды.

Новая звезда в наибольшем блеске остается недолго, обычно около суток. Уже со следующего дня ее блеск начинает быстро падать, иногда плавно, иногда судорожно, но чем дальше, тем медленнее. Через несколько лет она становится такой же, какой была до вспышки.

Различными исследованиями установлено, что в нашей звездной системе ежегодно вспыхивают десятки или даже сотни новых звезд. Но мы заме-

чаем лишь немногие из них, ближайшие. А совсем близкие вспышки новых звезд, кратковременно соперничающих с самыми яркими звездами неба, наблюдаются редко. Их видели в 1901, 1918, 1920, 1925, 1934, 1944 гг.

Почему так катастрофически растет блеск новых звезд? Оказывается, что у некоторых звезд под влиянием еще не вполне раскрытых внутренних физических процессов внезапно срываются их внешние оболочки, излучающие свет, и с огромной скоростью, достигающей 1000 км/с, несутся в окружающее звезду пространство, раздуваясь, как мыльный пузырь. Такая оболочка быстро увеличивает свою поверхность и излучает больше света. В наибольшем своем блеске раздувшаяся оболочка больше нашего Солнца по диаметру в сотни раз.

Но, раздуваясь, оболочка новой звезды становится все более разреженной и прозрачной. Блеск звезды начинает падать, хотя оболочка продолжает нестись в пространство с такой бешеной скоростью, что притяжение звезды не в силах ее затормозить. Через несколько лет после вспышки оболочка становится так велика, что ее можно легко наблюдать и следить за ее расширением. Наконец она рассеивается. Звезда во время вспышки становится очень горячей, из нее вырываются облака раскаленных газов. Но постепенно она успокаивается, как вулкан после извержения.

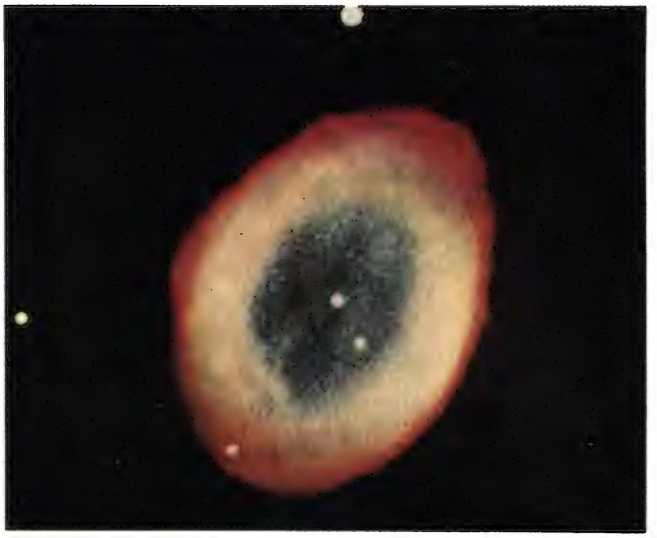
У вулканов бывают повторные неожиданные извержения. Не бывает ли того же у новых звезд? Да, некоторые из них через несколько десятков лет вспыхивают снова. Но у типичных новых звезд повторная вспышка (и притом более мощная) на памяти человечества наблюдалась лишь однажды.

Мы до сих пор не знаем причины вспышек новых звезд, причины сбрасывания их оболочек. Несомненно лишь, что в таких звездах в какие-то моменты происходит бурное выделение энергии, т. е. взрыв. При этом взрыве звезда теряет около одной десятитысячной доли своей массы, но не разрушается.

Датский астроном Тихо Браге в 1572 г. наблюдал вспышку новой звезды в созвездии Кассиопеи. Она некоторое время светила так же ярко, как Венера, и поколебала господствовавшие тогда религиозные представления о неизменяемости мира.

В последнее время выяснилось, что новая звезда в Кассиопее не была обыкновенной новой звездой. В наибольшем блеске ее истинная сила света была больше, чем у обычных новых звезд, в десятки тысяч раз. Поэтому ее назвали *сверхновой*. Сверхновая звезда светит так же, как гигантская звездная система, состоящая из миллиардов солнц, подобных нашему.

Кольцеобразная планетарная туманность в созвездии Лиры.



Чудовищные силы природы, порождающие мировые катастрофы в виде вспышек сверхновых звезд, учеными еще не разгаданы. Быть может, их тайны раскроете вы, юные читатели, зная то, что известно нам, и используя методы и приборы будущего, которых у нас еще нет.

Наука развивается коллективными усилиями разных народов на протяжении многих веков. К 1054 г. относится летописная запись о вспышке яркой звезды в созвездии Тельца. В XVIII в. француз Месье в этом же созвездии открыл Крабовидную туманность — слабосветящееся небольшое пятно. В начале XX в. американские астрономы установили, что эта туманность — газовое облако и расширяется со скоростью, равной 1000 км/с, а голландский ученый Оорт показал, что туманность находится на месте сверхновой звезды, которая, как было записано в летописи, наблюдалась в 1054 г., т. е. более 900 лет назад. При наблюдаемой скорости расширения она должна была начать расширяться как раз в год вспышки сверхновой звезды. Значит, при ее вспышке и возникла Крабовидная туманность.

В середине текущего столетия обнаружилось, что Крабовидная туманность является одним из самых мощных источников космического радиоизлучения. Она, как радиомаяк, шлет радиоволны во Вселенную. Советские ученые объяснили это тем, что в туманности есть магнитное поле, тормозящее электроны (мельчайшие частицы электричества), которые носятся там со скоростями, близкими к скоростям света.

Сверхновые звезды — явление крайне редкое. Последней сверхновой, наблюдавшейся в нашей

Светлая туманность в созвездии Щит Собесского. Видны вкрапления в нее темной пылевой материи и мелкие темные туманности, называемые глобулами, которые, может быть, являются зародышами звезд.

Галактике, была звезда, вспыхнувшая в созвездии Змееносца в 1604 г. Ее наблюдал Кеплер. Даже в таких гигантских звездных системах, как наша, вспышка сверхновой звезды бывает только один раз в несколько столетий.

Современные телескопы позволяют видеть множество других звездных систем, подобных нашей. То в одной, то в другой из них наблюдается иногда вспышка сверхновой звезды. К сожалению, они так далеки от нас, что хорошо изучить их не удалось. Но в последние годы обсерватории ряда стран договорились между собой устроить «облаву» на сверхновые звезды, специально «караулить» их вспышки. И это дало свои результаты. Теперь в далеких звездных системах ежегодно наблюдают около десятка сверхновых звезд.

В самые последние годы установили, что из многих направлений из глубин Вселенной к нам идут радиосигналы, быстро меняющиеся в интенсивности, как бы пульсирующие с периодом в доли секунды!

Невидимые небесные тела, посылающие такое чудовищно быстро пульсирующее радиоизлучение, назвали *пульсарами*. До 1970 г. только один пульсар оказался совпадающим с крайне слабой звездочкой, находящейся в центре Крабовидной туманности. По крайней мере этот пульсар, по-видимому, есть не что иное, как остаток той самой звезды, которая вспыхнула как сверхновая в 1054 г. и выбросила бóльшую часть своей массы. Другие пульсары еще не отождествлены с видимыми небесными светилами.

Согласно расчетам, допускают, что в результате вспышки остаток звездной массы катастрофически сжался и превратился в быстро вращающуюся *нейтронную* звезду. Такая звезда состоит только из нейтронов — главной составной части атомных ядер. Диаметр ее составляет всего лишь несколько

Темная пылевая туманность Конская Голова.

километров, а плотность близка к плотности атомных ядер. В ее атмосфере рождается радиоизлучение, а его пульсация обусловлена вращением звезды. Однако требуется еще дальнейшее изучение пульсаров.

Звездные скопления и космическая пыль

Летней ночью перед рассветом на востоке над горизонтом поднимается маленькая, тесная группа слабых звезд — Плеяды. В народе ее называют Стожары. Обычно в этой группе видно 6 звезд, но зоркий глаз видит от 7 до 11 звезд, а в телескоп их можно насчитать там более сотни.

Звезды в Плеядах рассыпаны хаотично, это пример *рассеянного* звездного скопления. Вокруг яркого Альдебарана, красной звезды, называвшейся в древности Глазом Тельца, находится еще более рассеянная группа звезд — звездное скопление Гиады. Таких звездных скоплений мы знаем около семисот. Число звезд в них редко превышает сотню. Но существуют скопления гораздо большего размера и с несравненно бóльшим числом звезд. Это *шаровые* скопления. Звезды в них (много сотен тысяч) концентрируются к центру скопления. Занимаемое ими пространство имеет форму шара, отчего они и получили свое название.

Но даже и ближайшее к нам шаровое скопление находится так далеко, что для невооруженного глаза кажется маленьким, еле заметным пятнышком. Только в сильный телескоп звезды, расположенные на краях скопления, видны в отдельности. Если бы среди звезд этого скопления мы поместили Солнце, то в самый сильный телескоп оно было бы на границе видимости, потому что скопление очень далеко от нас и те из звезд в нем, которые различает такой телескоп, гораздо ярче Солнца. Одно из ближайших к нам шаровых звездных скоплений находится в созвездии Геркулеса. В летний вечер, пользуясь звездной картой, вы можете найти его в бинокль. Оно имеет вид как бы размытой туманной звездочки. В обычный телескоп оно видно как большое туманное пятно, и только в сильный телескоп видно, что это скопление множества звезд. К центру скопления они расположены так тесно, что их свет сливается в сплошное пятно.

Поперечники рассеянных скоплений типа Плеяд невелики. Луч света пробегает их от края до края за несколько лет. Поперечники же шаровых скоплений значительно больше, и луч света пробегает их за десятки световых лет. Трудно с определенностью установить границы шарового скопления, они сливаются со звездами окружающего пространства.

Мы знаем более сотни шаровых скоплений, из них даже ближайшие к Солнечной системе отстоят от нас на многие тысячи световых лет.

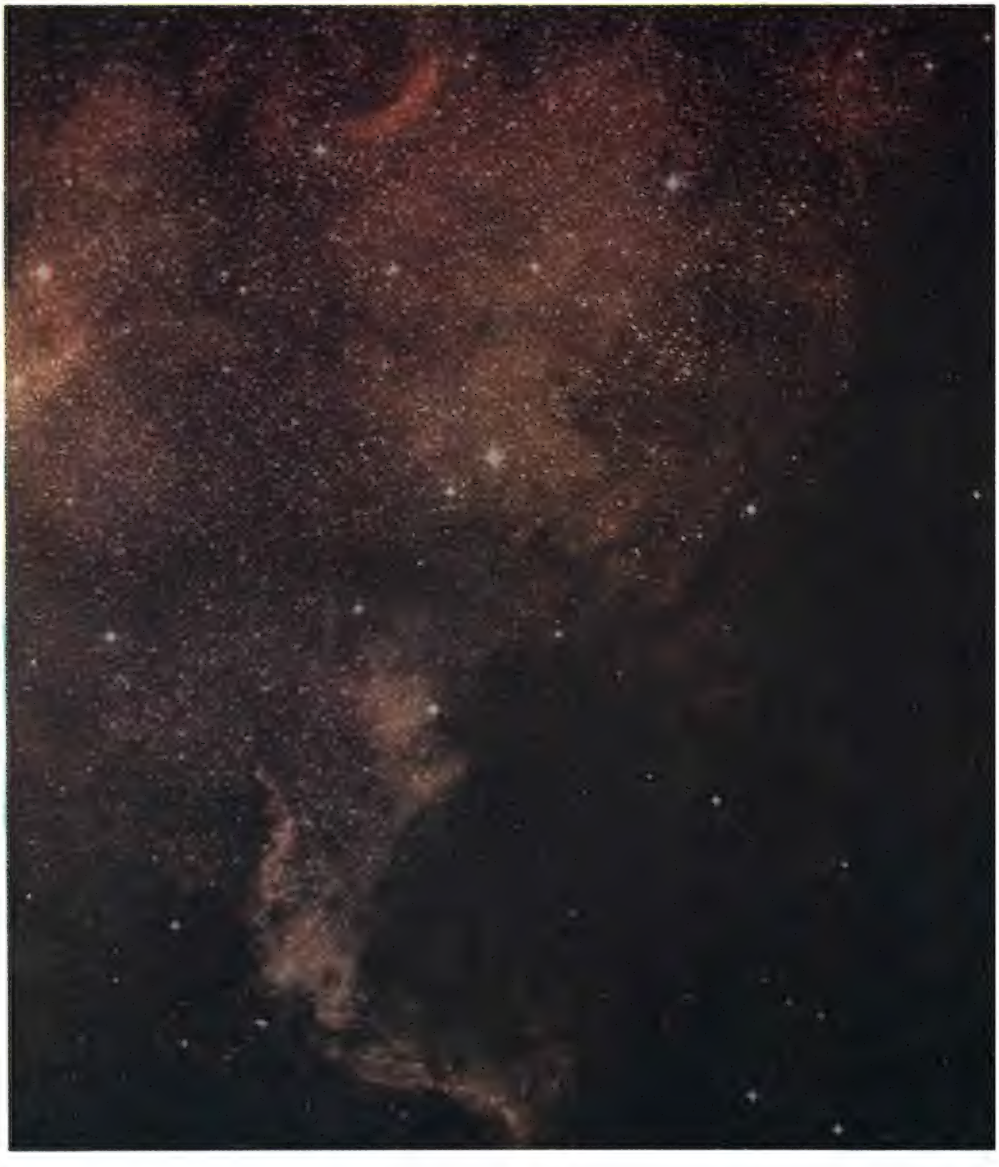
Шаровые скопления — самые старые образования в нашей звездной системе. Рассеянные скопления имеют разный возраст, но, в общем, они считаются более молодыми системами. Самые молодые из них содержат горячие гигантские звезды и возникли «всего лишь» несколько миллионов лет назад.

Мы видим лишь ближайшие из рассеянных звездных скоплений, отстоящие от нас на сотни, иногда на несколько тысяч световых лет. Все они скучиваются в полосе Млечного Пути. Более далекие из них нам не видны, потому что в слое звезд, образующих Млечный Путь, много облаков *космической пыли*. Эта пыль ослабляет свет далеких звезд, расположенных за такими облаками. Из-за облаков космической пыли десятки тысяч рассеянных скоплений, которые, вероятно, существуют в нашей звездной системе, остаются для нас неизвестными.

Плеяды целиком погружены в огромное пылевое облако. Яркие звезды этого скопления освещают вокруг себя пыль, как фонарь освещает ночью окружающий туман. На снимках с долгой выдержкой главные звезды Плеяд даже тонут в окружающем каждую из них светлом тумане — в облаках пыли, освещенных ими самими. Так, пылевые облака, заслоняя свет звезд, представляясь даже в виде темных пятен на сияющем фоне Млечного Пути, выглядят как светлые туманности, когда близко от них есть яркая звезда, способная их осветить. Космическая пыль, как всякая пыль, светит лишь отраженным светом.

Однако космическая пыль очень мелкая. Когда свет проходит через нее, то синие лучи ослабляются сильнее, чем зеленые, зеленые — сильнее, чем желтые, а желтые — сильнее, чем красные. Поэтому на пути к нам через пылевую среду свет звезд не только ослабляется, но становится более желтоватым, даже красноватым. (Из белого света звезд сильнее поглощаются голубые лучи и остается больше желто-красных лучей.)

Одно из особенно близких и плотных облаков космической пыли видно как черное пятно на фоне Млечного Пути возле яркой звезды Денеб в созвездии Лебедя. Когда-то думали, что черные пятна в Млечном Пути — это дыры, просветы в толще образующих его звезд. Полагали, что в этих местах мы смотрим в зияющую пустоту мирового простран-



Слева — газово-пылевая туманность в созвездии Ориона.

Справа — газово-пылевая туманность Северная Америка в созвездии Лебедя.

ства. Оказывается, наоборот, здесь перед нами «занавески», иногда скрывающие от нас даже и не очень далекие звездные области.

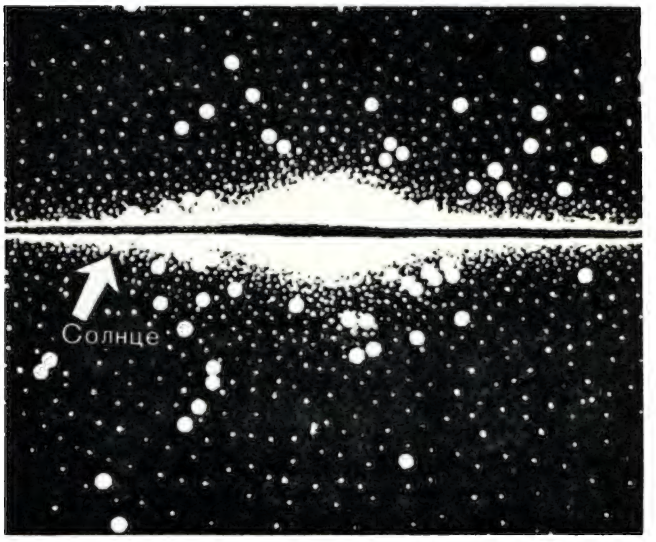
Космическая пыль представляет для ученых огромную и досадную помеху. Она и искажает цвет звезд, и ослабляет их блеск, а более далекие из них делает совсем невидимыми. Целые области мирового пространства недоступны для оптических наблюдений из-за космической пыли. Ее влияние приходится учитывать, а для этого нужно кропотливо, шаг за шагом изучать, сколько и где космической пыли расположено по каждому направлению.

В малой доле космическая пыль происходит от столкновения и разрушения мелких твердых тел, но в своей основной массе она возникает, вероятно, вследствие сгущения межзвездного газа, о котором мы теперь и расскажем.

Газовые туманности и межзвездный газ

Безвоздушность, «пустота» межзвездного пространства относительна. Это пространство заполнено не только полями тяготения, магнитными полями, лучами света и тепла, несущими энергию. Там носятся мельчайшие пылинки, молекулы и атомы газа. Этот невидимый газ был обнаружен по линиям поглощения в спектрах звезд. Ведь на большом протяжении даже такой разреженный газ поглощает определенные лучи из света звезд, который его пронизывает. Возникновение радиоастрономии позволило ученым обнаружить этот невидимый газ и изу-

Схематическое изображение нашей Галактики в поперечном сечении. Стрелкой показано место в ней Солнечной системы.



чать его движение по тем радиоволнам, которые он излучает.

Радиотелескопы «прощупывают» облака межзвездного газа на таких далеких от нас расстояниях, где в обычные телескопы звезды уже не видны вследствие поглощения их света межзвездной пылью. Для радиоволн эта пыль почти прозрачна. Для них прозрачны и облака, через которые мы не видим звездного неба. Для радиоастрономов погода всегда ясная.

Посмотрите в ясную безлунную зимнюю ночь на прекрасное созвездие Ориона, блещущее в южной стороне неба. Под тремя яркими звездами пояса этого мифического охотника найдите три слабые звездочки, образующие короткую вертикальную линию — меч Ориона. Вокруг средней из них в бинокль видно слабое туманное мерцание. Это знаменитая газово-пылевая *диффузная* (бесформенная) *туманность* Ориона. Она представляет собой громадное облако газа и пыли, в которое погружено много звезд.

Только фотография способна выявить всю красоту и всю сложность структуры этого газа, охваченного медленными вихревыми движениями. Из газа, содержащегося в этой светлой газовой туманности (к которой примешана и пыль), можно было бы «изготовить» сотни солнц. Да они и в самом деле, наверно, где-то возникают из газа. Своим возникновением они обязаны силе всемирного тяготения, которое конденсирует разреженный газ в уплотненные газо-

Другие планетные системы

Есть ли у других звезд холодные, несветящиеся спутники планетного типа? Или Солнечная система является уникальным образованием, единственным в своем роде?

Звезды далеки от нас, и потому даже в самые мощные телескопы невозможно непосредственно наблюдать их планеты: они слишком малы и к тому же теряются в ярких лучах своих солнц.

Но в распоряжении астрономов есть один косвенный метод. Если вокруг какой-либо звезды движутся планетоподобные спутники, то вся система, очевидно, будет обращаться вокруг общего центра масс, не совпадающего с геометрическим центром звезды. Со стороны наблюдатель увидит, что звезда периодически смещается то в одну, то в другую сторону относительно некоторого среднего положения.

Разумеется, подобные наблюдения требуют весьма длительного времени и огромной точности. Все же в настоящее время известны три звезды, каждая из которых, видимо, обладает по меньшей мере одним спутником планетного типа. Это звезда Лаланда, звезда Барнарда и 61-я звезда из созвездия Лебедя.

Впервые о 61-й Лебедя упоминается еще в астрономических документах, относящихся к середине XVII в. В 1725 г. она вошла в один из звездных каталогов того времени как двойная звезда. В 1893 г. немецкий астроном Вильзинг заметил, что расстояние между компонентами этой двойной звезды меняется. Он предположил, что подобное явление связано с тем, что у 61-й Лебедя имеется темный спутник.

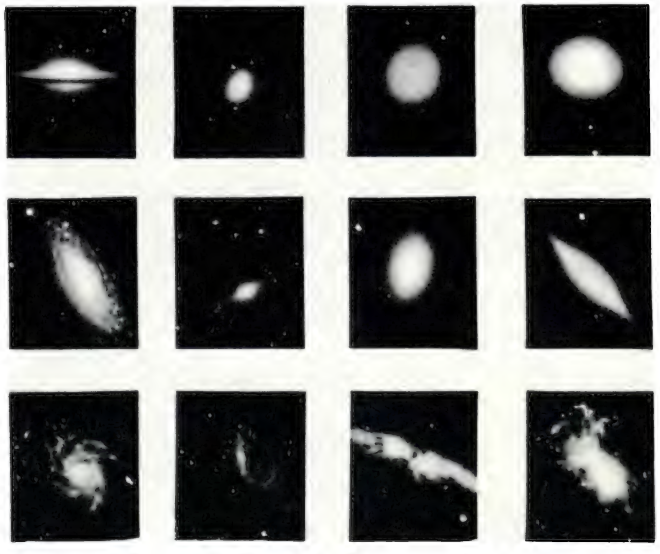
Окончательный вывод, подтвердивший справедливость этой гипотезы, был сделан советским астрономом А. Н. Дейчем. Он проанализировал 129 снимков 61-й Лебедя и не только подтвердил наличие темного спутника у этой звезды, но и вычислил его массу. Она оказалась довольно велика — около 0,01 массы Солнца (для сравнения можно указать, что масса самой большой планеты Солнечной системы Юпитера составляет лишь 0,001 массы Солнца).

Массы спутников двух других звезд — Лаланда и Барнарда тоже довольно велики.

Но вполне возможно, что в действительности вокруг каждой из этих звезд обращается не один, а несколько спутников. И следовательно, не исключено, что на самом деле эти звезды обладают планетными системами, похожими на Солнечную.

Можно ожидать, что это лишь небольшая часть тех звезд нашей Галактики,

Типы г



вые шары — звезды. Но образовавшиеся из газа звезды светятся уже сами, за счет содержащихся в их недрах источников энергии, которая выделяется в результате атомных превращений. Газовые же туманности светятся лишь тогда, когда в них или поблизости есть очень горячие голубоватые звезды. Их мощное ультрафиолетовое и рентгеновское излучение заставляет газ светиться. Это свечение газа несколько сходно с тем, какое происходит в трубках с разреженным газом, через который пропускают электрический разряд. Если нет поблизости горячей звезды, то и облако газа остается невидимым.

Газовые туманности, как и звезды, в основном состоят из водорода. Кроме него в них есть другие легкие газы — гелий, азот, кислород — и частицы более тяжелых химических элементов.

Лучшие насосы, откачивающие воздух в земных лабораториях, не могут создать такого вакуума, такого разреженного газа, какой существует в газовых туманностях. Различие в плотности газа в туманности и в лучших земных вакуумах такое же, как в плотности свинца и земного вакуума. Свечение газов в туманности мы видим потому, что толща ее громадна: от одного края газовой туманности до другого свет идет несколько лет, а общая масса туманности обычно составляет десятки, сотни, а иногда и десятки тысяч масс Солнца.

Какие красивые и причудливые формы принимают газовые диффузные туманности! Какие нежней-

вокруг которых движутся планеты. Сколько же их? Ответить на этот вопрос при современном уровне знаний и наблюдательных возможностей можно лишь с помощью статистических подсчетов. Были предложены различные способы подобных подсчетов. Все они приводят приблизительно к одинаковым результатам.

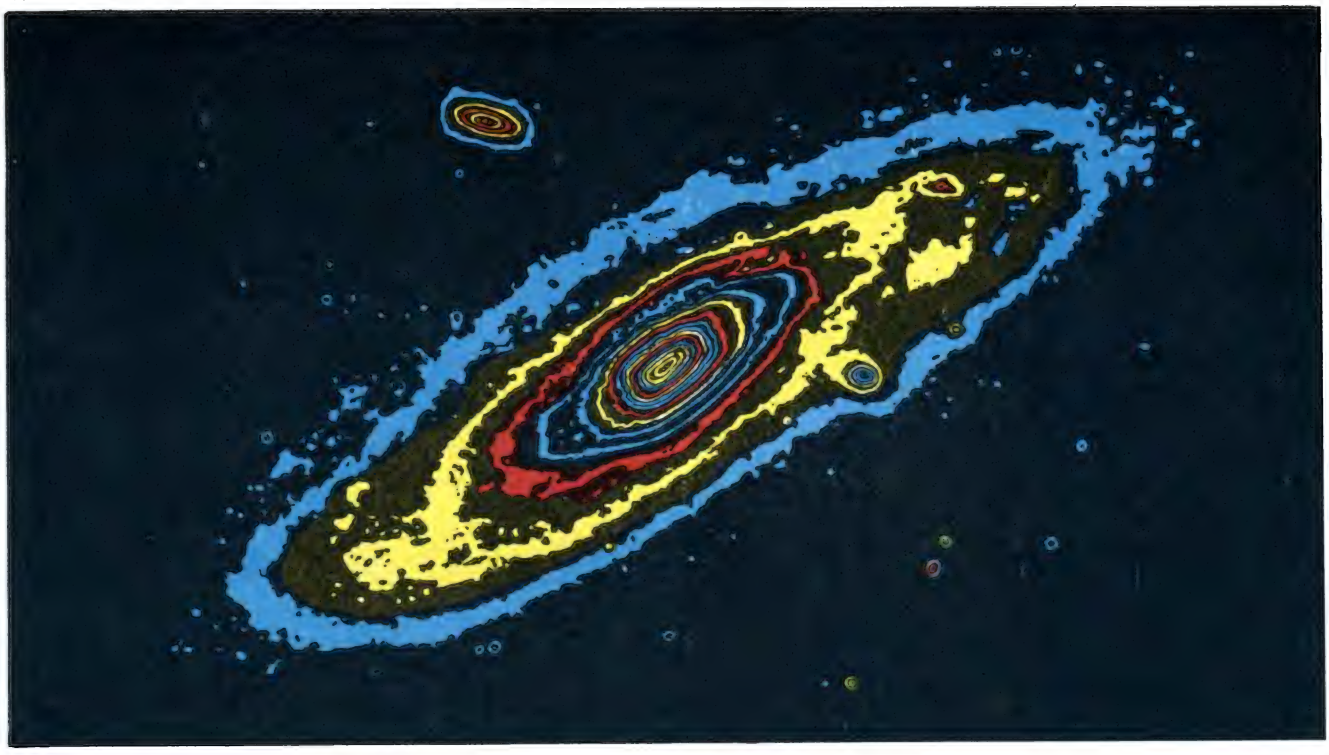
Каждая сотая или тысячная звезда нашей Галактики, возможно, обладает планетами. Таким образом, только в нашем «звездном острове» — Галактике существует до полутора миллиардов планетных систем.

Разумеется, далеко не все планеты могут быть обитаемы. Об этом свидетельствует опыт исследования Солнечной системы. Чтобы на какой-либо планете могла возникнуть и развиться жизнь, близкая по типу к земной жизни, должен выполняться целый комплекс условий. В частности, центральная звезда должна быть достаточно «спокойной» — ее излучение не должно испытывать резких колебаний. А сама планета должна находиться в благоприятной тепловой зоне, обладать водной и атмосферной оболочками.

Сейчас трудно сказать, какое число планет удовлетворяет всем этим условиям. Но поскольку планетных систем огромное количество и у них, видимо, сходные пути развития, можно предполагать, что вокруг многих звезд движутся планеты, населенные живыми, а быть может и разумными, организмами.

Спиральная галактика
в созвездии Андромеды.

Изофотодиаграмма галактики Андромеды. На рисунке линии соединяют места, в которы яркость в галактике одинакова.



шие рисунки и сплетения образуют их волокна! В созвездии Лебедя находятся туманности, прозванные за свой вид: Пеликан, Северная Америка, Рыбачья Сеть. В созвездии Единорога есть туманность Розетка.

Наряду с большими клочковатыми, размытыми или волокнистыми диффузными существуют туманности очень маленькие, правильной округлой формы — *планетарные*. Их назвали так за внешнее сходство с дисками планет (так выглядят самые далекие планеты в телескоп).

В центре каждой планетарной туманности есть очень слабенькая звездочка — ядро. Это самые горячие из звезд. Их температура доходит до 100кК (1 кК = 1000 К) и более, а излучение заставляет светиться планетарную туманность. Планетарные туманности — недолговечные образования и могут быть видимы лишь около 10 тыс. лет. Они медленно, со скоростью нескольких километров в секунду, расширяются в пространстве и со временем рассеиваются. Несомненно, такие туманности образуются за счет газов, выделяемых звездой, но не с такой бешеной скоростью, как это бывает у новых звезд, сбрасывающих свои оболочки.

Масса планетарных туманностей очень мала — она составляет всего лишь десятые или даже сотые доли массы Солнца. Химический состав их такой же, как у диффузных туманностей и у звездных атмосфер.

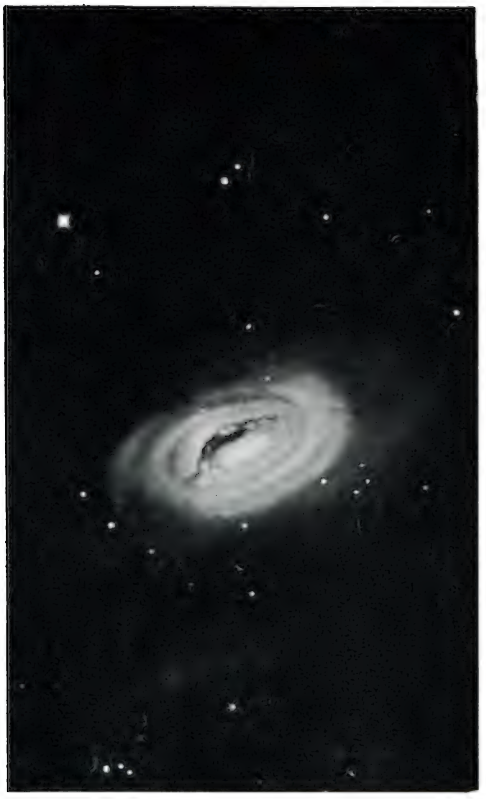
У планетарных туманностей наблюдаются интересные формы. Многие из них кольцеобразны, как, например, туманность в созвездии Лиры. Есть туманности, которые за их форму названы Совой, Сатурном, Гимнастической Гирей. Всего планетарных туманностей известно уже свыше 1000.

Газ, собранный в облаке — туманности, как светящийся, так и несветящийся, концентрируется в полосе Млечного Пути, где имеется и много рассеянных звездных скоплений. Откуда берется в мировом пространстве много газа?

Часть его может являться остатком тех газов, из которых когда-то возникли звезды. Вероятно, они возникают из него и сейчас. Например, недавно наблюдался случай, когда в маленькой туманности появилась очень слабая звездочка, которой раньше там никогда не видели.

Но часть газа, как это показал автор данной статьи, возникает и теперь. Ведь мы видим, что в мировое пространство все время рассеивается газ, выброшенный новыми и сверхновыми звездами, ядрами планетарных туманностей и даже обычными звездами. Подсчет показывает, что этого газа ежегодно поступает из звезд в окружающее их пространство очень много.

Спиральная галактика в созвездии Волосы Вероники.



Спиральная галактика, видимая с ребра, в созвездии Девы.

Млечный путь и Галактика, в которой мы живем

Наша Солнечная система — маленькая частица громадной звездной системы, которую называют *Галактикой*. В Галактику входят все те звезды, которые мы видим в созвездиях и невооруженным глазом, и в телескоп. В ее составе находятся и все те звезды, из которых состоит серебристая полоса *Млечного Пути*.

Млечный Путь опоясывает все небо как гигантская светящаяся лента. В телескоп видно, что это скопление множества слабых, далеких звезд. Более яркие, близкие звезды расположены тем гуще, чем они ближе к средней линии Млечного Пути. Среднюю линию Млечного Пути называют *галактическим экватором*. Плоскость галактического экватора — это плоскость симметрии нашей звездной системы. Вдоль этой плоскости и наша система тянется во всех направлениях. И в пространстве звезды скучиваются к этой плоскости. Скучиваются к ней и рассеянные звездные скопления, и все газовые туманности, и облака космической пыли. Только шаровые звездные скопления и звезды некоторых типов не подчиняются этому закону. Они заполняют сфероидальный объем, концентрируясь со всех сторон к центру Галактики.

Из-за облаков пыли, ослабляющих свет далеких звезд, очень трудно выяснить подробности строения Галактики. Наша Солнечная система находится очень близко к галактической плоскости, в которой звезды расположены наиболее тесно. Свет всех далеких и слабых звезд сливается для нас в сплошное светящееся кольцо Млечного Пути.

Велика и грандиозна наша Галактика. От одного ее края до другого свет бежит почти 100 тыс. лет, а ведь от ближайшей звезды он доходит до нас примерно за 4 года.

Если бы мы могли посмотреть на нашу Галактику извне, находясь далеко за ее пределами, то убедились бы, что она сильно сплющена: ее диаметр в несколько раз больше «толщины». С ребра она должна быть видна в форме веретена или линзы. В середине она толще, и к центру звёзды скучиваются еще сильнее. В середине Галактики находится ядро — нечто вроде гигантского шарового скопления звезд.

От нас до ядра Галактики около 30 тыс. св. лет, а до ее края несколько меньше. Чем ближе к краю Галактики, тем разреженнее звезды. В звездном городе — Галактике мы живем ближе к ее окраине. Ядро Галактики видно от нас в сторону созвездия Стрельца. В летние ночи оно видно в южной стороне неба невысоко над горизонтом. Ядро это должно было бы сверкать как очень яркий участок

Млечного Пути. Но его заслоняют от нас облака космической пыли, через которые его свет не доходит до нас. Ядро Галактики можно наблюдать, только применяя особые способы фотографирования.

Галактика вращается — все звезды с разной скоростью вращаются вокруг ее центра. И наша Солнечная система со скоростью около 250 км/с несется по своей орбите вокруг центра Галактики. На один оборот ей требуется примерно 200 млн. лет.

Сколько же звезд, сколько солнц входит в состав Галактики? Их в ней более 100 млрд. Вокруг многих из них должны быть планетные системы. Даже если только на тысячу звезд приходится одна обитаемая планета, то и тогда во всей Галактике таких планет должно быть целых 100 млн.

Сравнивая нашу Галактику с другими гигантскими звездными системами, о которых ниже будет рассказано, и сопоставляя различные данные, можно сказать, что у Галактики *спиральное* строение. Из ее ядра выходят две (или более) спиральные ветви. Они состоят из звезд, газовых и пылевых туманностей и закручиваются вокруг ядра. Расположение спиральных ветвей точно еще неизвестно, но мы находимся между ними, а самые горячие и яркие звезды группируются в звездных облаках, образующих спиральные ветви.

Другие галактики — островные вселенные

Из светлых туманных пятен, которые видны на небе или на его фотографиях, лишь немногие газовые или освещенные пылевые туманности входят в состав нашей Галактики.

Большинство видимых на небе туманностей — это звездные системы гигантских размеров. Они находятся далеко за пределами нашей Галактики. Это другие галактики, галактики с малой буквы. Если наша Галактика как бы звездный город или звездный остров в безбрежном океане Вселенной, то другие галактики — это другие звездные города, другие острова Вселенной. Как острова в океане, галактики образуют местами архипелаги — скопления десятков, а иногда и тысяч галактик. Наша Галактика — одна из очень крупных.

В южном полушарии неба есть два больших светлых пятна. В честь великого мореплавателя Магеллана они названы Магеллановыми Облаками. Выяснилось, что Большое и Малое Магеллановы Облака — галактики неправильной формы. В то же время они спутники нашей Галактики и отстоят от нее на расстоянии около 120 тыс. св. лет. По размерам они значительно меньше нашей Галактики, но все же являются довольно крупными звездными системами. Их диаметры достигают 26 и 17 тыс. св. лет. Подобно нашей Галактике, они состоят из звезд всевозможных типов и из газовых и пылевых туманностей. В них есть рассеянные и шаровые звездные скопления.

В созвездии Андромеды есть большая туманность. Осенью ее нетрудно найти на небе при помощи звездной карты. Фотографии показывают, что это *спиральная* звездная система. Свет от нее идет до нас около 1,5 млн. лет.

Сходство между галактикой в Андромеде и нашей Галактикой так велико, что, глядя на нее, вы можете себе представить, что это и есть наша Галактика. Она сильно наклонена, и потому мы видим ее продолговатой. Солнечную систему надо было бы представить себе находящейся за пределами спиральных ветвей, которые видны на фотографии. Разреженные части этой системы тянутся еще далеко за пределы ярких спиральных ветвей ее внутренней части. По размерам и массе галактика в Андромеде больше нашей Галактики. У нее тоже есть маленькие галактики — спутники. Но они имеют не спиральную форму и не клочковаты, как неправильные галактики — Магеллановы Облака. Это эллиптические галактики, в частности *шаровые*. Две из них показаны на фотографии: одна — в проекции на спиральную галактику, другая — в стороне, продолговатая. Они выглядят как сплошные пятна, потому что в них звезды не очень ярки и расположены очень тесно.

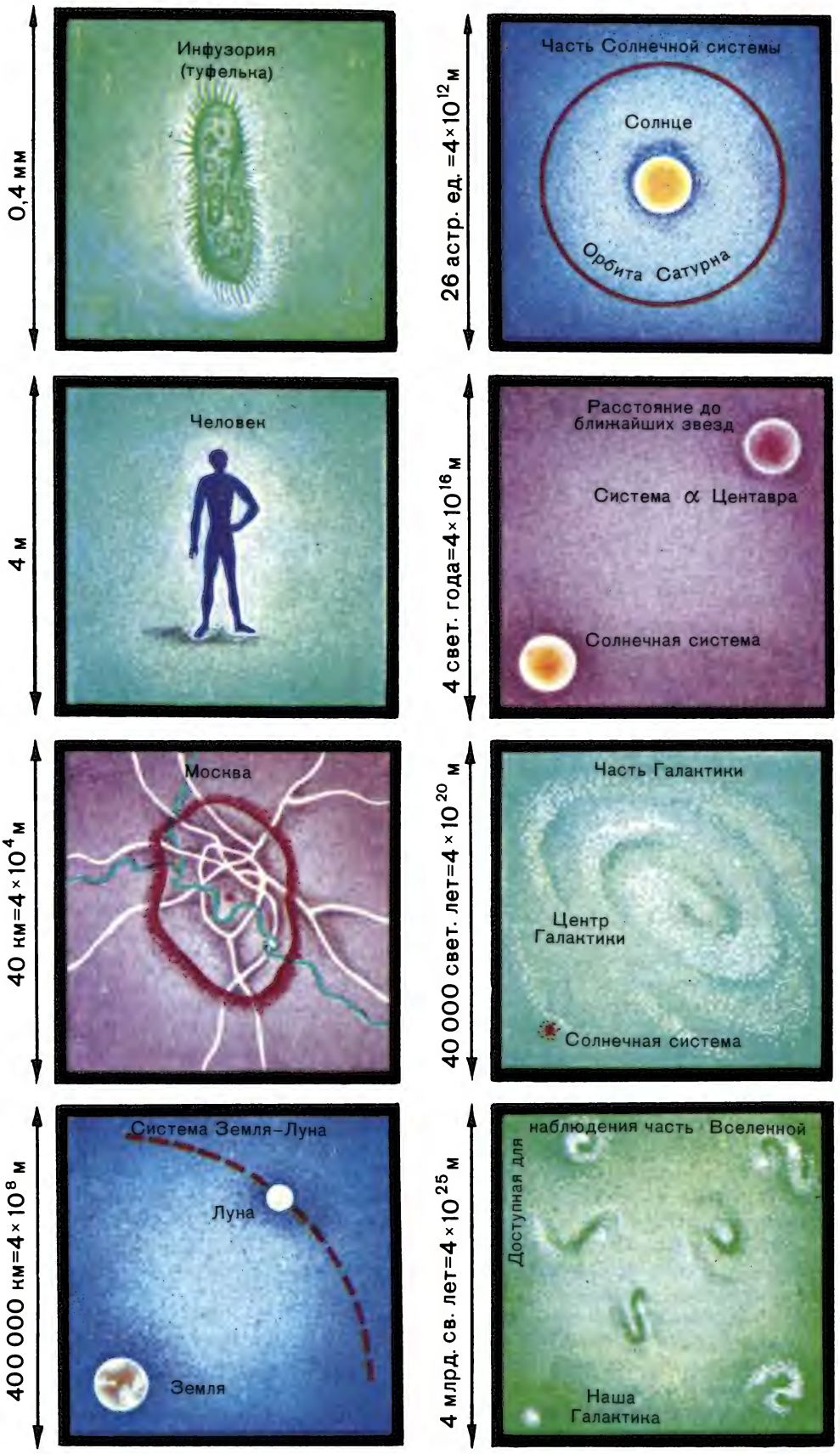
На таком же расстоянии от нас, как эта группа, в созвездии Треугольника, находится еще одна спиральная галактика. Она меньше нашей Галактики, видна почти плашмя, более развернута, и очертания ее клочковатых спиральных ветвей хорошо видны.

А есть спиральные галактики, повернутые к нам ребром и похожие на *веретено*. Обратите внимание на темную полосу вдоль их экваториальной, или галактической, плоскости. Это скопление пылевых облаков. Они задерживают свет звезд, расположенных за ними. Примерно так должна выглядеть и наша Галактика, если бы мы могли видеть ее со стороны в ее галактической плоскости.

В этой статье мы назвали наиболее типичные формы галактик, но мир островных вселенных очень разнообразен.

Спиральные галактики: наша, в Андромеде и в Треугольнике со спутниками двух первых из них

Изменение масштаба для изображения различных частей Вселенной. Сторона каждого последующего квадрата по сравнению с предыдущим в 10^4, а последнего в 10^5 раз больше. На рисунке показано, что могло бы уместиться внутри каждого квадрата.



образуют *Местное* скопление галактик. Таких групп во Вселенной множество. В созвездии Девы есть огромное облако. Оно состоит из сотен галактик. Это центральная часть, ядро скопища тысяч галактик, к которому принадлежит и Местное скопление галактик. Диаметр такой *Сверхгалактики,* как ее называют, составляет около 100 млн. св. лет, а общая ее масса равна примерно квадриллиону солнечных масс.

Известно много других скоплений галактик и отдельных галактик, рассеянных между ними. Всего по фотографиям, сделанным наибольшим в мире телескопом, можно было бы насчитать свыше миллиарда звездных систем, подобных нашей. Все доступные ныне для наблюдений области Вселенной входят в состав системы еще более грандиозной, чем Сверхгалактика. Эту систему называют *Метагалактикой,* но до ее границ мы еще не добрались. Свет наиболее далеких галактик, доступных сейчас нашему наблюдению, доходит до нас через несколько миллиардов лет! Когда он их покинул, на Земле еще не было никакой жизни. А при помощи радиотелескопов мы принимаем излучение радиоволн и от еще более далеких галактик. Эти радиоволны оставили свои галактики задолго до того, как образовалась наша Земля.

Некоторые галактики излучают радиоволны с потрясающей мощностью. По-видимому, в них существует магнитное поле, в котором со скоростью, близкой к скорости света, носятся электроны и другие элементарные частицы. Магнитное поле тормозит их движение, а это вызывает радиоизлучение.

К середине 60-х годов нашего века выяснилось, что на небе есть объекты, имеющие вид очень слабых звездочек и посылающие мощное радиоизлучение. Их назвали *квазизвездными радиоисточниками,* сокращенно — *квазарами.* Большинство ученых сходится на том, что это наиболее далекие из известных нам объектов. А в таком случае их истинная сила света в 100 раз больше, чем сила света такой гигантской Галактики, как наша. Расход энергии в них потрясающе велик, и источника его мы еще не знаем. Во всяком случае, квазары — это не обыкновенные радиогалактики, и даже неизвестно, есть ли там звезды вообще. Возможно, что квазар — это одна гигантская сверхзвезда, выбрасывающая по временам облака наэлектризованных газов, обычно в противоположные стороны.

К числу временных загадок, которые должны быть разгаданы, относится и «красное смещение» в спектрах галактик. Линии их спектра смещены к красному концу, и тем сильнее, чем галактики дальше от нас. Если этот сдвиг линий обусловлен движением галактик (а по-видимому, это так), значит, они удаляются от нас, и тем быстрее, чем дальше находятся. У некоторых квазаров сдвиг линий больше, чем если бы они неслись со скоростью света! Ученые объясняют рост красного смещения с расстоянием образованием галактик вследствие взрыва очень плотной массы. В результате такого взрыва самые быстрые «осколки», превратившиеся в галактики, успели отлететь дальшего всего от места взрыва. Однако справедлива ли такая догадка, покажет будущее.

Бесконечная Вселенная и наш адрес в ней

Развитие науки раздвигает границы известной части Вселенной и подтверждает марксистское учение о бесконечности Вселенной. Продвигаясь в познании Вселенной вперед, мы будем встречать все новые и новые миры, и так без конца...

Каково же наше место в этой бесконечной Вселенной? Ответ на это может дать следующий наш с вами адрес:

БЕСКОНЕЧНАЯ ВСЕЛЕННАЯ

„НАША" МЕТАГАЛАКТИКА

„НАША" СВЕРХГАЛАКТИКА

„МЕСТНОЕ СКОПЛЕНИЕ" ГАЛАКТИК

ГАЛАКТИКА

ЗВЕЗДНОЕ ОБЛАКО „МЕСТНАЯ СИСТЕМА"

„Наша" Солнечная система

та Земля

Материк Евразия

СССР

Как произошли Земля и другие небесные тела

Откуда взялись Земля, Солнце, Луна и звезды? Всегда ли они были такими, какими мы их сейчас видим?

Люди интересовались этими вопросами с давних пор, но правильно ответить на них было невозможно, потому что для этого надо было сначала узнать, что же эти светила собой представляют, как они движутся, какова их физическая природа.

В древности под влиянием религиозных учений складывались легенды о сотворении мира. В разных странах и в разное время эти легенды были различны, но всегда в них высказывалась одна и та же мысль: мир создан по воле богов и с тех пор не изменяется, а существует таким, каким был создан и каким мы его видим.

В эти легенды люди верили, потому что не знали действительных причин явлений природы. Ведь только в XVIII в. был открыт великий закон природы о сохранении вещества и движения. Может меняться только состояние веществ: например, водяной пар превращается в воду или вода превращается в лед, а сами вещества остаются. То же происходит и с энергией: например, энергия движения воды на гидроэлектростанции превращается в электричество, которое приводит в движение машины, освещает улицы города и т. д. Энергия не уничтожается, она только меняет свою форму.

Не понимая и не зная этого, но наблюдая, как человек своим трудом может создавать разные предметы, люди считали, что и весь мир сделан каким-то существом, но, конечно, существом необычайно могущественным. Так и поддерживались различные легенды и религиозные мифы о сотворении мира.

Но постепенно, начиная с великого открытия Коперника, накапливались знания о строении Солнечной системы и звездного мира. Эти знания со временем и послужили основой для создания гипотез о происхождении небесных тел.

Научное предположение о происхождении Земли и других небесных тел впервые выдвинул немецкий философ И. Кант. Это было в 1755 г. В конце того же века, не зная ничего о гипотезе Канта, к сходному заключению пришел французский ученый Лаплас.

Кант и Лаплас обратили внимание на то, что Солнце горячее, а Земля холодная и по своему размеру много меньше, чем Солнце. В то же время Земля лишь одна из планет. Все планеты обращаются вокруг Солнца почти по окружностям, в одну и ту же сторону и почти в одной и той же плоскости. Это составляет основные отличительные черты Солнечной системы, которые должны быть объяснены в первую очередь.

Кант и Лаплас утверждали, что в природе все непрерывно изменяется, развивается. И Земля и Солнце раньше были не такими, какие они сейчас, а составляющее их вещество существовало в виде единой туманности. Лаплас довольно подробно разработал свою гипотезу, основывая ее на известных в то время законах механики, знание которых в настоящее время недостаточно.

Гипотеза́ Лапласа была научной, потому что она основывалась на законах природы, известных из опыта, и прежде всего на законе всемирного тяготения, действительно существующем в природе.

Однако после Лапласа были открыты новые явления в Солнечной системе, которые его теория не могла объяснить. Развитие науки привело к более точному и глубокому знанию природы.

На смену гипотезе Лапласа выдвигались другие объяснения происхождения Солнечной системы. При этом некоторые ученые за рубежом, так или иначе связанные с религией, нередко предлагали такие гипотезы, которые по возможности были согласованы с религиозными представлениями о сотворении мира. Такие гипотезы, в противоположность гипотезам научным, материалистическим, не двигают науку вперед, а ведут ее в тупик.

Материалистическая наука утверждает, что вещество существует вечно и вечно развивается без вмешательства божественных сил. Опровергая псевдонаучные гипотезы, советские ученые, наряду с прогрессивными учеными других стран, упорно работают над решением труднейшего вопроса о происхождении Солнечной системы и Земли.

Известный советский ученый академик О. Ю. Шмидт (1891—1956) предложил гипотезу, в разработке которой приняли участие астрономы, геофизики, геологи и ученые других специальностей. В своей гипотезе О. Ю. Шмидт, основываясь на ряде данных науки, пришел к выводу, что Земля и планеты никогда не были раскаленными газовыми телами, подобными Солнцу и звездам, а должны были образоваться из холодных твердых частиц вещества.

Если допустить, что некогда вокруг Солнца вращалось колоссальное облако из газа и пыли, то в дальнейшем, по расчетам О. Ю. Шмидта и его сотрудников, должно было происходить следующее. Бесчисленные частицы первоначально двигались беспорядочно. Затем их орбиты вследствие столкновений делались круговыми и располагались примерно в одной и той же плоскости. Так вместо первоначального беспорядочного хаотичного движения частиц возникло стройное движение их всех в одном направлении.

Но в результате столкновений частичек при первоначально беспорядочном движении энергия их движения частично переходила в тепло и рассеивалась в пространство. До некоторой степени сходно с этим теряет свою энергию движения (т. е. уменьшает свою скорость) ружейная пуля, нагревающаяся при преодолении сопротивления воздуха. Потеря энергии движения сталкивающихся частичек, как показывают расчеты, вела к тому, что допланетное облако постепенно сплющивалось и, наконец, стало по форме похожим на блин.

Когда частички собрались в одной плоскости, расстояния между ними стали меньше, и они начали сильнее притягивать друг друга. Частички объединялись, уплотнялись, причем особенно быстро росли наиболее крупные. Они и притягивали к себе сильнее, и столкнуться с ними было легче.

Постепенно большая часть пылинок в блиноподобном облаке таким путем собралась в несколько гигантских комков вещества, которые стали планетами. Ком — будущий Юпитер — «пожирал» очень много вещества из пространства между его орбитой и орбитой будущего Марса. Он мешал частичкам соединиться в этом пространстве в крупные тела и притягивал их к себе. В результате между Марсом и Юпитером не возникло большой планеты, а образовались астероиды, или малые планеты.

Пояс астероидов разделяет Солнечную систему на две части, в которых находятся две различные группы планет. О. Ю. Шмидт объяснил, почему произошло это разделение. Ближе к Солнцу температура пылинок была выше, и здесь образовались сравнительно небольшие планеты земной группы: Меркурий, Венера, Земля с Луной и Марс с двумя маленькими спутниками. Они состоят из тугоплавких каменистых веществ, металлов и их окислов и содержат очень мало легких газов и воды. Дальше от Солнца, где было значительно холоднее, на пылинках намерзало много льда. Такие летучие вещества, как углекислый газ, метан, аммиак, тоже намерзали на твердых частичках, подобно инею, покрывающему на рассвете в осеннее утро холодную поверхность камней. Там образовались планеты-гиганты Юпитер, Сатурн, Уран и Нептун. В них значительно больше воды, аммиака и метана, чем металлов и каменистых веществ. А в самых больших планетах — Юпитере и Сатурне больше всего водорода, но есть и гелий. Эти газы входят во все звезды и туманности, они должны были находиться и в допланетном облаке. Самые массивные планеты не только поглотили твердые частицы, но вобрали в себя и много водорода и гелия. Остатки этих газов рассеялись в пространстве под действием потоков заряженных частиц, летящих от Солнца, — солнечного ветра. Около планет-гигантов обращаются целые системы спутников. Самая далекая от Солнца планета — Плутон имеет массу много меньшую, чем Земля, так как Плутон образовался на внешнем крае допланетного облака.

О. Ю. Шмидту впервые удалось доказать, что при падении частичек на зародыши планет последние стали вращаться, как правило, в ту же сторону, в какую они обращались вокруг Солнца, как это и есть в действительности. Мы знаем, что по отношению к основной плоскости планетной системы оси вращения многих планет наклонены под различными углами. Это вызвано тем, что на планеты падали не только мелкие частицы, но и крупные тела наподобие астероидов. Косые удары таких крупных тел могли заметно отклонить оси планет от вертикального положения.

Зародыши планет, особенно крупных, должны были окружаться скопищами мелких пылевых частиц, из которых возникали спутники планет, по мере того как сами планеты росли из газово-пылевого облака, окружавшего Солнце.

О первых «днях» Земли

Сотрудник О. Ю. Шмидта В. С. Сафронов подсчитал, что возникновение Земли из допланетного облака длилось приблизительно 100 млн. лет. Это очень небольшой срок по сравнению со всей историей Земли, которая длится уже 4,6 млрд. лет. Таковы современные оценки возраста Земли, Луны, метеоритов и всей Солнечной системы. Самые старые горные породы земной коры немного моложе — им 3,5 млрд. лет.

Как мы могли узнать, сколько лет назад сформировалась земная кора, конечно, подвергавшаяся и впоследствии изменениям?

Есть замечательные химические элементы — уран, торий и другие, которые обладают свойствами распадаться на части, постепенно превращаться в другие вещества и в конце концов в свинец. При этих удивительных превращениях образуется газ гелий и выделяется тепло. Как мы увидим дальше, изучение выделившегося тепла при этих превращениях было очень важно для выяснения истории нашей Земли.

Скорость распада урана и других радиоактивных элементов известна и не зависит от внешних воздей-

ствий. Чем дольше продолжается распад урана, содержащегося в горной породе, тем меньше его там остается, но тем больше накапливается свинца. По количеству оставшегося в горной породе урана и накопившегося свинца определяют продолжительность времени распада урана. Это и будет указывать на возраст горной породы, содержащей уран, от момента ее затвердевания.

Земная кора сложена каменными породами, которые когда-то были расплавлены. Откуда же в Земле взялось тепло? При столкновении частиц, когда из них складывалась Земля, выделялось тепло. Но больше всего тепла выделилось при распаде урана и тория, входивших в состав пылинок. Расчет показал, что Земля могла таким путем нагреться внутри примерно до 1500—3000°С. При высокой температуре каменные породы становятся размягченными, напоминающими теплый воск. В вязкой среде происходит перемещение вещества Земли. Тяжелые вещества опускаются вниз, а легкие поднимаются наверх. При резких перемещениях их происходит землетрясение.

Там, где расплавленные породы поднимаются особенно близко к поверхности, может происходить извержение расплавленной лавы, образуются вулканы.

Мысль о происхождении Земли из первоначально холодной материи приобретает все большее значение при разрешении различных вопросов геологии, в том числе и при поисках полезных ископаемых.

Так наука, исходя из накопленных знаний о Земле и Солнечной системе, выясняет историю нашей планеты.

По мнению многих ученых (в том числе В. Г. Фесенкова), Солнце, а за ним и планеты возникли из одного и того же вещества и что газово-пылевое облако присоединилось к Солнцу уже со времени его возникновения в какой-то группе звезд.

Развитие Солнца, звезд и газово-пылевых облаков

Некоторые идеалистически мыслящие ученые пытались утверждать, что все облака пыли, газа (туманности) и все звезды возникли одновременно. Наблюдаемые же сейчас в пространстве облака пыли и газа являются остатками вещества, из которого возникли небесные тела. А из остатков, по мнению этих ученых, ничего нового возникнуть не может. Такие утверждения подкрепляют религиозные представления о сотворении мира «в один день» — сразу из ничего.

Советский астроном Б. А. Воронцов-Вельяминов еще в 1931 г. указал, что и в наше время постоянно происходит выбрасывание газа в пространство с поверхности звезд, особенно с горячих и вспыхивающих как новые. Его подсчет показал, что, может быть, даже весь газ, который мы наблюдаем между звездами, ими же и порожден. Во всяком случае, облака газа образуются и в наше время. Звездный мир не бездеятельное скопище, обреченное на охлаждение и умирание. Это «фабрика», выбрасывающая непрестанно «продукцию» в виде газа, который при благоприятных условиях может сгущаться в пылинки или непосредственно подвергаться дальнейшим превращениям.

Есть облака пыли и газа, возникшие давным-давно, и есть только еще возникающие. Академик В. А. Амбарцумян и другие советские ученые в 1945—1947 гг. из ряда фактов сделали вывод, что звезды имеют разный возраст. Следовательно, есть основания утверждать, что звезды возникают и в наше время.

Вероятно, в какой-либо туманности родилось и наше Солнце, а родившиеся вместе с ним его «братья» и «сестры» уже разбрелись далеко по Галактике.

Возможно, что какое-то недолгое время вначале Солнце было больше и горячее, чем теперь. Сейчас Солнце продолжает черпать свою тепловую энергию за счет превращения в его недрах водорода в гелий (при этом выделяется колоссальная энергия) и почти не остывает. Еще миллиарды лет оно будет согревать и освещать Землю, и человечеству предстоит развитие в течение сроков, во много раз больших, чем срок, который прошел со времени появления первых людей на Земле.

В мире происходит вечное движение и изменение вещества. Из газово-пылевой среды возникают звезды и вокруг них планетные системы. Развитие звезд приводит к извержению из них в мировое пространство газов. Так снова вещество принимает форму, из которой опять могут возникнуть уплотненные тела. Но при этих бесконечных превращениях меняются условия рождения небесных тел, меняется их состав. Природа не повторяет и не копирует: разнообразие возникающих небесных тел бесконечно велико. Так и на самой Земле отмирают и возрождаются те или иные формы растений и животных, и при этом растительный и животный мир непрерывно изменяется.

Огромное значение в преобразовании природы Земли имеет человек, воздействие которого на природу основывается на изучении и использовании ее законов.

Как астрономия помогает человеку

Астрономия в народном хозяйстве СССР

Астрономия во все века была необходима людям как наука практическая. Но особенно велико ее значение в народном хозяйстве сейчас.

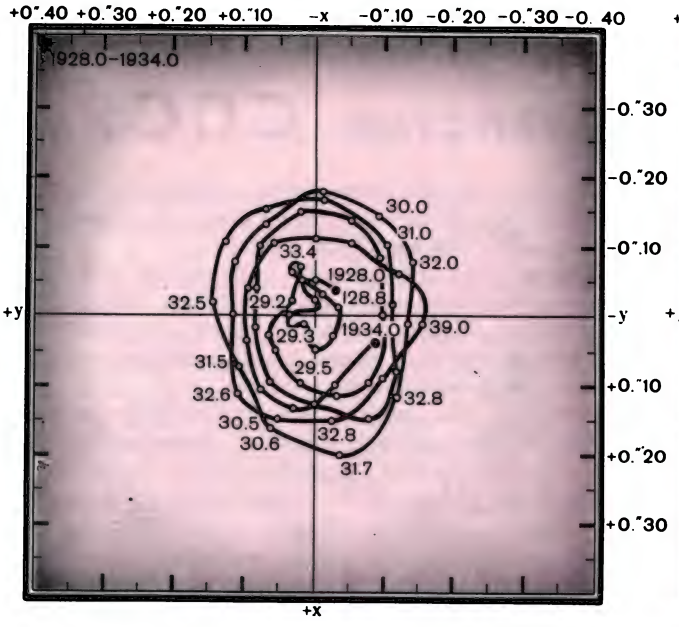
Прежде всего астрономия необходима для определения географических координат мест на поверхности Земли. Знание координат нужно, чтобы составлять географические карты, вести корабли в открытом море по намеченному курсу.

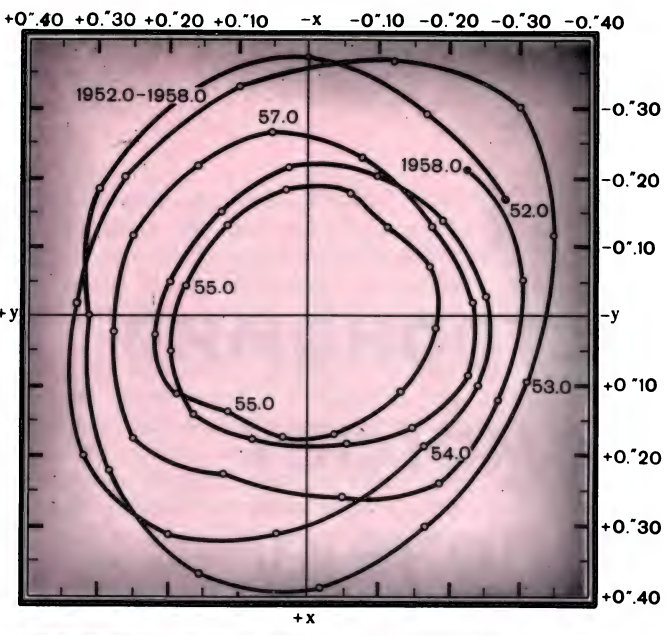
Например, как определить кратчайшее расстояние между Москвой и Якутском? Измерять его мерной лентой — задача невыполнимая. Но если получить из наблюдений координаты этих мест, т. е. широту и долготу Москвы и Якутска, то определить это расстояние будет нетрудно. Железнодорожную магистраль нельзя проложить правильно, не определив координаты ряда пунктов на ее пути.

На практике часто приходится определять *направление* относительно стран света, например точки юга. Эту задачу называют *определением азимута* земного предмета и решают методами астрономии. Азимут определяют при сооружении предприятий, научных и общественных учреждений (башни и павильоны обсерваторий, антенны радиостанций, стадионы). Азимутом пользуются, определяя направление полетов межконтинентальных ракет.

Однако координаты мест на земной поверхности не строго постоянны, а непрерывно изменяются, правда в очень небольших пределах. Происходит это оттого, что Земля слегка смещается относительно своей оси вращения и географические полюсы (т. е. точки пересечения оси вращения Земли с ее поверхностью) непрерывно перемещаются. Это перемещение невелико. Северный полюс движется против часовой стрелки по сложной спиралеобразной кривой, которая то закручивается, то раскручивается, не выходя из квадрата со сторонами 26 м (см. рис.). Движение полюса очень сложное. На рисунке видно, что с 1928 по 1934 г. полюс «топтался» на месте, незначительно смещаясь около среднего положения. В 1952 г. его отклонение достигло максимального значения (см. рис.).

Из-за смещения полюсов смещается и экватор Земли, так как ось вращения перпендикулярна плоскости экватора. Изменяется и меридиан любого места наблюдения. Все эти смещения вызывают изменение координат. И как ни малы такие отклонения, но их надо учитывать и исправлять координаты применительно к движению полюса. Поправки координат необходимы не только астрономии, но и геодезии, геофизике, картографии. Получают эти поправки из наблюдений на многих обсерваториях земного шара. Их проводит специальная Служба движения полюсов.





Другая очень важная астрономическая задача — определение, хранение и передача точного времени. Без точного времени не могут нормально работать фабрики и заводы, государственные учреждения, учебные заведения, железнодорожный и водный транспорт, авиация и т. д. Поэтому из Москвы ежечасно подаются широковещательные сигналы времени — шесть коротких гудков; начало последнего гудка соответствует концу данного часа и началу следующего.

Для специальных научных учреждений, обсерваторий, ведущих астрономические наблюдения, штурманов кораблей, многочисленных географических, геодезических, геологических, гравиметрических и других экспедиций несколько раз в сутки подаются специальные сигналы еще более точного времени.

Определяют точное время на астрономических обсерваториях, наблюдая звезды с помощью точнейших астрономических приборов. Указывают его на каждый момент высокоточные часы. Из наблюдений звезд и определяется поправка этих часов.

Для определения координат мест на земной поверхности, точного времени и решения многих других задач (о них будет рассказано дальше) нужно знать точные положения на небе Солнца, Луны, планет и многих звезд, т. е. их небесные координаты. Эти координаты вычисляют на основе многочисленных наблюдений на обсерваториях и приводят в специальных списках или таблицах — *астрономических ежегодниках.*

В Советском Союзе заранее на каждый год издается Астрономический ежегодник СССР; в нем даются координаты Солнца, Луны, планет, многих звезд и приводятся другие сведения.

Астрономическими расчетами определяется заранее время восходов и заходов Солнца. 21 марта и

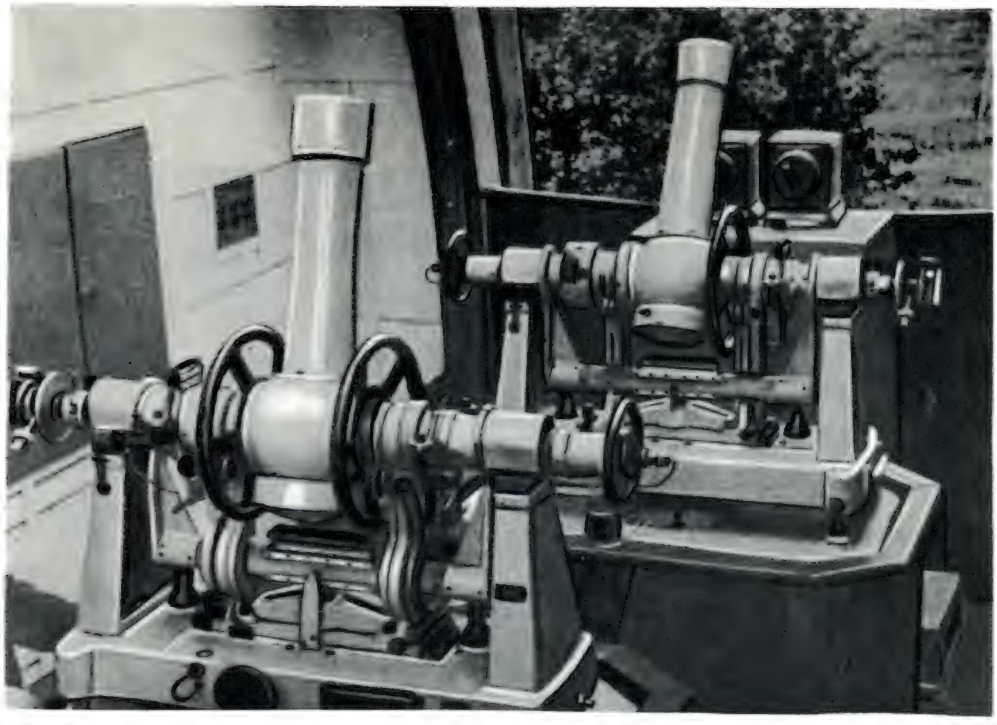
23 сентября Солнце восходит в точке востока и заходит в точке запада. В Северном полушарии Земли зимой Солнце восходит южнее точки востока, заходит южнее точки запада, а летом, наоборот, восходит севернее точки востока и заходит севернее точки запада. Восходы и заходы Луны приходятся на самые различные часы суток. Когда Луна в новолунии, она восходит и заходит примерно в одно время с восходом и заходом Солнца. В полнолуние Луна восходит во время захода Солнца, а заходит во время его восхода.

Вверху слева (стр. 156) — кривая движения Северного полюса Земли. Установлена наблюдениями на различных обсерваториях в 1928—1934 гг.

Вверху справа (стр. 156) — кривая движения Северного полюса Земли. Установлена наблюдениями на различных обсерваториях 1952—1958 гг.

Внизу (стр. 156) — зенит-телескоп. С его помощью ведутся определения географической широты для получения координат полюса.

Пассажные инструменты. С их помощью ведутся наблюдения звезд для определения точного времени.



Вычисление времени восходов и заходов Солнца, а также продолжительности дня имеет большое практическое значение. Данные о продолжительности дня и сумерек для разных широт нужны при подсчете электроэнергии, необходимой для предприятий, уличного освещения и других целей.

Почти в каждой семье есть отрывной календарь. На его листках приводится время восхода и захода Солнца для широты Москвы. Чтобы узнать, когда восходит или заходит Солнце в других местах, в данные календаря вносится поправка на широту места и на местное декретное время. Как это делать, обычно написано в начале календаря. В отрывном календаре указываются также продолжительность дня, восходы, заходы и фазы Луны.

Географические карты нужны для изучения расположения природных богатств на данной территории, рационального использования их и проведения различного рода народнохозяйственных мероприятий. Они необходимы промышленности для всякого рода изысканий, для правильного размещения в стране заводов и фабрик. Они нужны сельскому хозяйству, транспорту, армии, государственным учреждениям, учебным заведениям и т. д.

Чтобы составить географическую карту района, области или целого государства, нужно провести на данной местности целый комплекс астрономо-геодезических работ: определить широту, долготу, азимут опорных пунктов, равномерно расположенных на площади, с которой снимается карта (район, область, государство и т. д.), высоту опорных пунктов над уровнем моря. Без всех этих данных карты сделать нельзя.

Важно для отдельных районов страны предвычисление приливов и отливов. Для безопасности мореплавания, проведения на побережьях строительных работ, для различных исследований моря и т. д. нужно знать высоту прилива в данном месте на каждый час суток. Ее также определяют методами астрономии.

Мы живем в самом плотном, нижнем слое атмосферы. Поэтому всестороннее изучение его очень важно. У поверхности Земли и на небольшой высоте химический состав, плотность, влажность и другие свойства атмосферы можно изучать лабораторными способами, но на большой высоте они неприменимы. Здесь нас выручают влетающие в земную атмосферу метеоры.

Изучая метеоры, ученые исследуют физические свойства верхних слоев земной атмосферы, определяют направления и скорости воздушных течений. Так, по данным наблюдений метеоров впервые было установлено, что атмосфера химически однородна и на высоте 80—100 км имеет тот же состав, что и на уровне моря. На этих высотах определены скорости ветров и температуры. В последние годы верхние слои земной атмосферы ученые изучают также с помощью ракет и искусственных спутников Земли.

На Землю огромное влияние оказывает Солнце. Полярные сияния, магнитные бури, нарушение нормальной радиосвязи — все эти явления зависят от солнечного излучения. Поэтому очень важно изучать процессы, протекающие на Солнце и в его атмосфере, и выяснять их влияние на Землю и ее атмосферу.

В лаборатории Службы времени Государственного астрономического института имени П. К. Штернберга при Московском государственном университете.

Сейчас встает вопрос о непосредственном использовании энергии Солнца в промышленности и сельском хозяйстве. Есть разные способы использования энергии солнечных лучей. В южных районах Советского Союза имеются солнечные установки, дающие горячую воду и пар для консервных заводов, бань, кухонь и отопления зданий. В Ташкенте сооружена солнечная установка, состоящая из бетонного параболоида с поверхностью 80 м^2. На нем смонтированы небольшие посеребренные зеркала: отражаясь от них, солнечные лучи собираются в фокус и нагревают котел с водой; получаемый пар используется в холодильной машине. Подобных установок сейчас много.

Советские ученые работают над использованием солнечной энергии в промышленности и сельском хозяйстве.

Методы, разработанные в астрономии, с успехом применяются в других областях науки и практики. Зачастую чисто теоретические астрономические исследования при дальнейшем их развитии приобретают важное практическое значение. Характерный пример — спектральный анализ. В 1666 г. Ньютон с помощью стеклянной призмы разложил белый солнечный свет на семь основных цветов — получил спектр. В нашем столетии на основе этого очень важного открытия создан обширный раздел новой, теперь уже технической, науки о природе — спектральный анализ.

Методы, применяемые астрономами для изучения химического состава Солнца и звезд посредством спектрального анализа, широко распространены в металлургии, при плавке различных металлов. Ими пользуются медики при определении процента кислорода в крови больного, химики — для определения состава полимеров и т. п.

Другой пример — открытие элемента гелия. В 1868 г. астрономы, наблюдая солнечный протуберанец, нашли в его спектре яркую желтую линию. Ее не было в спектрах ни одного известного в то время химического элемента. Солнечный газ, которому принадлежит эта желтая линия, назвали гелием, что означает «солнечный». Спустя 25 лет гелий был выделен химиками на Земле из минерала клевеита.

Гелий — самый легкий газ после водорода. Им наполняют лампы накаливания и радиолампы, он сверкает желтовато-розовым цветом в витринах магазинов. Гелий применяется в металлургии для продувания расплавленных металлов и ведения плавок. Сейчас гелий добывают в основном из подземных газовых скоплений.

За последние годы между астрономией и космонавтикой установилась тесная научная связь. Пример этому — изучение Земли космическими методами. Фигура Земли очень сложна, а ее внутреннее строение неоднородно, поэтому она по-разному притягивает спутник в разных точках его пути, и он отклоняется от расчетной орбиты. Наблюдая эти отклонения (возмущения), делают очень важные выводы о форме Земли и ее основных параметрах: размерах, сжатии, напряженности гравитационного поля.

Вследствие вращения Земли спутник при каждом обороте летит по новой орбите. Эту орбиту нужно заранее вычислить, чтобы знать, когда и где полетит спутник. Наблюдение спутников и вычисление их орбит — очень нужная и вместе с тем сложная и трудоемкая задача, которая также решается с помощью астрономии.

Теория космических полетов непосредственно вытекает из теории движения небесных тел. Космические корабли уже достигли Луны и доставили на Землю образцы лунных пород; космические межпланетные станции доставляют ценные научные сведения о природе Марса и Венеры и их атмосферах.

Многие другие вопросы, имеющие важное практическое значение, также решаются с помощью астрономии.

Время и календарь

Часы на Спасской башне.

Трудная задача

От календаря требуется как будто немногое: вести правильный счет суток, только и всего, но это далеко не простая задача.

Основные меры времени даны природой: за сутки Земля совершает один оборот вокруг своей оси, а за год один оборот вокруг Солнца. Хорошо, если бы в году было целое число суток — все равно сколько: 365 или 563. Тогда можно было бы создать точный и удобный календарь. Даже если бы год содержал $365^1/_2$ или $365^1/_8$ сут, из этих половинок или восьмушек можно было бы составить целые сутки.

Год продолжается 365+0,242199... сут. Очень нескладная дробь, и последняя цифра еще не последняя: дробь эта бесконечна. Можем записать ее менее точно и более просто: 365 сут+5 ч 48 мин 46 с.

В данном случае нельзя разделить одно число (24 ч) на другое (5 ч 48 мин 46 с) без остатка.

Значит, нельзя создать точный календарь. Но календарь у нас все-таки есть, и без него жить нельзя. Как же люди создавали календарь?

Счет времени в древности

Каких только «календарей» не было у различных племен и народов! Жители тихоокеанских островов Самоа началом года считали то время, когда густыми косяками шла рыба, у других племен год начинался с прилета птиц, появления зайцев или других животных. Промежутки времени между этими явлениями составляли большую единицу для счета времени. Приблизительно она равнялась году современного календаря.

Подобные приметы еще в каменном веке служили вехами времени для первобытных охотников и рыболовов. Для земледельцев такие «календари» оказались недостаточными: они только указывали, что весна или лето уже наступили, но не предсказывали их, не помогали предвидеть наступление весны, чтобы люди могли заблаговременно обработать землю к посеву.

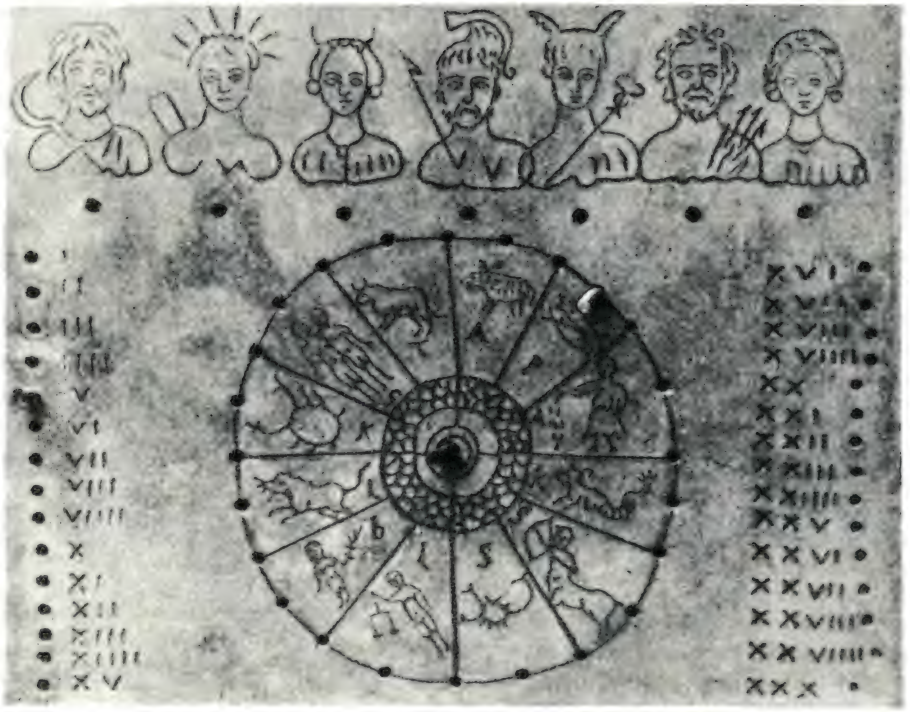
Правда, древние земледельцы понимали, что урожай зависит от Солнца, и поклонялись ему как богу света, тепла, жизни.

Слева вверху — египетский календарь.

Слева внизу — греческий календарь.

Справа вверху — мексиканский календарь.

Справа внизу — арабский календарь.



Каменный календарь римлян.

Не одинаков путь «божественного» светила в разные времена года: летом оно поднимается выше, чем весной, а зимой проходит ближе к горизонту, чем осенью.

Но одно дело — заметить этот «круговорот» Солнца и совсем другое — точно запомнить: ведь письменности еще не было, видимый путь дневного светила изменяется медленно и постепенно в течение целого года, а сколько времени продолжается год, тогда еще никто не знал.

Легче уследить за движением звезд: ни одна из них не обгоняет соседок и не отстает. Еще первобытные пастушеские племена подметили неизменный узор созвездий и по звездам находили верный путь к становищам. Для земледельцев небесные путеводители стали предсказателями наступления времен года.

Одни созвездия, как Большая и Малая Медведицы, видны у нас с вечера до рассвета каждую ночь, другие, например Водолей, скрываются на зимние месяцы. В это время года они восходят уже после Солнца и тонут в его лучах, а вновь становятся видимыми весной.

У древних греков таким «сигнальным» созвездием служили Плеяды, которые шесть недель не были видны. Как только скрывались они, наступала пора сева.

Такие небесные приметы были и у других народов, но приметы еще не календарь. Казалось бы, проще всего подсчитать, сколько дней проходит от одной весны до следующей, и гадать не придется, когда начинать полевые работы. Но в глубокой древности счет был мудреным искусством.

На заре истории человечества была известна первая природная мера времени — *сутки*. Прошло много тысяч лет, прежде чем была установлена вторая мера — *месяц*.

Неизвестно, где и когда впервые зародился счет дней по пальцам. Сначала достаточно было одной или двух рук: так возникли пятидневная и десятидневная недели. А когда усложнилось хозяйство и понадобилось заглядывать в более отдаленное будущее, на помощь пришла Луна.

Изменчив видимый лик Луны, но всегда в одном и том же порядке сменяются ее фазы. Жрецы подсчитали, что от одного возрождения Луны до следующего проходит около 29 сут с лишним. Луна сделалась надежным счетчиком ускользающих дней...

Сутки и месяц стали основными мерами времени, и по этим вехам сложились первые календари у древних народов.

Более 5000 лет назад в Южной Месопотамии, где теперь находится государство Ирак, жили шумеры.

Летом жара здесь нестерпимая, до 50°С, зимой — дожди, а весной бурно разливаются реки Тигр и Евфрат. Каждый год затопляли они окрестные поля, удобряя их плодороднейшим илом. Как узнать заранее, когда начнется разлив рек? Разработать календарь помогло изучение поведения Луны.

Каждый месяц начинался праздником в честь дня рождения Сина — бога Луны, когда после безлунных ночей жрецы-астрономы впервые замечали тонкий серп. Особым торжеством отмечалось начало года — первое весеннее новолуние. (В древности новолунием называли первое видимое появление серпа Луны. Но в новолуние серп увидеть нельзя. В это время обращенная к Земле сторона Луны не освещается Солнцем.) Именно в это время (около середины марта) начинала прибывать вода в Тигре, а через две недели — и в Евфрате. Но как узнать заранее, когда начнется разлив рек? Как разработать календарь, насущно необходимый для земледельческих работ? Решить эту сложную задачу помогла Луна.

Фазы Луны указывали, как мерить время: между двумя новолуниями проходит около 29,5 сут, а между двумя новогодиями — 12 «лун». По этим «лунам» жрецы и составили календарь на 12 мес. по 29 и 30 сут. Всего в таком *лунном* календаре было 354 дня.

Тогда еще точно не знали, какова продолжительность солнечного года, определяющего смену времен года (около $365\frac{1}{4}$ сут), но сама жизнь показала, что доверять богу Сину нельзя. Он подводил земледельцев: Новый год по лунному календарю уже прошел, а вода в Тигре еще не начала прибывать. Нарушались календарные сроки сельскохозяйственных работ, ведь они неразрывно связаны с временами года, смена которых зависит не от Луны, а от Солнца.

Чтобы подогнать к этим срокам короткий год лунного календаря, жрецы стали удлинять его время от времени, добавляя тринадцатый месяц. При этом нередко случалась изрядная путаница.

Много веков спустя вавилонские жрецы-астрономы уже довольно точно определили, что в солнечном году $365\frac{1}{4}$ сут. Год лунного календаря оказывался на $11\frac{1}{4}$ сут короче солнечного года. За 8 лет эта разница достигала 90 сут, а это ровно 3 мес по 30 сут. Если за 8 лет три раза добавлять к 12 месяцам тринадцатый, счет суток по Луне и по Солнцу сойдется. Так и поступали жрецы, превратив прежний лунный календарь в *лунно-солнечный*. Однако этот расчет был не очень точным: ведь лунный месяц по календарю длился в среднем 29,5 сут, а в действительности он чуть больше — 29,53.

Другим лунно-солнечным календарем пользовались в древнем Китае. Там пытались согласовать лунный счет времени с солнечным, добавляя в течение 19 лет семь раз по тринадцатому месяцу. Такой же, но более точный календарь придумал греческий астроном Метон в 432 г. до н. э.

Между тем на много веков раньше уже существовал более совершенный календарь.

Самый простой и удобный календарь

Ни в одной стране древнего мира не было такой искусной системы орошения, как в Египте. С июня до октября, в половодье, широко разливался Нил, а входя в берега, оставлял на полях рыхлый слой тучного ила, удобряющего землю. Случалось, что река уносила жилища и людей.

Как подкараулить начало разлива Нила? Никто не мог предвидеть, когда наступит половодье. Никакие признаки на земле не предвещали его. И жрецы-астрономы нашли такие безошибочные приметы на небе — первый восход звезды Сириус.

В Египте эта звезда ранней весной видна только в вечерние часы на западе; с каждым днем она показывается над горизонтом все позже, пока совсем не исчезнет: в действительности Сириус в это время восходит после Солнца и поэтому невидим. Примерно через 2,5 мес звезду вновь впервые могли увидеть на востоке; едва сверкнув на предрассветном небе, она тотчас же угасает в лучах утренней зари. В ту же пору начинала прибывать вода в Ниле.

Наблюдая появление Сириуса, жрецы научились предсказывать начало наводнения, а по наблюдениям Сириуса и Солнца установили, что год продолжается 365 сут, и разработали календарь. В нем было 12 мес по 30 сут, а в конце года добавлялось еще 5 сут — в честь «рождения богов». Это был первый в истории человечества *солнечный* календарь, простой и удобный, если бы не одна заминка.

Торжественный праздник Нового года был приурочен к первому «явлению» Сириуса и началу нильского наводнения. Первый месяц египетского календаря назывался Тот — в честь одного из богов. Но странное дело: если в этом году священная звезда показывается перед утренней зарей в первое число Тота, то через 4 года лишь второго числа.

Почему же каждые четыре года Сириус запаздывает на сутки?

Позже жрецы догадались: год продолжается не ровно 365, а почти $365\frac{1}{4}$ сут. Из этих-то четвертушек за 4 года и накоплялись целые сутки, кото-

рые не входили в календарный счет. Значит, не Сириус запаздывает, а календарь спешит, уходит вперед — за 4 года на сутки.

И все же жрецы продолжали считать, что в году ровно 365 дней, а новогодие кочевало по всем дням календаря. Нам показалось бы нелепым встречать Новый год то 2, то 3 января и еще позже, а египтяне привыкли к своему блуждающему году. Жрецы же умышленно, в угоду религиозным предрассудкам, не исправляли ошибку. Правда, один из египетских царей — Птолемей III Эвергет пытался в 238 г. до н. э. устранить этот недостаток, предложив прибавлять раз в 4 года еще одни, 366-е сутки. Однако жрецы наотрез отказались от этого, и древний календарь еще долго оставался блуждающим.

Лишь в 26 г. до н. э., когда Египет был завоеван Римом, император Август ввел в тогдашней столице Египта — Александрии календарь с поправкой царя Эвергета. Этот самый простой и удобный александрийский календарь сохранился до сих пор в Эфиопии.

В 1793 г. новый солнечный календарь был введен в республиканской Франции. В этом календаре было 12 мес по 30 сут, или по три декады — десятидневки. В конце года добавлялось еще 5 праздничных дней, когда прославлялись герои труда, лучшие изобретения, подвиги мужества и отваги, а раз в 4 года, в шестой, добавочный день, проводились спортивные игры и состязания.

Этот (республиканский) календарь был отменен Наполеоном в 1806 г.

Из всех существующих в наше время календарей простейшим остается александрийский: в нем все месяцы (а также кварталы и полугодия) имеют равную продолжительность. В каждом месяце три десятидневные недели, и каждый из ее дней всегда приходится на одинаковые числа месяцев. Наш календарь унаследован не от египтян, а от римлян.

Юлианский календарь

Неудобный лунно-солнечный календарь утвердился в Риме более 2500 лет назад. Год начинался с марта и состоял из 12 мес: 4 мес имели по 31 сут, 7 — по 29, в феврале было 28 сут, а всего в году 355 сут

Календарь на 200 лет

Год содержит 365 или 366 дней. Поэтому любое число каждого месяца ежегодно сдвигается на 1 или 2 дня недели в определенной последовательности. Вот, например, как «кочевало» 1 января по различным дням в следующие годы:

1962 — понедельник, 1963 — вторник, 1964 — среда, 1965 — пятница, 1966 — суббота, 1967 — воскресенье, 1968 — понедельник, 1969 — среда.

Такая последовательность повторяется через каждые 28 лет, т. е. 1 января — это понедельник в 1934 (1962 — 28) или 1990 (1962+28) г., вторник в 1935, 1963, 1991 гг. и т. д. Значит, достаточно в 80-е годы нашего столетия составить календарь на 28 лет, и он будет служить хоть и не вечно, но все же до 28 февраля 2100 г. В 2100 г., невисокосном по новому стилю, не должно быть 29 февраля, и поэтому указанная выше последовательность дней нарушится.

Как же сделать самим такой долгосрочный календарь?

Прежде всего вырежьте из тетради в клетку три полоски и точно перерисуйте на них чертежи (см. рис. на стр. 164). Затем возьмите две прочные картонки. От одной отрежьте узкие полоски и прикрепите проволокой сверху и снизу к целой картонке. В просвете между ними должна свободно продвигаться рейка из более тонкого картона. На полученную таким образом линейку наклейте чертежи.

Все это нужно сделать очень аккуратно: цифры IV (апрель), VII (июль) и I (январь високосного года) должны находиться на одной вертикальной линии с 1970 г. и столбиком чисел месяца — 1, 8, 15, 22, 29, как показано на рисунке. Календарь ваш готов.

Как им пользоваться?

Допустим, что вас интересует 17 февраля 1948 г. Какой это был день? Календарь для 1948 г. такой же, как для 1976 (1948+28). Это год високосный. Поэтому, передвигая рейку, вы ставите в одну линию с 1976 г. цифру II и получаете табель-календарь на февраль 1948 г. 17 февраля — вторник.

Хотите узнать, в какой день недели исполнится столетие Великой Октябрьской социалистической революции — 7 ноября 2017 г.? Для этого прежде всего нужно найти «подходящий» год в вашем календаре, отнимая от числа 2017 по 28. Очевидно, что это будет 1961 г. (2017 — 56, т. е. 28×2). Передвиньте рейку так, чтобы ноябрь (XI) стал в линию с 1961 г. Вы получите табель-календарь на ноябрь 2017 г. и узнаете, что в 2017 г. 7 ноября придется на вторник.

Календарь позволяет определить день недели и для любой даты прошлого,

(не хватало $10^1/_4$ сут). Разница эта с каждым годом увеличивалась, и короткий календарь все больше убегал вперед — от зимы к весне, от весны к лету. В сущности это был испорченный лунный календарь.

Надо было добавлять тринадцатый месяц, но это строго-настрого запрещали религиозные верования. И жрецы вклинили дополнительный месяц в февраль. Раз в два года после 23 февраля они добавляли какой-то кургузый месяц мерцедоний, то из 22, то из 23 сут, а затем как ни в чем не бывало продолжали считать 24 февраля, 25, 26 и т. д.

Но и в этот календарь попал лишний день. К тому же жрецы не без корысти то добавляли, то пропускали мерцедоний и так запутали счет дней, что месяцы уже не соответствовали временам года. Надо было упорядочить такой сумбурный календарь. Это сделал Юлий Цезарь в 46 г. до н. э.

По совету александрийского астронома Созигена Цезарь исключил мерцедоний и перекроил число дней в месяцах: в 7 мес стало по 31 сут, в 4 — по 30, а в феврале — 28 сут. Таким образом, в году стало 365 сут, а должно быть $365^1/_4$. Из этих четвертушек за 4 года нарастают сутки — их решено было добавлять к каждому четвертому году, удлиняя на одни сутки февраль.

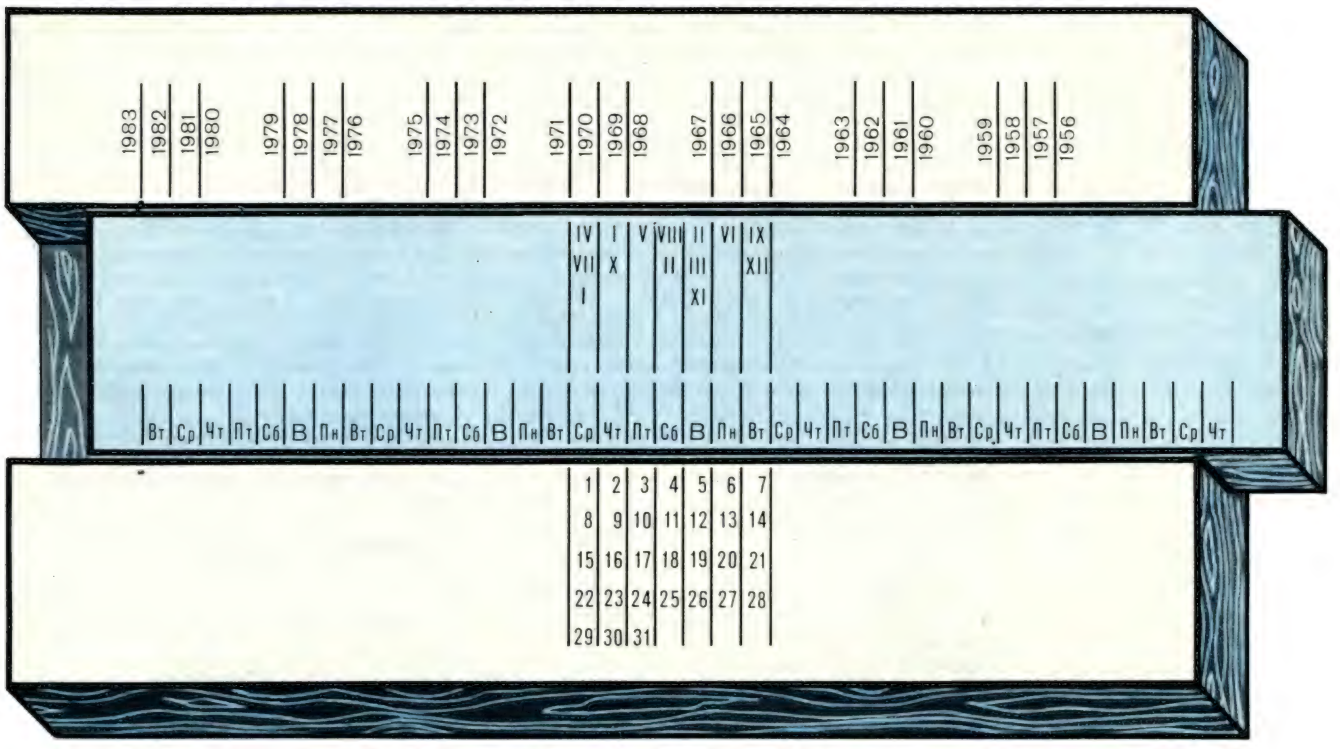
Таким календарем мы и пользуемся в настоящее время, считая високосными (366 сут) годы, порядковое число которых делится на 4, например 1968, 1972, 1976...

Начало года Цезарь перенес с марта на 1 января, и с этого дня приступали к своим обязанностям государственные чиновники. Прежние же названия месяцев сохранились. И это привело к недоразумению.

Раньше в календаре первый месяц по имени бога Марса назывался мартиус, второй — априлис, третий и четвертый, посвященные богиням Майе и Юноне, — майус и юниус. Следующие месяцы именовались по латинским числительным: пятый — квинтилис, шестой — секстилис, седьмой — септембер, восьмой — октобер, девятый — новембер и десятый — децембер. Последние два месяца в календаре — январиус и февруариус — были названы именами богов Януса и Февруо.

Когда эти два месяца из последних превратились в первые, все остальные также изменили свои места: септембер оказался не седьмым, а девятым, октобер — не восьмым, а десятым и т. д., хотя это было явной бессмыслицей.

Пятый месяц — квинтилис — в честь Юлия Цезаря назвали июлем, а позже шестой месяц — сексти-



лис — августом, по имени первого римского императора Августа.

С тех пор и сохранились в нашем календаре названия месяцев по именам римских богов, богинь и верховных правителей, а также по латинским числительным, не соответствующим своему смыслу. Сохранилась и древняя неудачная мера времени — неделя, придуманная еще вавилонскими жрецами-астрономами. Они знали пять планет и добавляли к ним также Солнце и Луну. Эти семь светил по древневавилонским религиозным верованиям считались богами, и каждый из богов управлял «своим» днем.

Позже семидневка вошла и в юлианский (по имени Юлия Цезаря) календарь. Каждый день недели посвящался одному из небесных светил: Солнцу, Луне и планетам. Христианская церковь приняла юлианский календарь и сохранила неделю, освятив ее новыми религиозными суевериями. Уцелела неделя и до наших дней.

В Древней Руси неделя называлась седмицей, а воскресенье — днем недельным (когда нет дел) или просто неделей, иначе — днем отдыха. Понедельник — первый день по (после) недели, вторник — второй, среда, или середа, — середина седмицы, четверг и пятница — четвертые и пятые сутки. Суббота получила название от еврейского «шаббот» — конец дел.

Юлианский календарь, принятый христианской церковью, распространился среди всех европейских народов и просуществовал у них более 1600 лет. Зачем же понадобилось исправлять его?

Новый стиль

По юлианскому календарю год продолжается в среднем 365 сут и 6 ч — на 11 мин и 14 с, или $^1/_{128}$ сут, дольше, чем один оборот Земли вокруг Солнца. Из таких ежегодных погрешностей за 128 лет накоплялись лишние сутки: надо бы, например, считать 1 января, а по календарю все еще тянется прошлогоднее 31 декабря. С течением времени календарь запаздывал все больше и больше.

Еще в IV в. христианские праздники были размечены по юлианскому календарю. При этом наступление пасхи следовало рассчитывать по первому весеннему полнолунию, а началом весны считалось 21 марта, когда день равен ночи. Но весеннее равноденствие каждые 128 лет отступало по календарю на одни сутки и в XVI в. перекочевало уже на 11 марта.

Это осложняло пасхальные расчеты, и тогдашний глава католической церкви папа Григорий XIII создал специальную комиссию: она должна была исправить календарь так, чтобы весеннее равноденствие вернулось к 21 марта и больше не отставало от этой даты.

В 1582 г. папа предписал: после четверга 4 октября пропустить в счете 10 сут и сразу считать пятницу 15 октября, а в будущем соблюдать «правило високосов», предложенное комиссией.

По юлианскому календарю лишние сутки набегают за 128 лет, или примерно трое суток за 400 лет. Чтобы избавиться от этих 3 сут, комиссия предложила, в отличие от юлианского календаря, считать простыми (по 365 сут) те «вековые» годы, что не делятся на 400: например, 1600-й год — високосный, а 1700, 1800 и 1900-й — простые. Вот и получится, что за 400 лет из календаря исключается 3 сут, а 2000-й год снова будет високосным.

Этот календарь, названный григорианским, был постепенно принят в европейских странах.

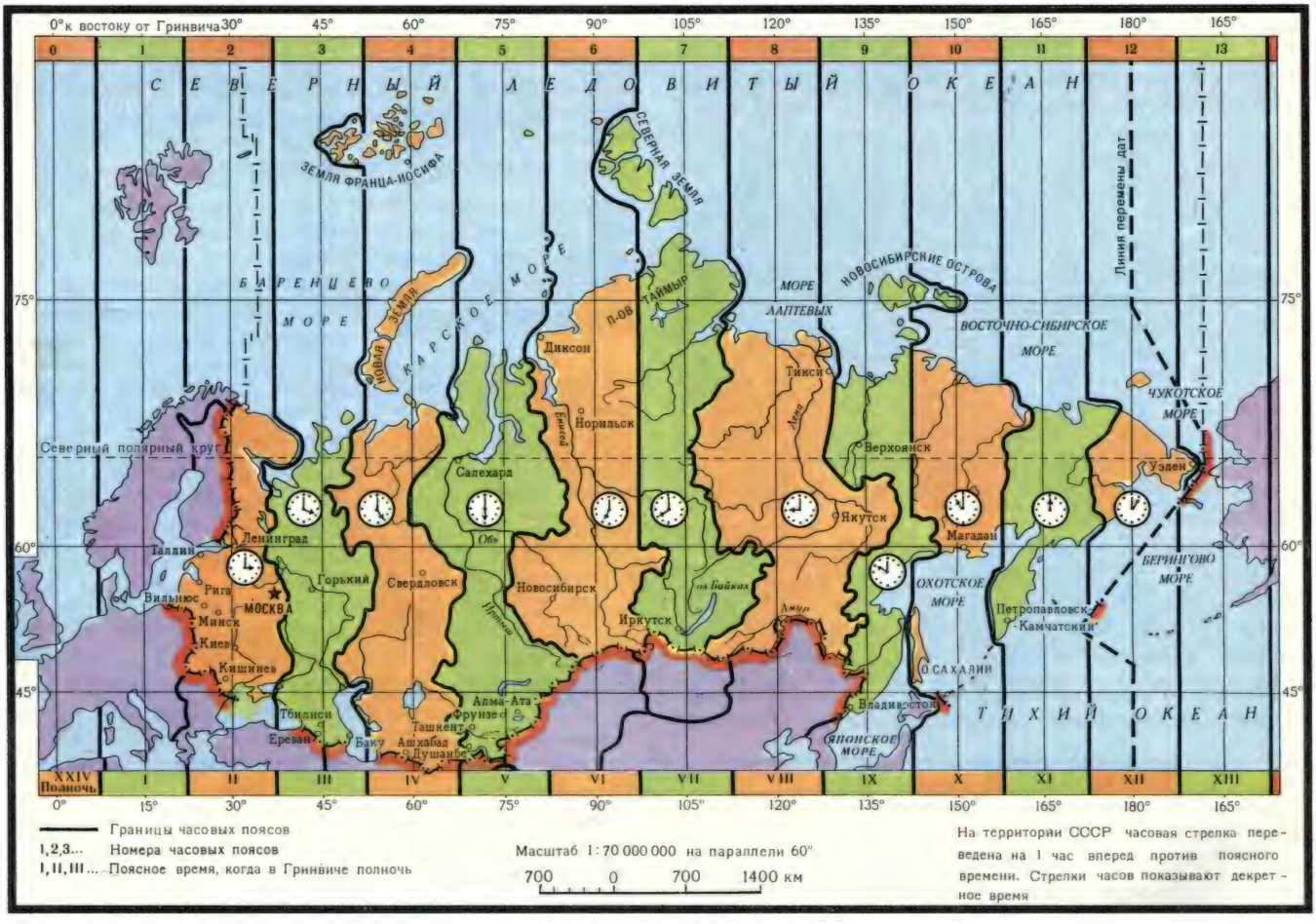
В России до Великой Октябрьской социалистической революции православная церковь решительно отклоняла эту реформу. Только по предложению

XIX столетия. Но при этом следует добавлять еще один день: ведь в прошлом веке новый стиль отличался от старого не на 13, а только на 12 дней.

Если дата событий в прошлом столетии указана по старому стилю, сначала надо прибавить 12 дней, а потом уже определять день недели.

Например, знаменитая Бородинская битва произошла 26 августа 1812 г. по старому стилю. Добавьте к этой дате еще 12 дней — и получите 7 сентября. Попробуйте сами узнать, в какой день было Бородинское сражение.

Карта часовых поясов.



В. И. Ленина с 14 февраля 1918 г. у нас был введен новый стиль.

Юлианский календарный год длиннее солнечного года почти на $11\frac{1}{4}$ мин, а григорианский всего на 26 с. Лишние сутки накопятся только в 50-м веке н. э. Для практических надобностей большей точности и не нужно.

От чего считают годы?

В древности египтяне вели летосчисление по годам правления фараонов, китайцы — по годам царствования и династиям императоров, греки и римляне — по годам правления высших должностных лиц (архонтов и консулов), другие народы — от мифического «сотворения мира» или от «рождения Христа». Последние две эры были придуманы богослужителями для укрепления веры в сказочного создателя и спасителя мира.

В Древней Руси год по языческим обычаям начинался весной, с теплых мартовских дней, когда приступали к полевым работам. С введением христианства православная церковь приняла юлианский календарь и эру от «сотворения мира» («сотворение мира» христианская церковь приурочила к 5508 г. до «рождества Христова»), а начало года перенесла на 1 сентября. По старинному обычаю и царь Петр I встречал Новый год (7208-й от «сотворения мира») 1 сентября. И вдруг глашатаи объявили царский указ от 19 декабря 7208 г.: «впредь лета счислять» не с 1 сентября, а с 1 января и не от «создания мира», а от «рождества Христова». Счет лет от рождения мифического Христа теперь принят большинством государств и называется нашей эрой (н. э.).

Который час?

В разных местах земного шара не одно и то же время: на каждом меридиане свое, местное время. На расстоянии 15° долготы разница во времени составляет ровно 1 ч. Когда во Владивостоке полдень, в Москве еще только около 6 ч утра. Такая «разновременность» вызвала серьезные неудобства в работе телеграфа и особенно железнодорожного транспорта. По какому времени рассчитывать движение поездов? Не составлять же расписание по местным временам всех станций, которые поезда проходят на своем пути.

И в каждом государстве было введено единое время: в России — петербургское, по Пулковской обсерватории, во Франции — по Парижской, в Англии — по Гринвичской (близ Лондона). Но в каждом городе все же оставалось свое, *местное* время: когда в Москве, например, наступал полдень, в Иркутске было уже 4 ч 26 мин 42 с. На циферблатах в разных городах в один и тот же момент не только часовые, но минутные и секундные стрелки располагались по-своему. Этому разнобою был положен конец после введения *поясного* времени.

Поверхность земного шара по числу часов в сутках была разделена на 24 пояса меридианами, отстоящими один от другого на 15°. Внутри каждого пояса для всех пунктов установлено единое время, а именно местное время того меридиана, который проходит посредине этого пояса.

Начальным, или нулевым, поясом условились считать тот, посредине которого проходит нулевой — гринвичский меридиан. К этому поясу с востока примыкает 1-й пояс. Здесь все часы показывают ровно на 1 ч больше, в следующем, 2-м поясе — на 2 ч больше, в 3-м — на 3 и т. д. Время каждого пояса отличается от соседних только на 1 ч, а минуты и секунды во всех поясах одинаковы: когда в Москве, например, 7 ч 10 мин 13 с, в Париже и Лондоне (они в одном поясе) — 5 ч 10 мин 13 с, во Владивостоке — 14 ч 10 мин 13 с и т. п. Вместо множества местных времен, какое раньше было в каждом государстве, теперь почти на всем земном шаре только 24 местных времени.

В СССР поясное время было введено с 1 июля 1919 г. При этом границы поясов для удобства установлены не только по меридианам, а вдоль русл рек или по границам областей. Москва должна быть в 3-м поясе, а включена во 2-й, как Ленинград. Чукотский полуостров полностью входит в 12-й пояс, граница которого совпадает с Государственной границей СССР. Здесь «рождается» каждый день и число месяца — новая дата для всего мира. Когда в нулевом — гринвичском поясе полдень, например, 31 декабря, на Чукотке уже полночь, наступает 1 января — Новый год. А на противоположной стороне Берингова пролива, отделяющего СССР от Америки, в этот момент только час ночи на 31 декабря (см. карту часовых поясов).

В Беринговом проливе между Чукоткой и Аляской есть два скалистых острова Диомида. На большем из них (он носит имя Ратманова, участника первой русской кругосветной экспедиции под начальством И. Ф. Крузенштерна) развевается красное знамя с Гербом СССР, на меньшем — острове Крузенштерна — звездно-полосатый государственный флаг США. Перелетев или переплыв несколько километров от советского острова к американскому, можно попасть... во вчерашний день.

От Берингова пролива до Антарктиды проходит международная граница смены дат, разделяющая просторы Тихого океана. Эта условная линия (на карте она показана пунктиром) установлена для того, чтобы не было путаницы в счете дней недели и чисел месяцев.

Теперь на судах, пересекающих Тихий океан с востока на запад (от Америки к Азии), пропускают в календаре одни сутки и считают, например, после понедельника 31 декабря сразу среду 2 января. На судне, идущем в противоположном направлении, наоборот, дважды считают один и тот же день.

Поясное время очень удобно. При этом в расписаниях железнодорожного, водного, воздушного транспорта, а также в телеграммах часы и минуты у нас указываются по московскому времени, в странах Центральной Европы — по так называемому среднеевропейскому, в Англии — по гринвичскому.

В СССР для экономии электроэнергии поясное время всюду передвинуто на один час вперед. Такой счет времени введен у нас по декрету Советского правительства с 1930 г. и называется *декретным*. Москва, например, относится к 2-му поясу, а живет по времени 3-го пояса. И движение поездов, а также отметки часа и минут на телеграфных бланках по всей территории СССР производятся по московскому декретному времени.

Отвечая на вопрос: «Который час?» — мы говорим о декретном времени. Но не следует забывать и о двух других «видах» времени — поясном и местном.

Изучение Вселенной при помощи космонавтики

Законы движения искусственных небесных тел

Физика и астрономия указали на принципиальную возможность выхода человека в космос при помощи искусственных небесных тел, посылаемых с Земли с огромными скоростями.

Принцип технической возможности развить огромные скорости, необходимые для запуска искусственных небесных тел, — принцип ракетного движения — был разработан нашим великим соотечественником К. Э. Циолковским (1857—1935).

В конце XVII в. Ньютон сформулировал закон всемирного тяготения — основной закон, которому подчиняется движение всех небесных тел. В свободном орбитальном полете, т. е. в полете по своей орбите без двигателей, космические ракеты и спутники, т. е. искусственные небесные тела, полностью подчиняются законам *небесной механики*. (Раздел астрономии, изучающий весь комплекс законов движения небесных тел, называется небесной механикой. О ней рассказывается в статье «Закон всемирного тяготения». О реактивном движении и о технике космических полетов будет рассказано в томах 3 и 5 ДЭ.) Поэтому теория движения искусственных небесных тел целиком опирается на результаты изучения движения небесных тел вообще.

Всем нам по опыту известно, как ведет себя брошенный камень — он падает на Землю под действием притяжения Земли. Ну а если не бросать камень, а выстрелить из пушки вертикально вверх? Когда вся энергия, полученная снарядом при выстреле, будет израсходована на преодоление земного тяготения, снаряд остановится и начнет падать обратно. Законы «бросания» тел изучает *баллистика*. Одна из основных задач баллистики заключается в том, чтобы найти такой угол наклона ствола орудия, при котором, при прочих равных условиях, дальность выброшенного орудием снаряда будет наибольшей.

Но можно сделать и так, что снаряд не упадет на Землю. Давайте проследим за полетом снаряда, выброшенного из орудия, ствол которого расположен наклонно к линии горизонта.

Небесная механика утверждает, что под действием сил тяготения одно тело описывает относительно другого одну из трех кривых — эллипс, параболу или гиперболу. Так, например, все планеты обращаются вокруг Солнца по эллипсам, причем само Солнце располагается в одном из фокусов эллиптической орбиты планеты. Так же и в системе «Земля — снаряд» центр Земли будет всегда в одном из фокусов эллипса, по которому движется снаряд. Поэтому если выстрелить наклонно, то чем больше будет увеличиваться скорость, тем все дальше и дальше будет падать снаряд. Чем больше будет его скорость (до некоторого предела), тем больший эллипс он опишет

в пространстве, но на обратном пути к точке бросания он обязательно должен пройти «сквозь Землю», так как может двигаться только по эллиптической траектории, часть которой всегда проходит внутри Земли.

Итак, при наклонном выстреле снаряд в любом случае должен упасть на Землю. Попробуем теперь установить наше орудие на горе и стрелять горизонтально (для простоты мы не будем учитывать сопротивление земной атмосферы и вращение Земли). При небольших скоростях снаряды, двигаясь по эллипсу, будут падать на Землю. Но чем больше начальная скорость снаряда, тем больше эллипс будет приближаться к окружности с центром в центре Земли. При скорости, которую принято называть первой космической или круговой, снаряд уже не упадет на Землю, а, если мы успеем убрать орудие, пролетит с той же скоростью через точку выстрела и будет бесконечно обращаться вокруг Земли по круговой орбите, т. е. станет искусственным спутником Земли.

Первая космическая скорость у поверхности Земли составляет примерно 7,9 км/с. Такую огромную скорость не может сообщить снаряду ни одна пушка — это под силу только ракетам, как было доказано К. Э. Циолковским. Он явился основоположником теории полетов за пределами Земли.

Дальнейшее увеличение скорости будет вытягивать окружность в эллипсы, с той только разницей, что второй фокус каждого эллипса будет перемещаться все дальше и дальше от центра Земли в сторону, противоположную направлению бросания. Современные ракеты сообщают космическим аппаратам нужные начальные скорости движения.

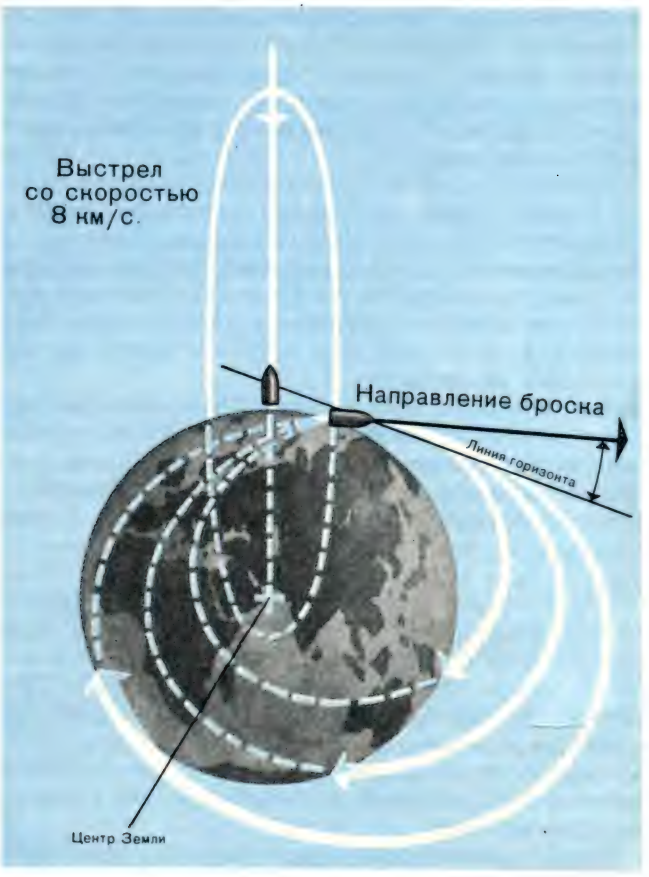
При скорости 11 км/с тело удалится на расстояние больше половины расстояния до Луны, а при скорости 11,1 км/с тело залетит за орбиту Луны и снова вернется к Земле.

При дальнейшем увеличении скорости до 11,2 км/с эллиптическая орбита «разорвется» и превратится в разомкнутую кривую — параболу, по которой космический аппарат навсегда покинет Землю. Скорость 11,2 км/с называется второй космической скоростью, или параболической, или скоростью отрыва.

Космический аппарат, получивший такую скорость на поверхности Земли, покинет ее навсегда как при вертикальном, так и при наклонном или горизонтальном полете. При такой скорости в любом случае орбита не будет эллипсом.

Если еще больше увеличить скорость, космический аппарат полетит уже по кривой, называемой гиперболой, причем чем выше скорость, тем шире будет «раскрываться» гипербола. Но, превысив вторую космическую скорость и преодолев земное притяжение, космический аппарат все же останется в Солнечной системе. Он превратится в спутника Солнца — искусственную планету — и будет обращаться вокруг него по эллиптической орбите.

Если выстрелить снаряд наклонно или вертикально к земной поверхности, он всегда упадет на Землю.



Первым таким спутником Солнца стала советская космическая ракета «Луна-1», стартовавшая 2 января 1959 г. по направлению к Луне. Аппарат удалялся от Земли по гиперболической орбите. Через 5—6 сут он вышел из зоны действия земного притяжения, и его полет всецело стал определяться притяжением Солнца. Скорость, которую имел аппарат, была недостаточной, чтобы преодолеть притяжение Солнца, и он стал обращаться вокруг Солнца по эллипсу. Его вытянутая орбита располагается между орбитами Земли и Марса.

Какие же основные закономерности характеризуют движение тел по эллиптическим орбитам? Ответ на этот вопрос также дает небесная механика.

Наблюдения астрономов за движением планет дали возможность немецкому ученому Кеплеру в начале XVII в. сформулировать три закона

движения тел в Солнечной системе (см. ст. «От Коперника до Ньютона»). Законы Кеплера являются следствием более общего закона природы — закона всемирного тяготения, который составляет основу небесной механики. Они позволяют полностью определить орбиту планеты.

Простейшая задача небесной механики называется задачей двух тел. Что же требуется решить в этой задаче? А вот что. Если известны массы двух тел, их скорости в какой-то момент времени, а также взаимное расположение, то нужно найти положение этих двух тел в пространстве в любой момент времени, т. е. рассчитать, как будут двигаться два таких тела в пространстве.

Ньютон решил эту задачу. Он математически доказал, что если любое тело (не обязательно Солнце) считать неподвижным, то другое тело под действием их взаимного тяготения, в зависимости от начальных условий задачи (масс, скоростей и расположения), будет двигаться относительно его по эллипсу (или окружности), параболе или гиперболе.

В Солнечной системе, например, взаимное притяжение планет ничтожно мало по сравнению с притяжением их Солнцем, поэтому можно считать, конечно только приблизительно, что любое тело Солнечной системы притягивается только Солнцем и движется по эллипсу. Небольшие отклонения в движении планет от движения, точно соответствующего законам Кеплера, конечно, есть, но учесть их чрезвычайно трудно.

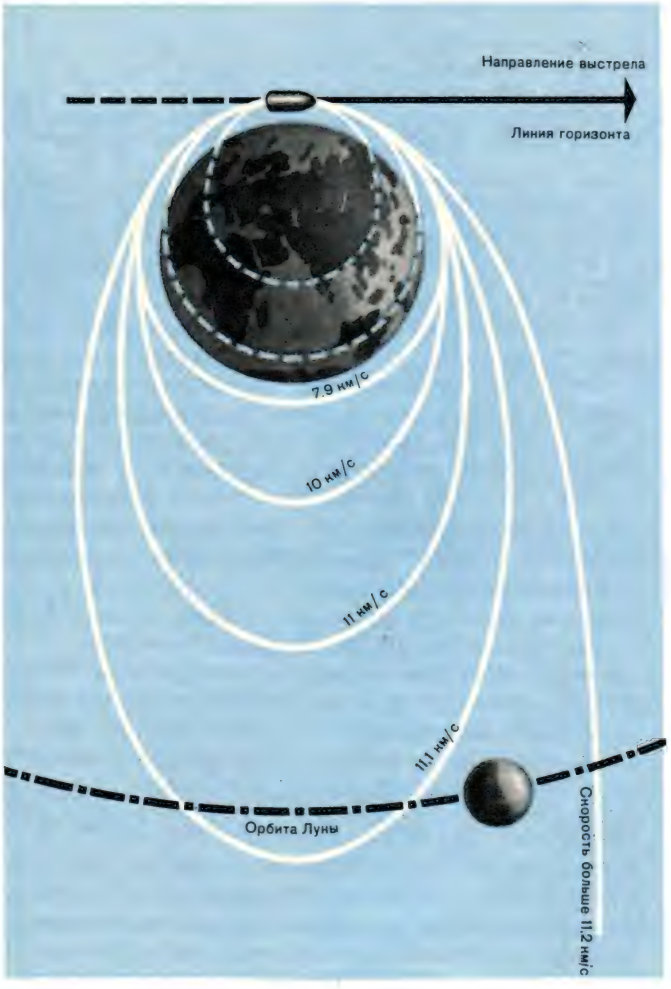
Масса любого космического аппарата ничтожно мала по сравнению с массой Земли и Луны (или Солнца). И это позволяет произвести достаточно точный расчет его орбиты. Как выглядят такие орбиты, можно представить себе на примерах трасс полетов в район нашего спутника. Посланный в район Луны космический аппарат притянется ею, обогнет ее и снова вернется к Земле, описав в пространстве замысловатую восьмерку. Для такой траектории необходимо, чтобы, во-первых, космический аппарат прошел на определенном, достаточно близком расстоянии от Луны и, во-вторых, в момент сближения с Луной обладал вполне определенной, сравнительно малой скоростью. Но если пролетать мимо планеты, например Марса или Венеры, на «почтительном» расстоянии, где сила притяжения планеты сказывается незначительно, то орбиты относительно Солнца будут представлять собой эллипсы, размеры которых определяются скоростью при взлете с Земли.

Для полета на Марс, как и на любую другую планету, наиболее выгодной и простой является эллиптическая траектория, касательная к орбите планеты. В этом случае скорость отлета с Земли минимальна (11,6 км/с), минимальна и скорость, с которой ракета подойдет к Марсу (5,7 км/с). Последнее немаловажно в случае посадки на Марс, так как меньше будет израсходовано топлива для торможения двигателями ракеты. Но за экономию топлива приходится платить временем. Такой полет будет длиться 259 сут, т. е. 8,5 мес. Если сократить срок полета до 5 мес, то необходимо будет развить скорость отлета с Земли до 14,3 км/с, а при 4 мес полета начальная скорость должна составлять 15,9 км/с. По кратчайшей траектории полет к Марсу продлился бы 85 сут, но вначале разогнать корабль нужно было бы до скорости 39 км/с.

Первые полеты космонавтов скорее всего пройдут по другим траекториям, ведь нужно не только достичь района Марса, но и вернуться обратно на Землю. Облетев планету по наивыгоднейшей траектории и возвратившись к точке старта, космический корабль не застанет Землю на том же месте — она уйдет на значительное расстояние по своей орбите. При достаточном запасе горючего и ресурсов для жизнеобеспечения при полете к Марсу можно дождаться благоприятного времени для обратного старта на самой планете или на околомарсианских орбитах. Но существуют и простейшие облетные траектории, при которых космический корабль «на обратном пути» сблизится с Землей за сравнительно небольшое время.

Можно облететь Марс за 2 года. Для этого потребуется начальная скорость 12,3 км/с. Если же увеличить скорость еще на 3,9 км/с, то можно сократить срок облета до одного года.

Трудно предугадать, какой вариант будет выбран при первом полете человека к Марсу. Будет ли это просто пассивная облетная траектория, полет по наивыгоднейшей траектории с «ожиданием» на орбите около Марса (или на самом Марсе) и возвращение опять по наивыгоднейшей касательной траектории, либо полет по наивыгоднейшей траектории «туда» и старт обратно с большим расходом топлива для сокращения общего времени полета, либо какая-нибудь другая комбинация из возможных траекторий — все будет зависеть от того, что к тому времени окажется более разумным: использовать полетную массу корабля для обеспечения жизнедеятельности экипажа в течение года-двух (а может быть, и более) и расходовать минимальное количество горючего на обратный старт и маневры у планеты либо взять на борт максимум горючего, что позволит за счет активных маневров и переходов на различные траектории сократить время полета до нескольких месяцев. Очевидно, ученые и инженеры выберут «золотую середину».



Только пустив ракету параллельно земной поверхности, можно вывести ее на орбиту и сделать спутником Земли.

Орбита первого искусственного спутника Солнца.

А теперь несколько примеров для любителей математики.

Каждому, очевидно, интересно знать: почему нужно сообщить телу скорость именно 8 км/с, чтобы оно стало спутником Земли? Почему при скорости 11,2 км/с ракета может вырваться из оков земного тяготения?

Посмотрим, как рассчитываются эти скорости.

Мы уже говорили, что основой небесной механики является закон Ньютона. Математически он выражается так:

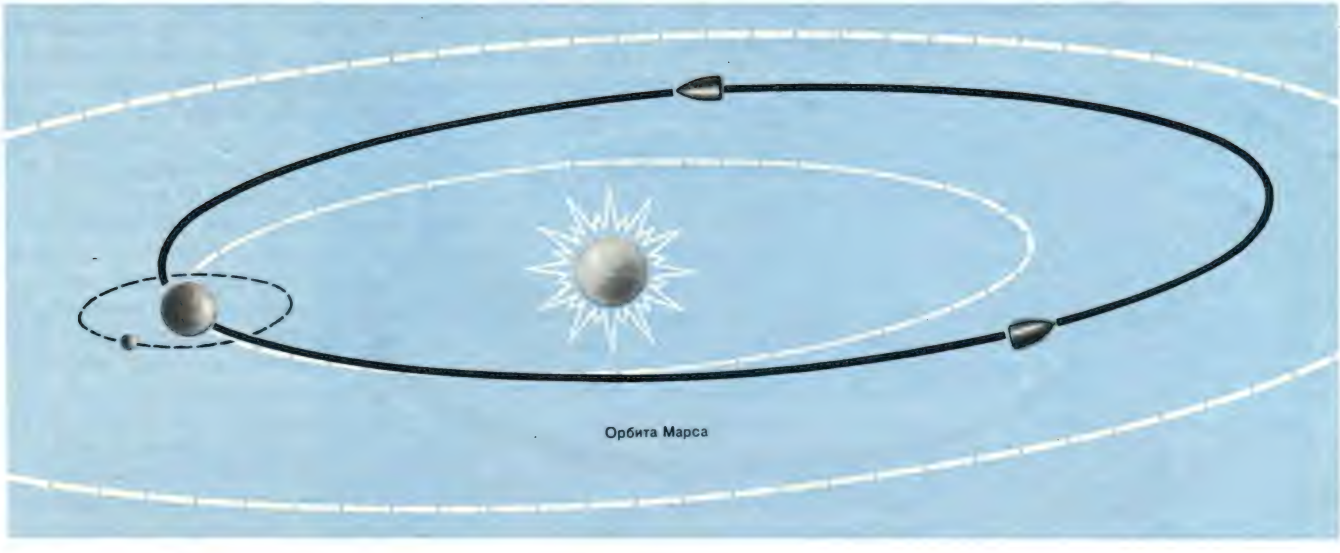
$$F = f\frac{m_1 m_2}{r^2},$$

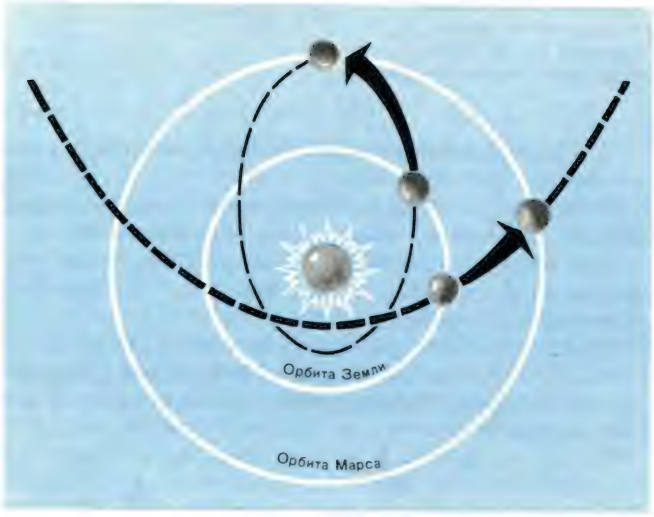
где m_1 и m_2 — массы двух тел, r — расстояние между ними, f — коэффициент пропорциональности.

Для случаев, когда одно тело имеет массу m_2, пренебрежимо малую по сравнению с массой m_1 центрального тела (Земли, Солнца), принято вводить коэффициент $K = m_1 f$, тогда $F = m_2\frac{K}{r^2}$. Для Земли этот коэффициент поля тяготения равен $K_З = 3{,}9 \cdot 10^5$ км^3/с^2, для Солнца $K_С = 132{,}3 \cdot 10^9$км^3/с^2.

Чтобы тело стало искусственным спутником Земли и могло, не снижаясь, обращаться вокруг Земли по круговой орбите, необходимо приравнять центростремительное ускорение $\frac{v^2}{r}$ к ускорению тяготения. Тогда $\frac{v^2}{r} = \frac{K}{r^2}$. Умножив обе части равенства на r, получим: $v^2 = \frac{K}{r}$.

Подставив значение K, равное $K_З$, и радиуса Земли $r = 6371$ км, получим величину круговой скорости,





Возможные пути полета на Марс. Стрелками показаны траектории полетов и их протяженность, пунктирными линиями — остальная часть орбиты.

при которой тело будет удерживаться на круговой околоземной орбите:

$$v_{кр} = \sqrt{\frac{3{,}9 \cdot 10^5}{6371}} = 7{,}91 \text{ км/с}.$$

Если мы подставим вместо K значение $K_з$, а вместо r расстояние от Земли до Солнца (принятое здесь за 149 600 000 км), то получим скорость, с которой Земля должна вращаться вокруг Солнца, чтобы удержаться на своей орбите:

$$v_{кр} = \sqrt{\frac{132{,}3 \cdot 10^6}{149{,}6 \cdot 10^6}} = 30 \text{ км/с}.$$

Именно с такой скоростью наша Земля движется вокруг Солнца.

Первая космическая скорость, точнее ее теоретическое значение, рассчитана нами для высоты полета над Землей, равной нулю, т. е. у поверхности Земли.

При высоте полета, например, $h=500$ км в формулу вместо r придется подставить $r=r_0+h$ (где r_0 — радиус Земли). В этом случае $v_{кр}=7{,}61$ км/с.

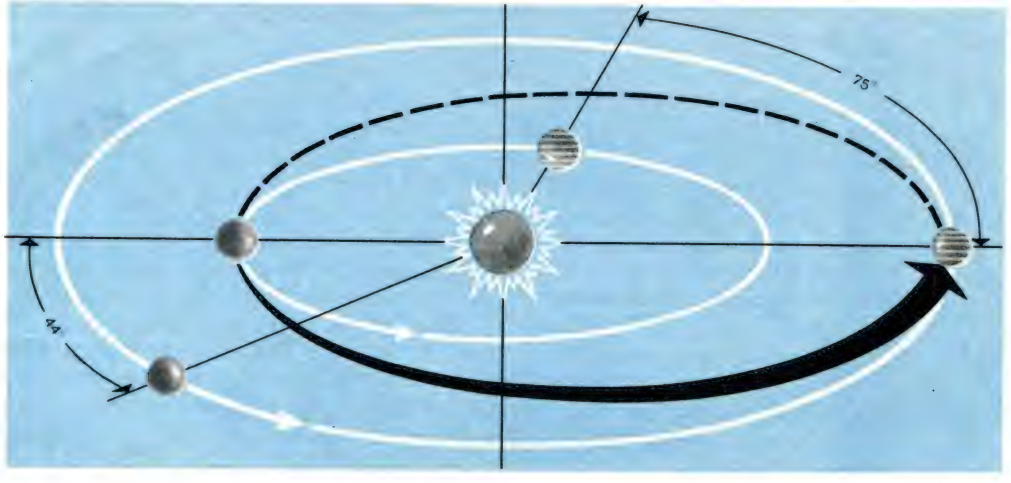
При увеличении высоты орбиты скорость движения постепенно убывает, стремясь в бесконечности к нулю. На высоте 384 тыс. км, т. е. на орбите Луны, $v_{кр}=1$ км/с. Это и есть средняя скорость движения Луны на ее орбите вокруг Земли.

Но для того чтобы запустить искусственный спутник, нужно затратить на подъем какую-то энергию и, кроме того, сообщить ему необходимую круговую скорость. Хотя круговая скорость с высотой уменьшается, энергия, затрачиваемая на подъем, растет. Поэтому общий расход энергии на подъем и разгон ракеты с высотой растет. Этот расход энергии принято характеризовать так называемой *характеристической скоростью*. Определяется она следующей формулой:

$$v_x = v_{кр_0}\sqrt{2-\frac{r_0}{r}}$$

где $v_{кр_0}$ — круговая скорость у поверхности Земли, r_0 — радиус Земли, r — расстояние от центра Земли до орбиты искусственного спутника Земли.

Минимальное значение v_x принимает при $r=r_0$. Тогда $v_x=v_{кр_0}$, так как никаких затрат энергии на подъем не требуется. Максимальное значение v_x получается при $r=\infty$ (бесконечности). В этом случае $v_x=11{,}2$ км/с, т. е. тело, получившее такую скорость у поверхности Земли, удалится от нее на бесконечно большое расстояние — навсегда покинет Землю. Это и есть вторая космическая скорость — скорость отрыва. Используя описанную астрономическую теорию и гениальную идею Циолковского о получении космических скоростей при помощи ракет, во второй половине нашего века люди начали изучение и освоение космоса при помощи запусков космических аппаратов.



Траектория полета с Земли на Марс.

Астрономия из космоса

Темп космических достижений человечества в последнее десятилетие впечатляющ: первый искусственный спутник Земли создан в 1957 г., а первый человек высадился на Луну уже в 1969 г.! Многие разделы науки и техники шагнули за эти годы далеко вперед, однако в астрономии произошла настоящая революция: она действительно стала космической наукой.

Откуда же этот взрыв новых открытий? Так ли уж астрономы нуждались в средствах космической техники для установки на них астрономических приборов?

Астрономия всегда была наблюдательной наукой: она исследовала окружающий мир, анализируя излучение небесных объектов. Однако земная атмосфера сильно ограничивает возможности астрономов. Атмосфера прозрачна лишь в двух участках электромагнитного спектра. Шкала электромагнитных волн, используемых для наблюдений, простирается от длинных километровых радиоволн до жестких рентгеновских лучей и гамма-лучей. Атмосфера до поверхности Земли прозрачна лишь в узком оптическом окне и в радиодиапазоне от 1 см до 10 м. В ультрафиолетовой области она непрозрачна из-за слоя озона (O_3) на высотах 25—70 км, а в более коротковолновой области спектра — из-за молекулярного кислорода, а затем атомарного кислорода и молекулярного азота.

В радиодиапазоне атмосфера непрозрачна по другой причине. Дело в том, что на высотах от 100 км и выше атмосфера становится ионизованной: некоторые ее атомы и молекулы теряют свои электроны. Эта часть верхней атмосферы называется ионосферой. В ней помимо электронов в равном количестве находятся ионы, т. е. атомы, потерявшие электрон. Благодаря свободным электронам ионосфера отражает радиоволны, приходящие извне, и поэтому исследования в области длин волн, превышающих 10 м, невозможны.

В инфракрасной области спектра, а также в диапазоне между инфракрасным излучением и радиоизлучением поглощение определяется молекулами воды (до высоты 20 км), углекислого газа (до 70 км) и озона. Таким образом, для исследований во всем диапазоне электромагнитных волн необходимо поднять аппаратуру на высоты 100—150 км.

Другая причина, мешающая наблюдениям с Земли,— неоднородность атмосферы. Из-за нее изображение звезды размывается в диск, угловой диаметр которого в самом лучшем случае около секунды дуги. Размываются детали Луны и планет, ограничивая разрешающую силу гигантских телескопов. А если наблюдать за ними вне атмосферы, то угловое разрешение телескопа будет определяться лишь его диаметром D и длиной волны λ, в которой проводятся наблюдения ($\Delta\varphi = \frac{\lambda}{D}$ радиан, или $\Delta\varphi = 206265\frac{\lambda}{D}$ с дуги).

Это ограничение связано с волновыми свойствами света. Из-за атмосферного дрожания предельное разрешение достигается у телескопа диаметром всего 10 см. Большие телескопы с диаметром главного зеркала несколько метров строят лишь потому, что они позволяют собирать больше света от слабых астрономических объектов, тогда как их разрешение находится на уровне любительских 10-сантиметровых телескопов.

Наконец, существуют астрономические задачи, решить которые в принципе невозможно без средств космической техники. Например, с Земли нельзя взглянуть на обратную сторону Луны, нельзя изучить поверхность Венеры, покрытую многокилометровым слоем плотных облаков, и т. д.

Вот причины, по которым астрономы с таким энтузиазмом взялись за космические исследования. Отметим еще, что эти исследования часто перестают быть астрономическими, смыкаясь с геофизикой, геологией, метеорологией и другими вполне земными науками.

Здесь будет рассказано в основном об астрономических результатах. Данные о планетах, полученные с помощью космических аппаратов, читайте в статьях «Луна», «Планеты Солнечной системы».

Исследования в ультрафиолетовой части спектра

Ультрафиолетовое излучение простирается от нескольких десятков нанометров (1 нм=10^{-9} м) вплоть до 300 нм. Впервые ультрафиолетовое излучение от Солнца было зарегистрировано в 1946 г. с помощью ракет. С тех пор спектр Солнца в ультрафиолетовой области исследован детально. В этой области сосредоточена всего одна миллионная доля энергии, излучаемой Солнцем, однако именно ее воздействие на верхнюю атмосферу Земли приводит к нагреву, ионизации и распаду молекул на атомы. В видимой части спектр Солнца непрерывный, и его интенсивность плавно уменьшается с уменьшением длины волны. Непрерывный спектр Солнца возникает на уровне видимой поверхности Солнца — фотосферы. Здесь же возникают линии поглощения в спектре, узкие и сравнительно темные, принадлежащие раз-

личным атомам, например водорода, железа, алюминия, натрия, кальция и т. д. — практически всех элементов периодической системы элементов Менделеева. Так как температура фотосферы около 6000 К, то максимум ее излучения лежит в видимой части спектра и при переходе к ультрафиолетовой области интенсивность резко падает. Примерно около 150 нм непрерывный спектр уменьшается практически до нуля и в более коротковолновой области наблюдаются только линии излучения. Связано это явление с тем, что верхняя атмосфера Солнца горячее фотосферы. Вблизи поверхности фотосферы, в хромосфере, температура достигает нескольких десятков тысяч градусов, а еще выше, на расстоянии 100 000 и более километров, в солнечной короне, она равна 1 МК.

Почти все распространенные в короне атомы (водорода, гелия, кислорода) полностью ионизованы. Иначе говоря, они потеряли все свои электроны, и остались лишь «оголенные» ядра, которые, конечно, не могут излучать спектральные линии.

В солнечной короне светятся многократно ионизованные ионы железа, никеля, магния, неона и т. д. Отдельные линии этих ионов и создают ультрафиолетовый спектр Солнца.

Между короной, простирающейся на миллионы километров, и хромосферой, имеющей толщину около 20 тыс. км, расположена узкая переходная область в несколько тысяч километров, где температура быстро возрастает от 10 кК до 1 МК. Здесь также возникают многие линии ультрафиолетовой области, например линия ионизованного гелия с длиной волны 30,4 нм. Самая яркая линия в ультрафиолетовом спектре Солнца принадлежит водороду и имеет длину волны 121,6 нм.

Спектр солнечной короны простирается и в рентгеновскую область, однако его интенсивность резко изменяется в зависимости от взрывных процессов, протекающих в хромосфере и короне. Суммарная интенсивность солнечного рентгеновского спектра в области короче 10 нм изменяется в сотни раз.

Помимо спектра Солнца в ультрафиолетовой и рентгеновских областях получены превосходные фотографии диска Солнца в различных линиях атомов и ионов. Фотографии в линиях высокоионизованных атомов очень похожи на фотографии солнечной короны, получаемые в видимых лучах во время полных солнечных затмений. Однако в далекой ультрафиолетовой области, где фотосфера не излучает, можно исследовать корону прямо на диске Солнца.

Начаты исследования и ультрафиолетового спектра звезд. Эта задача неизмеримо труднее, так как для таких наблюдений требуется поднять за пределы атмосферы телескоп и навести его с высокой точностью (до 1″ дуги) на исследуемую звезду. Уже сделаны первые открытия в этой области. Например, обнаружено, что горячие звезды-гиганты, температура поверхности которых около 30 000 К, выбрасывают газ со скоростью около 1000 км/с, теряя, таким образом, массу, равную солнечной за миллионы лет. В ультрафиолетовой области спектра горячих звезд лежит его максимум, а межзвездный холодный водород образует широкую линию поглощения с длиной волны 121,6 нм. Исследуя эту линию в спектрах горячих звезд, можно определить концентрацию нейтрального атомарного водорода в межзвездном пространстве между звездой и наблюдателем.

Недавно в ультрафиолетовой области были обнаружены линии поглощения и молекулярного водорода.

Получены первые ультрафиолетовые спектры других галактик, а также квазаров — самых удаленных и самых старых объектов во Вселенной, отстоящих от нашей Галактики на миллиарды световых лет.

Исследования в области рентгеновского излучения

Первые рентгеновские исследования с помощью ракет были выполнены в 1962 г., хотя рентгеновское излучение Солнца исследуется учеными уже 20 лет.

С помощью специальных счетчиков уже открыто более 120 источников рентгеновского излучения. Некоторые из них, по-видимому, нейтронные звезды, совсем непохожие на обычные, типа нашего Солнца. При массе, примерно равной солнечной, диаметр нейтронной звезды всего около 10 км. Плотность ее вещества около 100 млн. т/см^3. При давлении, господствующем в недрах нейтронных звезд, электроны, оторванные от атомов, соединяются с ядрами водорода (протонами) так, что звездное вещество переходит в нейтронное состояние. Температура такой звезды может достигать 10 МК, причем максимум излучения приходится на рентгеновскую область спектра.

Открыты и другие типы рентгеновских источников, например облака межзвездного газа, нагретые примерно до 1 МК. Спектр таких источников бывает непрерывным, с наложением линий высокоионизо-

ванных атомов. Обнаружено рентгеновское излучение и от других галактик, а также от квазаров.

Рентгеновские исследования переживают сейчас пору юности. Радиоастрономия находилась примерно в таком же состоянии лет 20 назад, когда число радиоисточников было невелико. В настоящее время размер рентгеновских счетчиков уже достиг квадратного метра, а лет через пять — десять будут построены счетчики размером 10×10 м, превосходящие нынешние по площади в 100 раз и более. Тогда будут открыты тысячи рентгеновских источников и рентгеновская астрономия займет свое место среди равных по значению областей астрономии: оптической, инфракрасной и радиоастрономии.

Начаты исследования и в области γ-лучей, давшие первые интересные результаты.

Пожалуй, наиболее таинственной областью останется спектр между инфракрасной частью и короткими (миллиметровыми) радиоволнами. В то же время есть основание полагать, что эта область очень интересна — многие объекты имеют в этой области максимум излучения. Трудности освоения этой новой области крайне велики: аппаратуру нужно помещать на спутниках, а приемники излучения для этой области требуют охлаждения жидким гелием с температурой 4 К (≈ -269°С), а иногда и весь телескоп, включая зеркало, необходимо помещать в сосуд с жидким гелием.

Вся эта техника чрезвычайно сложна и дорога, однако перспективы очень заманчивы, так что можно полагать, что в ближайшие годы мы будем свидетелями успехов и в этой новой, пока еще не освоенной области спектра.

Явления в околоземном космическом пространстве

Космические межпланетные станции помогли лучше понять свойства околоземного космического пространства. Магнитное поле вокруг Земли простирается по крайней мере до расстояния 60 000 км от ее центра. Силовые линии земного магнитного поля расположены так, как если бы Земля была однородным намагниченным шаром или как будто внутри Земли помещен намагниченный стержень — диполь, смещенный относительно центра примерно на 400 км в сторону точки на поверхности с координатами 15,6° с. ш., 150,9° в. д. (вблизи Марианских островов). Ось диполя не совпадает с осью вращения Земли, так что геомагнитные полюсы не совпадают с географическими. У поверхности Земли на поле диполя налагаются поля других источников, например магнитных руд.

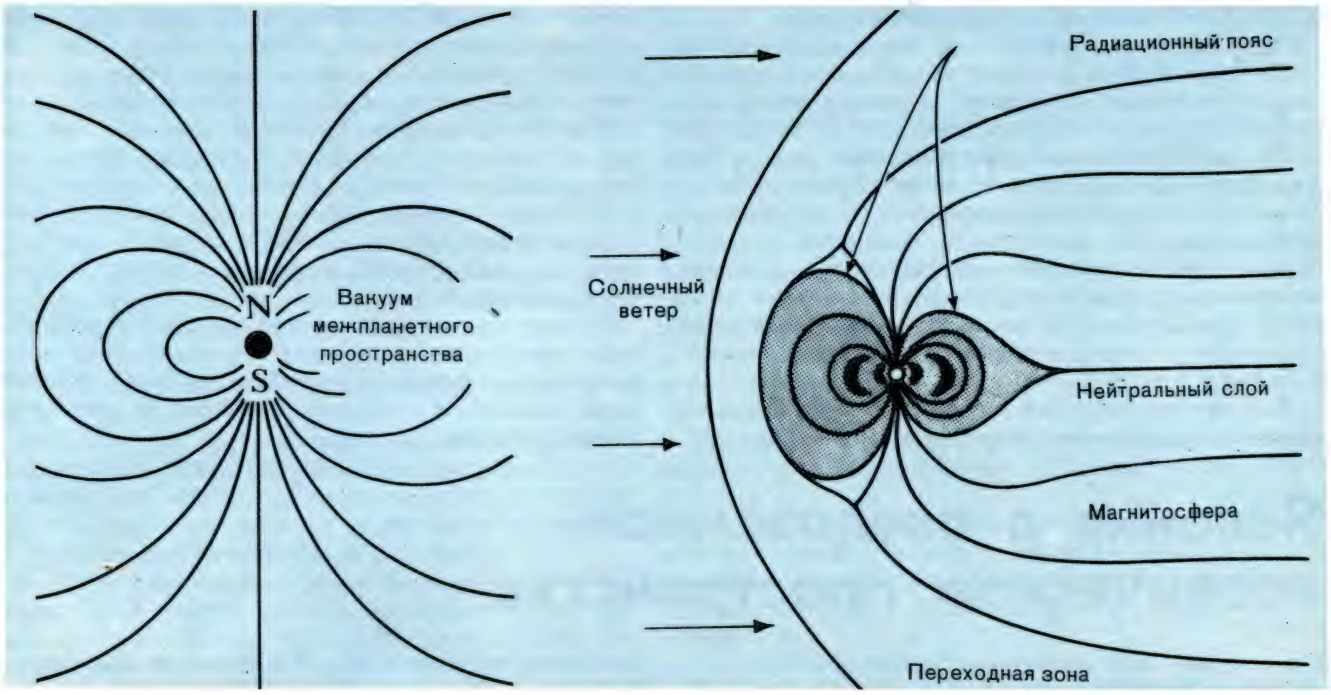
Другие неоднородности обнаруживаются над большими участками земной поверхности и, по-видимому, вызваны источниками, расположенными глубоко в недрах Земли. Главное геомагнитное поле скорее всего вызвано электрическими токами в жидком металлическом ядре Земли, возникающими в результате конвекции в нем. При измерении грубыми методами геомагнитное поле кажется постоянным, однако более чувствительные измерения показывают, что оно непрерывно меняется по величине и направлению. Наблюдаются слабые вариации с периодом в несколько лет, суточные вариации и быстрые колебания, период которых составляет всего несколько минут и даже доли секунды. Амплитуда большинства этих изменений очень невелика — доли процента от поля на поверхности Земли.

Очень большие возмущения геомагнитного поля (до 1—2%) называются магнитными бурями. Источниками геомагнитных возмущений являются электрические токи, которые возникают вокруг Земли — в ее ионосфере и на границе геомагнитного поля.

Всего 10—20 лет назад думали, что межпланетное пространство представляет собой вакуум и что магнитное поле Земли остается упорядоченным вплоть до расстояний во много сотен тысяч километров (см. рис.). Как выяснили приборы, посылавшиеся на ИСЗ и межпланетных станциях, межпланетное пространство наполнено ионизованным газом, вытекающим из Солнца, который теперь называют солнечным ветром. Солнечный ветер «отдувает» силовые линии геомагнитного поля так, что образуется «хвост», который направлен (как и хвосты комет) от Солнца и простирается на большие расстояния. На рисунке показан общий вид магнитного поля Земли, обтекаемого солнечным ветром. Та область пространства, где геомагнитное поле преобладает над межпланетным, называется *магнитосферой*. Внешняя граница магнитосферы, где происходит переход от геомагнитного к межпланетному полю, называется *магнитопаузой*.

Магнитное поле Земли по представлениям ученых 10—20 лет назад.

Общий вид магнитного поля Земли по современным представлениям.



Геомагнитное поле действует как ловушка, которая удерживает множество заряженных частиц — протонов и электронов — самых разных энергий. Эти частицы называются захваченными. Область захваченных частиц на рисунке выделена тоном. Отдельно показаны так называемые внутренний и внешний пояса радиации (на рисунке они имеют вид темных серпов). Эти названия сохранились с момента их открытия, когда аппаратура, поднятая на спутнике, впервые зарегистрировала заряженные частицы в этих двух поясах. Во всей этой области движутся частицы самых разных энергий, так что искусственные спутники, проходящие через нее, «попадают под облучение». При планировании полетов космических кораблей с человеком на борту эта так называемая радиационная опасность всегда принимается во внимание.

Сразу после открытия поясов радиации их стали тесно связывать с давно уже известным, но до сих пор полностью не объясненным явлением — полярными сияниями. Термин «полярные сияния» включает в себя множество разных явлений: свечение атмосферы (яркие, подвижные формы, имеющие вид полос, дуг, занавесей, лучей, вспыхивающих пятен), геомагнитные возмущения, мерцание радиозвезд, рентгеновское излучение и радиоизлучение и др. Ясно, что в основном все эти явления вызваны потоками заряженных частиц, протонов и электронов, проникающих в верхнюю атмосферу Земли. Верхняя атмосфера светится под ударами быстрых электронов так же, как экран телевизора. Чаще всего полярные сияния происходят на высотах около 100 км. Наименьшая высота появления полярных сияний — 60 км. Отдельные лучистые формы простираются до высот 1000 км.

Совершенно точно установлено, что возникновение полярных сияний связано с явлениями на Солнце. За день или больше до появления мощных полярных сияний неизменно наблюдается повышенная солнечная активность. То, что полярное сияние и геомагнитная буря опаздывают на сутки относительно солнечной вспышки, показывает, что возмущение переносится заряженными частицами, которые движутся сравнительно медленно, а не электромагнитным излучением, распространяющимся со скоростью света. Слабые полярные сияния происходят непрерывно, т. е. все время существует какая-то возмущающая причина, действие которой усиливается с увеличением солнечной активности. Вероятной причиной являются порывы солнечного ветра. До сих пор не вполне ясно, каким образом солнечный ветер передает возмущение в глубь атмосферы Земли, вплоть до высот 100 км. До момента открытия радиационных поясов вокруг Земли считалось, что потоки

заряженных частиц с Солнца, имеющие вид узких направленных струй, непосредственно вторгаются в земную атмосферу, а не «действуют через посредника».

Однако такие теории, хотя и объясняли многие особенности явления, сталкивались с рядом неразрешимых трудностей. После открытия радиационных поясов стали считать, что проблема полярных сияний решена. Была предложена модель «дырявого ведра», в которой утверждалось, что временами под действием каких-то причин, связанных с солнечной активностью, геомагнитная ловушка становится менее прочной, заряженные частицы просачиваются через нее и вдоль соответствующих силовых линий вторгаются в плотную атмосферу, что приводит к полярным сияниям. Сначала казалось, что модель «дырявого ведра» объясняет, почему сияния преимущественно происходят в двух кольцевых зонах вокруг полюсов, так как внешний пояс радиации входит в атмосферу Земли на уровне 100 км почти в этом кольце. Однако более точные измерения показали, что эти области не вполне совпадают. Кроме того, даже если истратить все частицы, содержащиеся в поясе, достаточно яркое полярное сияние можно поддерживать всего несколько минут, тогда как такое сияние может продолжаться часами. Впоследствии было установлено, что после сильных полярных сияний количество частиц в радиационных поясах возрастает так, что, по-видимому, источник, вызывающий потоки электронов и протонов в верхней атмосфере Земли, вместе с тем пополняет радиационные пояса.

О том, что это за источник, где он располагается и каков механизм его действия, есть много противоречивых гипотез, так что проблема полярных сияний и связанных с ними явлений ждет своего решения.

Перспективы покорения космоса

Космические ракеты и спутники Земли, аппараты, летавшие к Марсу и Венере, космические корабли, исследовавшие Луну, — это первые разведчики самой близкой к нам части Солнечной системы. Здесь в будущем будут летать космические корабли.

Ракеты помчатся на сближение с Солнцем, на поверхности Луны и планет уже посажены стационарные или подвижные автоматы — лаборатории. Не только планеты, но и астероиды и кометы станут скоро предметами активного изучения космическими устройствами. Пройдя сквозь хвосты комет, приборы возьмут пробу состава ее вещества и передадут результаты анализа по радио на Землю. Ракеты доставят пробы горных пород с других планет.

Человек уже побывал на Луне, а затем он полетит к другим планетам. Над Землей «повиснут» населенные орбитальные станции, выполняющие сначала роль постоянно действующих астрофизических лабораторий, затем научно-технических станций, ведущих изучение ближнего космоса, геофизические исследования Земли, проводящих медико-биологические и инженерно-технические испытания. С помощью комплексов связных и метеорологических спутников будут созданы всемирная телевизионная и радиосвязная системы и всепланетная служба погоды.

По мере увеличения размеров орбитальных станций все большее количество технических и других проблем будет находить свое разрешение в космосе. Получение высокого вакуума, столь сложное на Земле, легко и просто решается в космосе. Без сложной обработки, литьем можно получать шарообразные детали идеальной формы: шар — естественная форма жидкости в невесомости. Существует предположение, что невесомость может оказывать лечебное воздействие при некоторых болезнях.

Потом появятся орбитальные города-космодромы, где будут комплектоваться, стартовать и «причаливать» корабли дальних космических экспедиций. Возможность пополнения топливных запасов и старт с движущегося спутника увеличивают радиус действия, грузоподъемность и возможность маневров в космосе. Как в наши дни на Северном полюсе и в Антарктиде, будут организованы поселения людей на Луне, а затем на Марсе и других планетах. Это далекое будущее, но его черты мы уже реально осязаем сегодня. Затем, может быть, настанет время изучения соседних планетных систем.

Контуры столь далекого будущего пока еще неопределенны; не ясны не только технические пути обеспечения околосветовых скоростей, но и принципиальные возможности полетов на расстояния, измеряемые световыми годами. Однако техническому прогрессу нет пределов. От эпохи гипотез о строении планет и мирового пространства люди перешли к эпохе ракетно-космических исследований и полетов — дорога в космос открыта.

Исследователи Вселенной

Михаил Васильевич Ломоносов

В свое время наблюдения Галилея и других астрономов, уже имевших в своем распоряжении телескопы, подтвердили, что планеты, подобно Земле, имеют шарообразную форму. Но сходны ли другие планеты с Землей по своей физической природе, есть ли хотя бы на одной из них атмосфера, подобная земной, — это долго оставалось неизвестным. Великий русский ученый Михаил Васильевич Ломоносов (1711—1765) в начале второй половины XVIII в. доказал, что на Венере — одной из планет Солнечной системы — есть атмосфера, и, по-видимому, более плотная, чем атмосфера Земли.

Свое замечательное открытие М. В. Ломоносов сделал в 1761 г., наблюдая прохождение Венеры между Землей и Солнцем. Результаты своих наблюдений М. В. Ломоносов опубликовал в работе «Явление Венеры на Солнце, наблюденное в С.-Петербургской императорской Академии наук мая 26 дня 1761 г.».

М. В. Ломоносов был основоположником многих отраслей знаний и много сделал для развития физики, химии, геологии, минералогии. В то же время он был выдающимся поэтом, историком, филологом и одним из крупнейших астрономов своего времени.

Во времена М. В. Ломоносова учение Коперника в России уже было признано и учеными и государственной властью. Однако русская церковь еще продолжала препятствовать распространению правильных взглядов на строение Вселенной.

М. В. Ломоносов всю жизнь неустанно боролся с отсталостью и невежеством, за торжество науки. Он утверждал, что Вселенная бесконечна, а обитаемых миров в ней бесчисленное множество, что как наша Земля, так и все существующее в природе не неизменно, а непрерывно меняется и развивается.

М. В. Ломоносов был великим ученым-патриотом. В науке он видел могучую силу для улучшения жизни народа. Он прекрасно понимал, какое большое значение имеет мореплавание для нашей страны с ее большой морской границей. А для того чтобы правильно вести корабль и не заблудиться в безбрежном океане, надо точно знать широту и долготу тех мест, где проходит корабль. Поэтому М. В. Ломоносов проявлял особый интерес к созданию таких приборов, которые помогали бы морякам лучше ориентироваться в пути по звездам и с наибольшей точностью определять время. Много внимания он уделял и распространению среди моряков необходимых в морском деле астрономических знаний.

Стремясь вооружить астрономов лучшими инструментами, Ломоносов разработал конструкцию отражательного телескопа-рефлектора. У применявшихся в то время телескопов-рефлекторов, изобретенных

Ньютоном, было два зеркала. Второе зеркало, устанавливавшееся с наклоном, предназначалось для более удобного рассматривания изображений, но яркость изображения при этом ослаблялась. В телескопе Ломоносова было только одно зеркало, оно располагалось с наклоном и давало более яркое изображение предмета, так как свет не терялся при отражении от второго зеркала.

Во времена Ломоносова загадкой была физическая природа Солнца. Далеко опережая современную ему науку, Ломоносов первым из ученых обрисовал поверхность Солнца как бушующий огненный океан, в котором даже «камни, как вода, кипят».

Загадкой была и природа комет. Ломоносов высказал смелую мысль, что хвосты комет образуются под действием электрических явлений. Позднее было выяснено, что в образовании хвостов комет, действительно, участвуют потоки заряженных частиц, вылетающих с поверхности Солнца.

Ломоносов одним из первых поставил задачу постигнуть подлинную физическую природу далеких небесных тел — Солнца, планет, комет, бесконечно далеких звезд. Никто не заботился так, как Ломоносов, о практическом применении астрономии. М. В. Ломоносов справедливо считается одним из крупнейших астрономов своего времени.

Вильям Гершель

Первые попытки глубоко проникнуть в тайну строения Вселенной путем тщательных наблюдений при помощи сильных телескопов связаны с именем знаменитого астронома Вильяма Гершеля (1738—1822).

Гершель родился и вырос в Ганновере (Германия) в семье военного музыканта. С юных лет он увлекался музыкой и проявил выдающиеся способности. В 19 лет он переселился в Англию и стал здесь известным музыкантом-педагогом. Но все свободное время Гершель посвящал астрономии и астрономическим наблюдениям, математике и физике. Не имея средств для покупки телескопа, Гершель изготовил его собственноручно. Научившись шлифовать вогнутые металлические зеркала, он построил небольшой телескоп-рефлектор с трубой длиной всего 2,1 м, а затем делал телескопы все больших и больших размеров. В 1789 г. он построил телескоп-гигант (по тому времени) с трубой длиной 12 м и зеркалом диаметром 122 см. Этот телескоп оставался самым крупным до 1845 г., когда английский астроном У. Парсонс построил телескоп с длиной трубы почти 18 м и зеркалом диаметром 183 см.

С 1775 г. Гершель начал систематически наблюдать небо. В 1781 г. он открыл новое светило, которое вначале ошибочно принял за комету. Но, как доказали в том же году петербургский астроном академик А. И. Лексель и французский ученый Лаплас, это была новая планета, впоследствии ее назвали Уран. Позднее Гершель открыл два спутника Урана и два спутника Сатурна. Таким образом, с его именем связано открытие нескольких небесных тел в Солнечной системе. Но не в этом главное значение его деятельности.

И до Гершеля было известно несколько десятков двойных звезд, однако предполагалось, что это лишь видимая оптическая близость их на небе.

Гершель был первым в истории науки астрономом, систематически изучавшим двойные звезды. На протяжении многих лет он тщательно исследовал разные участки неба и открыл свыше 800 двойных и кратных систем звезд. Он занимался также определением расстояний между ними (в угловых мерах), исследовал их цвет и видимый блеск. В отдельных случаях звезды, считавшиеся ранее двойными, оказывались тройными и четверными (кратные звезды). Гершель пришел к выводу, что двойные и кратные звезды — это системы звезд, физически связанных между собой и, как он убедился, обращающихся вокруг общего центра тяжести в соответствии с законом всемирного тяготения.

С давних времен были известны видимые невооруженным глазом яркая туманность в созвездии Ориона и туманность в созвездии Андромеды. Но только

в XVIII в., по мере совершенствования телескопов, астрономы открыли много других туманностей. Немецкие ученые И. Кант (1724—1804) и И. Ламберт (1728—1777) считали, что туманности — это целые звездные системы, но они удалены от нас на колоссальные расстояния и поэтому отдельные звезды в них различить нельзя.

Гершель проделал огромную работу, открывая и изучая новые туманности и скопления. Он использовал для этого все увеличивающуюся силу своих телескопов. Достаточно сказать, что составленные им на основе личных наблюдений каталоги насчитывают свыше 2500 туманностей и скоплений. Но Гершель ставил своей задачей не простое отыскание туманностей, а раскрытие их природы. В его телескопы во многих туманностях отчетливо были видны отдельные звезды. Таким образом выяснилось, что эти туманности представляют собой далекие от Солнечной системы звездные скопления. В некоторых случаях туманность оказывалась звездой, окруженной туманной оболочкой. Но большинство туманностей не разделялось на звезды даже при помощи 122-сантиметрового телескопа.

Сперва Гершель пришел к заключению, что почти все туманности — это скопление звезд и самые дальние из них, при наблюдении в более мощные телескопы, также окажутся звездными скоплениями. При этом он допускал, что некоторые из этих туманностей — именно те, которые расположены на небе вне полосы Млечного Пути,— самостоятельные звездные системы. Гершель впервые отметил стремление туманностей скапливаться в группы.

Дальнейшие исследования заставили Гершеля углубить и дополнить свои взгляды на природу туманностей. Гершель установил, что многие туманности состоят не из звезд, а из гораздо более разреженного, чем звезды, туманного диффузного светящегося вещества. Туманное вещество, как и звезды, широко распространено во Вселенной и играет в ней существенную роль.

Гершель развил свою звездно-космогоническую гипотезу образования звезд из диффузной материи под действием сил тяготения. Различные виды неразложимых туманностей он представил как разные стадии образования звезд. Путем уплотнения туманности из нее постепенно образуется либо целое скопление звезд, либо одна звезда, которая в начале своего существования еще окружена туманной оболочкой.

Таким образом Гершель впервые предположил, что звезды имеют разный возраст и образование звезд продолжается непрерывно.

Эта идея Гершеля была потом забыта, и ошибочное мнение о единственном происхождении в далеком прошлом всех звезд долго господствовало в науке. Только в XX в. на основе огромных успехов астрономии, и в особенности благодаря трудам советских ученых, установлено, что звезды имеют различный возраст. Взгляды Гершеля на природу туманностей в общих чертах подтверждены современной наукой, установившей, что газовые и пылевые туманности широко распространены в нашей и в других галактиках.

Вместе с тем Гершель и в конце жизни был убежден, что некоторые туманности — далекие звездные системы, которые со временем будут разложены на отдельные звезды. И в этом он оказался прав.

В XVIII в. астрономы обнаружили собственное движение многих звезд. Гершелю по наблюдению всего 13 звезд удалось в 1783 г. доказать, что и наше Солнце со всеми своими планетами движется по направлению к созвездию Геркулеса.

Главной своей задачей Гершель считал выяснение строения нашей Галактики, ее формы и размеров. Этим он занимался несколько десятилетий. В его распоряжении не было тогда данных ни о расстояниях между звездами, ни о размещении их в пространстве, ни об их светимости. Не имея этих данных, Гершель предположил, что все звезды в среднем имеют одинаковую светимость и распределены в пространстве приблизительно равномерно, так что расстояния между ними более или менее одинаковы. При этом Гершель не знал явления поглощения света в мировом пространстве и поначалу считал, кроме того, что его телескопу, которым он пользовался для этой работы (длиной 6 м и с зеркалом около 0,5 м),

доступны даже самые далекие звезды Галактики. С помощью этого телескопа он производил подсчеты звезд в различных участках неба и пытался определить, как далеко в том или ином направлении простирается наша Галактика. Таким путем он надеялся выяснить общую форму и размеры Галактики.

Но исходные предположения Гершеля, как он это понимал и сам, были еще слишком приближенными. Поэтому, увидев в общих чертах форму Галактики, он не мог прийти к правильным выводам о размерах ее и о положении в ней Солнца. Его наблюдения показали, что Солнце находится близко от центра Галактики. На самом деле оно расположено далеко от него. Размеры Галактики у Гершеля получились, конечно, сильно преуменьшенными. В 40-х годах XIX в. эти исследования продолжил В. Я. Струве.

Гершель занимался и другими вопросами астрономии. Изучая спектр Солнца, он открыл инфракрасную, невидимую часть его.

Свое увлечение астрономией Гершель передал родным и близким. Его сестра Каролина Гершель (1750—1848) помогала ему в научных работах. Она сама вела наблюдения неба и открыла несколько комет. Сын Вильяма Гершеля — Джон Гершель (1792—1871) был одним из наиболее выдающихся английских астрономов XIX в., исследователем двойных звезд и туманностей. Его популярная книга «Очерки астрономии», переведенная на русский язык, сыграла большую роль в распространении астрономических знаний в России.

Пьер Симон Лаплас

В истории науки о Вселенной XVIII столетие — это век развития математической астрономии. Законы Кеплера и закон всемирного тяготения Ньютона были положены в основу астрономии как науки. Стало истиной, что планеты обращаются вокруг Солнца, а спутники — вокруг планет по эллиптическим орбитам, в соответствии с этими законами.

Однако астрономические наблюдения показали, что движение планет и их спутников, в том числе Луны — спутника Земли, в действительности гораздо сложнее. Каждое тело Солнечной системы, обращаясь вокруг своего центра притяжения (каким является Солнце для планет, Земля для Луны или иная планета для своих спутников), испытывает не только притяжение Солнца, но и притяжение всех других тел той же системы. Таким образом, в движении каждого из этих тел обнаруживаются «возмущения» — отклонения от движения по законам Кеплера.

Уже в первой и в начале второй половины XVIII в. член Петербургской Академии наук, математик, академик, швейцарец по происхождению, Эйлер (1707—1783) и французские математики Клеро (1713—1765) и д'Аламбер (1717—1783) разработали теорию сложного движения Луны, исследовали движение некоторых планет и создали новые способы учета «возмущений». Такую же работу осуществил во второй половине того же века французский математик Лагранж (1736—1813). Необходимо было распространить эти исследования на Солнечную систему в целом и показать, что движения всех тел этой системы, при очень большой их сложности, подчиняются общим закономерностям, в основе которых лежит закон всемирного тяготения. Эту задачу решил выдающийся французский математик и астроном Пьер Симон Лаплас (1749—1827).

Лаплас родился в Нормандии (область на северо-западе Франции). Он был сыном крестьянина-фермера, и ему с большим трудом удалось получить элементарное образование. Но пытливого юношу неодолимо влекло к точным наукам; он самостоятельно изучил математику, механику, астрономию. Его научные интересы с самого начала сосредоточились на небесной механике.

Венцом научной деятельности Лапласа был его бессмертный труд «Трактат о небесной механике», вышедший в пяти томах в 1799—1825 гг. В этом труде, основанном на сложнейших математических расчетах, Лаплас показал, что, как ни сложны движения тел Солнечной системы, они связаны едиными и непреложными математическими закономерностями, вытекающими из закона всемирного тяготе-

ния. Лаплас подробно исследовал «возмущения» в движениях Луны, Юпитера, Сатурна и дал им научное объяснение. Он показал, что Солнечная система — очень устойчивое образование. Со времени ее возникновения движения входящих в нее тел совершаются лишь с небольшими изменениями, и эти движения останутся такими же миллионы и миллиарды лет. В Солнечной системе нет сил, которые могли бы ее разрушить и изменить закономерность движений входящих в нее небесных тел, в том числе и Земли.

Лаплас был не только великим исследователем-математиком, но и блестящим писателем-популяризатором. Все то, что в его время было известно о строении Солнечной системы, он описал в популярной книге «Изложение системы мира». Она была издана в 1796 г. и пользовалась широкой известностью. В ней Лаплас изложил и свои взгляды на происхождение Солнечной системы, которые затем под влиянием работ В. Гершеля развил в более полную космогоническую планетную гипотезу.

До середины XVIII в. в науке господствовало мнение, что Земля и все небесные тела, — словом, природа, с тех пор как она возникла, существует в навсегда данном виде, без каких-либо изменений. В середине века М. В. Ломоносов и И. Кант впервые высказали мысль об изменяемости природы. Во Вселенной нет ничего неизменного. Солнце, Земля, планеты, все другие небесные тела когда-то возникли из каких-то иных форм вещества и с тех пор непрерывно развиваются и изменяются. Кант, в частности, выдвинул гипотезу образования звезд с окружающими их планетами и целых звездных систем из рассеянной материи, некогда заполнявшей всю бесконечную Вселенную.

Лаплас, не зная о труде Канта, самостоятельно разработал свою гипотезу происхождения планет из первичной туманности, в которой уже находится в виде центрального сгущения протосолнце.

Лаплас ставил своей задачей создать такую гипотезу происхождения Солнечной системы, которая объяснила бы все наблюдаемые в ней явления и закономерности. Для своего времени он блестяще решил эту задачу. Его гипотеза была общепризнанной в науке в течение столетия. Однако к концу XIX в. она пришла в противоречие с вновь открытыми закономерностями в Солнечной системе и была оставлена.

Лаплас был ученым-материалистом. Сохранился такой рассказ. Наполеон, ознакомившись с трудом Лапласа «Изложение системы мира», спросил у него, почему в этом труде нет упоминания о боге. Лаплас ответил, что его система мира не нуждается «в этой гипотезе».

Джемс Брадлей

В начале XVIII в. английский астроном Э. Галлей сделал выдающееся открытие. Он установил, что звезды, которые с древности считались неподвижными, на самом деле движутся в пространстве. Правда, Галлей установил это только для трех звезд. Но уже в следующие десятилетия обнаружили, что движутся многие звезды. Становилось несомненным, что движение в глубинах мирового пространства присуще всем звездам.

У астрономов не вызывало сомнений и то, что звезды находятся на самых различных расстояниях от Солнечной системы, что расстояния даже до близких звезд невообразимо огромны.

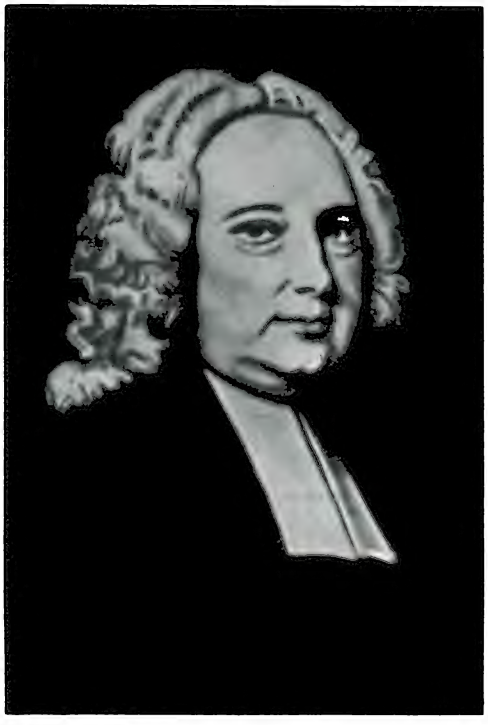
Однако определить их оказалось невозможно: слишком малы были параллаксы звезд и измерить их не удавалось. (Параллакс звезды — угол, под которым с той или иной звезды был бы виден радиус земной орбиты. Знание параллакса позволяет вычислить расстояние до звезды.) Перед астрономами XVIII в. встала задача добиться в наблюдениях такой точности, которая позволила бы определить расстояние до звезд и изучить их движения. Это составило бы основу для выяснения строения звездного мира, в чем астрономы правильно усматривали свою главную цель.

В определении расстояний до звезд наука многим обязана английскому астроному Джемсу Брадлею (1693—1762).

Брадлей еще в молодые годы увлекся астрономией и изучил ее под руководством своего дяди — известного тогда астронома Паунда. Позднее, уже профессором Оксфордского университета, он получил в свое ведение обсерваторию, основанную Паундом в Уанстеде, где провел многие свои важнейшие наблюдения. После смерти Галлея Брадлей возглавлял старейшую английскую обсерваторию в Гринвиче.

Долго и упорно Брадлей наблюдал звезду гамма Дракона, чтобы определить ее параллакс. Он подметил периодические смещения этой звезды, но они оказались иного характера, чем смещения параллактические. После долгих повторных наблюдений и размышлений Брадлей пришел к выводу, что открыл явление *аберрации* — изменение видимого положения звезды на небе, происходящее из-за движения Земли вместе с наблюдателем вокруг Солнца.

Открытие аберрации явилось первым прямым доказательством движения Земли, а тем самым и полной истинности учения Коперника.



Хотя Брадлею так и не удалось измерить параллакс звезды (это смог сделать только В. Я. Струве спустя 100 лет), но он пришел к твердому выводу, что даже у ближайших звезд параллаксы меньше 0″,5, следовательно, и расстояния их выражаются в десятках триллионов километров.

Фридрих Вильгельм Бессель

Свой жизненный путь Фридрих Вильгельм Бессель (1784—1846), уроженец Мюнхена, начал мелким торговым служащим. Усердно занимаясь самообразованием, он быстро и успешно овладел знаниями по математике и астрономии, которую избрал своей специальностью. 20-летним юношей Бессель самостоятельно вычислил орбиту кометы Галлея.

Большое значение для Бесселя имело знакомство с Генрихом Ольберсом (1758—1840) — врачом из Бремена. Ольберс еще в молодости был любителем астрономии, а потом стал одним из крупнейших астрономов своего времени. По его рекомендации Бессель стал ассистентом у другого крупного астронома — Иоганна Шретера (1745—1816). Бессель, работая на обсерватории Шретера, занялся наблюдениями звезд. Его занятия в этом направлении шли настолько успешно, что вскоре принесли ему репутацию видного астронома-наблюдателя и вычислителя-математика.

В 1810 г. Бессель стал профессором астрономии в Кенигсбергском университете. Здесь под его руководством вскоре была построена обсерватория, директором которой он оставался до конца своей жизни.

Бессель обработал наблюдения звезд, проведенные в свое время Брадлеем в Гринвиче. При этом он поставил задачу — освободить наблюдения от всех ошибок, которые в них содержатся.

При астрономических наблюдениях такие ошибки неизбежны. Они происходят из-за несовершенства инструментов, из-за всякого рода помех в земной атмосфере, даже из-за особенностей зрения и нервной системы самого наблюдателя. В совокупности эти ошибки сильно влияют на результаты наблюдений. Но если вскрыть их, тщательно изучить и исправить полученные данные наблюдений, то можно достигнуть исключительной точности. Астрономы и раньше старались устранить влияние ошибок при наблюдениях, но Бессель разработал математические методы исправления наблюдений и, поправив таким образом наблюдения Брадлея, издал их в виде каталога 3200 звезд. По своей точности каталог оказался образцовым для того времени.

В дальнейшем Бессель сам вел наблюдения положений звезд. Он определил положения для 75 тыс. звезд и, таким образом, создал огромные звездные каталоги, которые стали основой современных знаний о звездном небе.

Бессель был одним из первых астрономов, измеривших параллаксы, а тем самым и расстояния до звезд. Вслед за В. Я. Струве, который в 1835—1836 гг. впервые определил расстояние до звезды Ве-

ги в созвездии Лиры, Бессель в 1838 г. измерил расстояние до звезды 61 в созвездии Лебедя. Эта звезда оказалась одной из ближайших к Солнечной системе.

Занимаясь изучением собственных движений звезд, Бессель обнаружил в движении ярких звезд Сириуса и Проциона такие особенности, которые можно было объяснить только тем, что эти звезды имеют спутников, но таких слабых, что их нельзя было в то время увидеть в телескоп. Впоследствии их обнаружили.

Бессель вошел в историю науки как замечательный ученый, отдавший все свои силы, весь свой талант совершенствованию методов астрономических наблюдений, без чего невозможен был прогресс астрономии.

Василий Яковлевич Струве

В развитии знаний о нашей звездной системе огромное значение имели важные открытия, сделанные в конце первой половины XIX в. выдающимся русским астрономом Василием Яковлевичем Струве (1793—1864).

В. Я. Струве родился в немецком, в то время датском, городе Альтоне и провел в нем свои школьные годы. Пятнадцати лет он поступил в университет в Дерпте (ныне г. Тарту Эстонской ССР) и с этого времени всю свою жизнь и деятельность всецело связал с нашей страной, с нашей наукой, которую обогатил своими трудами. Отец и старший брат В. Я. Струве были педагогами-языковедами, под их влиянием и он вначале избрал себе ту же специальность. Но потом его вниманием всецело завладели точные науки, и особенно астрономия.

Блестящая одаренность В. Я. Струве в соединении с редкой настойчивостью и трудолюбием помогла ему очень быстро овладеть новой для него областью знаний. Работая на Дерптской университетской обсерватории, В. Я. Струве великолепно освоил методы астрономических наблюдений. В 1814 г. он уже издал свое первое астрономическое сочинение о точном определении широты и долготы Дерптской обсерватории. Скоро В. Я. Струве стал астрономом-наблюдателем этой обсерватории, а в 1818 г., в возрасте 25 лет, — профессором астрономии и директором Дерптской обсерватории.

В то время обсерватория была очень плохо оборудована. Но скоро благодаря стараниям Струве она получила наилучшие инструменты, в том числе

рефрактор с объективом в 9 дюймов — для той поры самый лучший в мире. Его создал выдающийся немецкий оптик Фраунгофер.

На Дерптской обсерватории В. Я. Струве провел поистине гигантскую работу по исследованию двойных звезд.

Работая упорно и систематически, В. Я. Струве исследовал 120 тыс. звезд и установил двойственность около 2500 из них. Это был крупнейший вклад в науку. При исследовании звезд В. Я. Струве очень тщательно измерял угловые расстояния между звездами, входящими в пары, и определял их точное положение на небе.

В свое время Коперник высказал догадку об огромных расстояниях до звезд, в сравнении с которыми ничтожно малы размеры Солнечной системы. В конце первой половины XVIII в. исследования Брадлея и Ламберта привели к бесспорному выводу, что расстояния даже до ближайших звезд измеряются десятками триллионов километров. Но попытки астрономов точно определить эти расстояния успеха не имели. Решил эту задачу В. Я. Струве. В 1837 г. он сообщил о первом в истории астрономии определении расстояния до звезды (Веги в созвездии Лиры). Оно оказалось равным 250 триллионам км, или 26,5 св. года. Это примерно в 90 тыс. раз превышает расстояние от Солнца до Урана. Подавляющее большинство звезд находится гораздо дальше, чем Вега. Так было положено начало точным определениям расстояний до звезд.

Еще наблюдения двойных звезд создали В. Я. Струве славу крупнейшего астронома. В 1832 г. его избрали академиком, но он продолжал работать в Дерпте, потому что Академия наук тогда не имела хорошей обсерватории.

Когда было принято решение о строительстве большой обсерватории в окрестностях Петербурга, к этому делу привлекли В. Я. Струве, как самого выдающегося астронома России. Он стал организатором

и руководителем строительства Пулковской обсерватории. Оборудованная лучшими по тому времени инструментами, обсерватория была открыта в 1839 г. В. Я. Струве составил план работы обсерватории на многие годы и почти четверть века являлся ее директором. Под его руководством она стала лучшей обсерваторией мира.

Кипучая организаторская работа не помешала В. Я. Струве проводить и научные исследования. В Пулкове он продолжал изучение двойных звезд и начал исследования строения нашей звездной системы — Галактики. До В. Я. Струве только Гершель занимался этим вопросом. Но он сделал лишь первые выводы о форме и размерах Галактики, о распределении в ней звезд и о положении Солнца. Они были еще очень неточны. В. Я. Струве глубоко развил введенные Гершелем звездно-статистические методы исследования звездной Вселенной. Изучая распределение звезд в Галактике, В. Я. Струве установил, что они располагаются неравномерно и чем дальше от центра Галактики, тем больше расстояния между ними. При этом Солнце находится не вблизи центра Галактики, как думали некоторые ученые, а, наоборот, далеко от него.

Одновременно В. Я. Струве пришел к выводу, что в нашей звездной системе существуют облака темного рассеянного вещества, которые ослабляют свет находящихся за ними звезд. Он сделал первые попытки определить величину этого ослабления света. Существованием межзвездного вещества В. Я. Струве объяснял то обстоятельство, что до нас не доходит свет от многих слабых звезд, расположенных в глубинах Галактики.

На протяжении многих десятилетий после В. Я. Струве астрономы обсуждали вопрос: существует или не существует поглощение света (или «межзвездное поглощение», как его назвали)? И только в 1930 г. было точно установлено, что оно существует.

Таким образом, больше 100 лет назад В. Я. Струве решил основные для звездной астрономии вопросы о распределении звезд в Галактике и о межзвездном поглощении света.

В. Я. Струве был не только непревзойденным исследователем неба. Как передовой ученый и патриот, он использовал свои знания и организаторский талант для решения очень важных практических задач, связанных с картографией нашей страны. Еще в 20-х годах прошлого века под его руководством была измерена дуга земного меридиана в Прибалтике, а в 1844—1852 гг. при его непосредственном участии проведено измерение дуги меридиана в 25°20′ на огромном пространстве от Дуная до Ледовитого океана, общим протяжением более 2800 км. В результате проведенной работы были получены ценнейшие материалы для составления точных карт России.

В. Я. Струве был прекрасным педагогом. На Дерптской обсерватории под его руководством работали молодые русские астрономы из разных университетов. Многие из них потом стали крупными учеными. Позднее, в Пулкове, В. Я. Струве неизменно руководил работой сотрудников обсерватории.

Своими исследованиями двойных звезд и строения нашей Галактики В. Я. Струве оказал огромное влияние на развитие русской и мировой астрономии. В историю науки В. Я. Струве вошел как один из самых выдающихся астрономов XIX в.

Лучшим памятником В. Я. Струве является созданная им Пулковская обсерватория. Ее история — одна из самых ярких страниц развития астрономии в XIX и XX вв.

Созданная для разработки звездной астрономии, обсерватория внесла выдающийся вклад в эту область науки. Составленные на ней звездные каталоги по своей точности превосходили каталоги всех других обсерваторий. На Пулковской обсерватории не только завершали свое научное образование многие русские ученые-астрономы. Ее посещали для заимствования опыта работы крупнейшие астрономы Европы и Америки. По этой причине ее стали называть астрономической столицей мира.

После В. Я. Струве Пулковской обсерваторией более четверти века руководил его сын О. В. Струве. При нем в программу обсерватории вошли также астрофизические исследования и была построена астрофизическая лаборатория.

В 1890—1895 гг. обсерваторию возглавлял выдающийся русский астроном Ф. А. Бредихин. Он не только расширил астрофизические исследования, но и привлек в Пулково многих молодых русских ученых.

Преемником Ф. А. Бредихина был О. А. Баклунд (1846—1916). При нем были основаны отделения обсерватории в Николаеве и Симеизе.

Особенно широко деятельность обсерватории развернулась в советскую эпоху. В первые годы Советской власти обсерваторию возглавлял выдающийся астрофизик А. А. Белопольский. Потом ее директорами были такие крупные астрономы, как А. А. Иванов, Б. П. Герасимович, Г. Н. Неуймин, А. А. Михайлов, В. А. Крат.

В годы Великой Отечественной войны немецко-фашистские захватчики разрушили обсерваторию до основания.

Заново построенная после войны, Пулковская обсерватория вновь заняла ведущее место среди основных обсерваторий мира.

Мариан Альбертович Ковальский

Среди русских астрономов, обогативших своими трудами науку о Вселенной, выдающееся место занимает Мариан Альбертович Ковальский (1821—1884).

М. А. Ковальский был сыном мелкого чиновника, рос в тяжелых материальных условиях и поэтому с большим трудом смог пробить себе дорогу к образованию. Астрономией М. А. Ковальский заинтересовался еще студентом Петербургского университета. Окончив в 1845 г. университет, он работал на Пулковской обсерватории, где совершенствовался в астрономических наблюдениях и вычислениях под руководством В. Я. Струве. В 1847 г. Русское географическое общество снарядило большую экспедицию для исследования Северного, главным образом Заполярного, Урала. Астрономом экспедиции был назначен М. А. Ковальский.

В то время огромная территория Заполярного Урала была совершенно неисследована. На всем Заполярном Урале знали координаты только одного географического пункта, а остальная территория была «белым пятном» на карте. Астроному экспедиции предстояло определить долготы, широты и высоты над уровнем моря возможно большего числа географических пунктов.

Здесь-то и проявилась удивительная работоспособность М. А. Ковальского. Совершая труднейшие переходы пешком и на лыжах, в сорокаградусные морозы и во время сильных ветров, молодой ученый определил координаты почти 200 географических пунктов. Одновременно он производил метеорологические и магнитные наблюдения.

В 1852 г. М. А. Ковальского пригласили на должность профессора астрономии в Казанский университет. Обладая блестящими математическими способностями, М. А. Ковальский сосредоточил свое внимание на вопросах теоретической астрономии, изучающей движения небесных тел.

В 1846 г. была открыта новая планета — Нептун. Требовалось достаточно точно определить ее орбиту, иначе она могла скоро исчезнуть из поля зрения астрономов; кроме того, необходимо было разработать теорию ее движения на долгие годы вперед.

Задача была очень трудная, так как в своем движении вокруг Солнца Нептун кроме мощного солнечного притяжения испытывает еще притяжение больших планет — Юпитера, Сатурна, Урана. Большие планеты вызывают неправильность, или, «возмущения», в движении Нептуна, а это сильно затрудняет определение его действительной орбиты. Однако М. А. Ковальский проделал огромную вычислительную работу и создал теорию движения Нептуна.

Но особенно большое значение имели труды М. А. Ковальского о собственных движениях звезд. Эти исследования привели его к важнейшим выводам о строении нашей звездной системы — Галактики.

На основании изучения движения звезд Ковальский выдвинул и обосновал гипотезу вращения всей нашей звездной системы вокруг ее центрального звездного сгущения. Он решительно отверг мнение некоторых астрономов о существовании колоссального «центрального Солнца», которое одно своим притяжением управляет движением всех звезд, подобно тому как наше Солнце управляет движением планет и других тел Солнечной системы. Одновременно он пришел к выводу, что размеры Галактики гораздо больше, чем думали астрономы в его время.

В этих трудах М. А. Ковальский намного опередил свое время. В 1927 г. голландский ученый Оорт окончательно установил вращение Галактики. Выяснилось, что нет «центрального Солнца», управляющего движением миллиардов звезд в Галактике.

Много труда потратил М. А. Ковальский на разработку новых методов астрономических вычислений. Он разработал новые методы предвычисления затмений, а также новые и более совершенные способы определения орбит двойных звезд. Это давало возможность определять массы этих звезд.

М. А. Ковальский известен не только как крупнейший теоретик, но и как неутомимый наблюдатель. На Казанской обсерватории он много лет определял точные положения звезд избранного им для изучения обширного участка неба и подготовил каталог определенных им положений более 4200 звезд.

Федор Александрович Бредихин

С древнейших времен люди наблюдали невооруженным глазом не только Солнце, планеты и наиболее яркие звезды, но и кометы.

Неожиданное появление комет с их причудливыми по форме хвостами нарушало привычные представления о «неизменном» состоянии неба и наводило страх на суеверных людей, которые видели в кометах предвестниц грядущих бедствий.

Передовые ученые еще в древности пытались объяснить появление комет и разгадать их природу. Но первую полную теорию природы комет, происхождения кометных хвостов и причудливого разнообразия их форм построил во второй половине XIX в. выдающийся русский астроном, основоположник астрофизики в нашей стране Федор Александрович Бредихин (1831—1904).

Ф. А. Бредихин родился в г. Николаеве в семье, давшей нашей стране много отважных моряков. В юности он и сам собирался посвятить себя службе на флоте. Но в Московском университете Ф. А. Бредихин серьезно заинтересовался астрономией. Этот интерес особенно усилился, когда он стал посещать Московскую обсерваторию.

Окончив в 1855 г. университет, Ф. А. Бредихин всецело посвятил себя астрономии. В 1857 г. он стал преподавателем, а с 1865 г. профессором астрономии Московского университета.

В 60-е годы Ф. А. Бредихин начал исследования комет и продолжал их до конца своей жизни.

Давно уже было известно, что хвосты комет обычно направлены в сторону, противоположную Солнцу. Отсюда некоторые ученые делали вывод, что вещество хвоста отталкивается от Солнца под влиянием какой-то силы, противоположной силе тяготения. Эту силу стали называть отталкивательной. С ее помощью были описаны явления близ головы кометы (Брандес, Бессель).

Ф. А. Бредихин построил первую механическую теорию явлений в хвостах комет. Под воздействием солнечных лучей центральная часть кометы — ядро — нагревается. Выброшенные из ядра кометы частицы материи подвергаются действию одновременно солнечного притяжения и отталкивательной силы, зависящей от величины частиц. В результате этого выброшенные частицы и образуют хвосты комет, которые вытягиваются нередко на миллионы, а иногда на десятки и сотни миллионов километров и имеют различную форму.

У одних комет они почти прямые, у других в разной степени изогнуты. Ф. А. Бредихин разделил их на три типа (см. ст. «Кометы»). Кроме того, Ф. А. Бредихин выделил IV тип — аномальные хвосты, состоящие из более крупных частиц и направленные к Солнцу (они встречаются редко и лишь вместе с нормальными хвостами).

Ф. А. Бредихин ввел представления о *синдинамах* (потоках частиц, выбрасываемых из головы кометы с одинаковыми начальными скоростями) и *синхронах* (одновременно выброшенных «порциях» частиц) и впервые объяснил с их помощью явление многохвостовых комет.

В число важных научных достижений Ф. А. Бредихина вошла разработанная им теория образования метеорных потоков. Эти потоки он рассматривал как результат распада комет, начинающийся с возникновения аномального хвоста.

Ф. А. Бредихин выдвинул также гипотезу происхождения периодических комет. Он считал, что эти кометы образуются путем отделения частей от кометы-родоначальницы. Эта гипотеза объясняла существование «семейств комет», т. е. групп комет, имеющих очень сходные между собой орбиты.

Причиной появления отталкивательной силы Ф. А. Бредихин считал световое давление (установленное для твердых тел П. Н. Лебедевым в 1900 г.). Несмотря на то что строение комет оказалось сложнее, механическая теория комет Ф. А. Бредихина сохранила свое значение для хвостов II и III типов.

Неутомимо занимаясь исследованием комет, Ф. А. Бредихин продолжал свою профессорскую деятельность в университете. С 1873 по 1890 г. он был директором Московской обсерватории и направлял ее деятельность по новому тогда пути астрофизических исследований. Благодаря трудам Ф. А. Бре-

дихина и его ближайших учеников — В. К. Цераского и А. А. Белопольского Московская обсерватория приобрела мировую известность.

Ф. А. Бредихин плодотворно работал и в других областях астрономии. Он организовал и вел спектральные наблюдения Солнца и голов комет — тогда это было совсем новым делом. Много лет он занимался наблюдениями планеты-гиганта Юпитера и загадочного красного пятна на нем.

В 1890 г. Ф. А. Бредихина избрали академиком и назначили директором Пулковской обсерватории. Здесь он расширил круг астрофизических исследований и привлек к работе в обсерватории талантливых молодых ученых из различных университетов России. Большую помощь он оказывал также другим отечественным обсерваториям и работавшим на них отдельным ученым.

В 1895 г. Ф. А. Бредихин оставил руководство Пулковской обсерваторией, но научными исследованиями продолжал заниматься до конца своей жизни.

Аристарх Аполлонович Белопольский

Аристарх Аполлонович Белопольский родился в 1854 г. в Москве. Еще в детстве он увлекался природой: его интересовали и звездное небо, и камни на Земле, и животные, и растения. Он увлекался также художественной литературой и музыкой. Любовь к книгам сочеталась у него с любовью к физическому труду — он рано научился конструировать и мастерить разного рода механизмы.

По окончании гимназии А. А. Белопольский поступил на физико-математический факультет Московского университета. Здесь он слушал лекции крупнейших русских ученых: Ф. А. Бредихина — по астрономии и А. Г. Столетова — по физике. Тогда он еще не думал о деятельности ученого, а предполагал изучить математические науки, чтобы стать инженером. Но именно увлечение техникой привело его в астрономию. Ф. А. Бредихин пригласил А. А. Белопольского работать механиком на обсерватории, где способный студент еще больше заинтересовался астрономией и по окончании университета стал научным работником обсерватории.

На Московской обсерватории А. А. Белопольский работал 11 лет и занимался различными исследованиями. Самая значительная его работа этого периода посвящена изучению вращения Солнца. Оказалось, что на солнечном экваторе вращение происходит быстрее, а по мере удаления от экватора — медленнее. Было известно, что твердое однородное тело так вращаться не может. Поэтому А. А. Белопольский сделал вывод, что Солнце состоит из газов разной плотности и разной температуры.

В 1888 г. А. А. Белопольский перешел на Пулковскую обсерваторию. Здесь он проработал 46 лет — до конца жизни. В Пулкове он занимался спектральными исследованиями, которые принесли ему мировую славу.

Спектральный анализ и фотография пришли на помощь астрономам в начале второй половины XIX в. Они стали основой новой области астрономии — астрофизики. Основы изучения физической природы небесных тел заложили известные ученые: англичане Хеггинс (1824—1910) и Локьер (1836—1920), француз Жансен (1824—1907), итальянец Секки (1818—1878), немец Фогель (1841—1907) и русский астроном Ф. А. Бредихин. А. А. Белопольский был их достойным продолжателем и открывателем новых путей в науке. Получив в свое ведение 76-сантиметровый телескоп, он приспособил к нему сконструированный им спектрограф — прибор для фотографирования спектров. В дальнейшем А. А. Белопольский не раз совершенствовал конструкции применявшихся им приборов и приспособлений.

Еще до начала астрофизических исследований А. А. Белопольского астрономы знали, что если в спектре какого-либо небесного тела, например далекой звезды, наблюдается смещение спектральных линий к фиолетовому концу, то звезда движется по направлению к нам; если, наоборот, замечено смещение линий к красному концу, значит, звезда удаляется от нас. Это явление называется эффектом Доплера, по имени австрийского физика, в свое время высказавшего это положение.

Принцип Доплера помог А. А. Белопольскому обнаружить движения многих небесных тел, прежде всего звезд, в сторону приближения к нам или удаления от нас (так называемое движение по лучу зрения). Особую роль сыграли исследования лучевых скоростей у переменных звезд типа цефеид.

А. А. Белопольский открыл, что периодические изменения блеска цефеид происходят в соответствии с их движением по лучу зрения: рост блеска происходит при удалении от нас поверхности звезды, и наоборот. А. А. Белопольский сначала предположил, что цефеиды — это очень близкие друг другу спектрально-двойные звезды. Однако в дальнейшем выяснилось, что загадка цефеид сложнее и объясняется их периодическим расширением и сжатием (пульсацией). Эти так называемые физические переменные звезды сыграли в дальнейшем очень большую роль в изучении Вселенной.

С помощью принципа Доплера А. А. Белопольский решал и другие задачи. В свое время на основании математических расчетов ученые предположили, что кольцо Сатурна не может быть сплошным, а должно состоять из множества мелких тел. А. А. Белопольский решил спектральными наблюдениями проверить выводы математиков. Измерив смещение линий в спектре более близких и более далеких к планете частей кольца, он убедился, что кольцо вращается так, как может вращаться только тело, не имеющее сплошной массы: более близкие к планете части кольца вращаются быстрее, более далекие — медленнее. А это значит, что кольцо состоит из множества мелких тел. Одновременно с А. А. Белопольским это открытие сделали американский астроном Килер (1857—1903) и французский астроном Деландр (1853—1948).

Таким образом, применяя принцип Доплера, А. А. Белопольский достиг замечательных научных успехов. Но принцип Доплера по отношению к световым колебаниям еще не был проверен опытами в лаборатории. Большинство ученых вообще считали такую проверку невозможной, так как смещение спектральных линий небесных тел вызывается их движением с огромными скоростями, которые невозможно воспроизвести в лаборатории.

А. А. Белопольский был не только теоретиком, но и искусным изобретателем и конструктором. Это и помогло ему провести опыты, окончательно подтвердившие принцип Доплера, а стало быть, и правильность полученных с его помощью астрономических выводов. Он построил прибор, в котором луч солнечного света после многократного отражения в системе вращающихся зеркал попадал в щель спектрографа, а оттуда на фотографическую пластинку. Отражение света от движущихся зеркал должно было дать тот же эффект — в смысле смещения линий спектра, как если бы перемещался сам источник света (в данном случае Солнце). Так именно и произошло, и принцип Доплера подтвердился опытом.

Многие труды А. А. Белопольского посвящены спектральным исследованиям новых звезд, вспыхивавших в конце XIX — первой четверти XX в., определению времени вращения Юпитера и Венеры, изучению комет и другим вопросам.

В Пулкове А. А. Белопольский до последних дней продолжал начатые еще в Москве исследования вращения Солнца. С помощью спектрографа и руководствуясь принципом Доплера он определил лучевые скорости отдельных точек солнечной поверхности. Этим он подтвердил свои прежние выводы о замедлении вращения Солнца от экватора к полюсам (вблизи полюсов период вращения Солнца доходит до 34 сут, тогда как на экваторе он составляет всего 25 сут). Аналогичное явление открыл он и для Юпитера.

В 1903 г. А. А. Белопольского избрали академиком. С 1917 по 1919 г. он работал директором Пулковской обсерватории. Великую Октябрьскую социалистическую революцию А. А. Белопольский встретил уже в преклонном возрасте. Но это не помешало ему с юношеской энергией принять участие в создании советской науки. Почти в 80-летнем возрасте он неутомимо работал в составе экспедиции, выбиравшей место для постройки большой астрофизической обсерватории на юге нашей страны. Умер А. А. Белопольский в 1934 г.

Всю свою жизнь А. А. Белопольский провел в напряженном труде. Он сам создавал многие из тех приборов, с которыми работал. Им опубликовано более 270 научных работ, у него училось несколько поколений астрофизиков.

Генри Норрис Ресселл

Крупнейшие заслуги в изучении звезд принадлежат американскому астроному Генри Норрису Ресселлу (1877—1957). Его научная деятельность протекала в Принстоне, на северо-востоке США. Здесь Ресселл с 1911 г. был профессором астрономии и директором обсерватории Принстонского университета.

В результате долгих исследований Ресселл установил связь между спектрами звезд и их светимостью.

При этом определились большие различия в светимости звезд. Оказалось, что белые и голубые, т. е. самые горячие, звезды отличаются и огромной светимостью. Звезды же желтые и красные резко разделяются на две группы: звезды с большой светимостью, в сотни и тысячи раз большей, чем у Солнца, и звезды со сравнительно малой светимостью, такой, как у Солнца, или меньшей. Так было установлено, что по светимости звезды подразделяются на гигантов и карликов. Позднее выяснилось, что гиганты и карлики по светимости являются гигантами и карликами также по размеру и по массе, хотя различия в массах гигантов и карликов не столь велики, как различия в светимостях и размерах. Наше гигантское Солнце с его колоссальным излучением — всего только желтый карлик, рядовая звезда в нашей Галактике. Стало также известно, что кроме гигантов и карликов во Вселенной имеются сверхгиганты (горячие — бело-голубые и холодные — красные), субгиганты и субкарлики (т. е. звезды, по светимости приближающиеся либо к гигантам, либо к карликам) и, наконец, белые карлики.

Ресселл и датский астроном Э. Герцшпрунг (1873—1967) построили специальную диаграмму, на которой показана связь между спектрами звезд и их светимостью. Эта диаграмма (ее называют диаграммой «спектр — светимость» или диаграммой Герцшпрунга — Ресселла) играет огромную роль в изучении звездного мира. Она все время дополняется и исправляется в свете новых данных.

Ресселл явился основоположником современных представлений о природе и путях развития звезд. Он считал, что звезды с разными спектрами находятся на разных стадиях развития.

Ресселл много работал и в других областях астрономии, особенно в области космогонии Солнечной системы. Многие крупные американские астрономы были его учениками.

Эдвин Хаббл

Высказанные в начале второй половины XVIII в. Кантом, Ламбертом и некоторыми другими учеными предположения, что наша Галактика — одна из бесчисленных звездных систем в бесконечной Вселенной, были в свое время только смелыми догадками.

Изучение Галактики далеко продвинулось вперед благодаря трудам В. Гершеля и В. Я. Струве. В середине XIX в. английский астроном У. Парсонс при помощи своего гигантского телескопа обнаружил, что многие из туманностей, которые не разделяются на отдельные звезды, имеют спиральную форму. После открытия спектрального анализа и применения его к изучению небесных тел оказалось, что у многих туманностей, в особенности у спиральных, спектр не отличается от обычного спектра звезд. Этим как будто подтверждалось, что такие туманности могут быть далекими звездными системами. Но во второй половине XIX в. большинство ученых не разделяли мнения о существовании множества звездных систем. Эти ученые полагали, что во Вселенной существует одна звездная система — это наша Галактика, а сама Вселенная имеет конечные размеры.

В начале XX в. новые открытия пробудили у ученых больший, чем раньше, интерес к природе спиральных и других «неразложимых» туманностей. В некоторых из них (в частности, в туманности в созвездии Андромеды) были замечены вспыхнувшие новые звезды. Когда удалось при помощи спектрального анализа измерить скорости движения некоторых туманностей, они оказались огромными — тысячи километров в секунду. В то же время все попытки измерить непосредственно перемещение туманностей на фоне неба оказались безуспешными. А это означало, что туманности находятся на расстояниях, во много раз превосходящих расстояния до самых далеких звезд Млечного Пути.

Сколько-нибудь точному определению эти расстояния долго не поддавались. В 1920 г. шведский астроном Лундмарк показал, что расстояние до туманности в Андромеде составляет не менее 650 тыс. св. лет. В том же году американский астроном Кёртис привел важные доводы в пользу того, что спиральные туманности представляют собой звездные системы, удаленные от нас на сотни тысяч, миллионы и десятки миллионов световых лет. Однако многие астрономы возражали против выводов Лундмарка и Кёртиса. Они все еще считали, что

спиральные туманности принадлежат к нашей звездной системе, а сами звездными системами не являются.

В 1924 г. американский астроном Эдвин Хаббл при помощи телескопа с зеркалом диаметром 250 см на обсерватории Маунт Вилсон (Калифорния) окончательно доказал, что туманность в Андромеде и некоторые другие туманности имеют звездное строение и находятся далеко за пределами Млечного Пути. Таким образом, впервые было доказано, что наша Галактика не единственная звездная система во Вселенной.

Хаббл родился в 1889 г. в штате Миссури (США). Он учился в Чикагском университете, а потом продолжал свое образование в Оксфордском университете в Англии. В 1914 г. Хаббл вернулся в Чикаго и стал ассистентом Йеркской обсерватории (близ Чикаго). Однако успешно начатая Хабблом научная работа прервалась. Шла первая мировая война, и его призвали в действующую армию. По возвращении из армии Хаббл стал астрономом обсерватории Маунт Вилсон — одной из крупнейших астрофизических обсерваторий мира.

Уже первые свои труды Хаббл посвятил фотографическому изучению слабых туманностей. В этих трудах он утверждал, что спиральные туманности состоят из звезд. Хаббл назвал их внегалактическими туманностями, т. е. находящимися за пределами нашей Галактики.

Сделанное в 1924 г. Хабблом открытие принесло ему мировую известность. Суть открытия заключалась в том, что на полученных Хабблом при помощи 250-сантиметрового рефлектора фотографиях крайние (менее яркие) области трех туманностей — в Андромеде, в Треугольнике и еще одной, обозначенной в Общем каталоге туманностей (NGC) номером 6822, — отчетливо разлагались на звезды. Исследование фотографий показало, что среди этих звезд много цефеид. Это обстоятельство имело огромное значение, так как позволило определить расстояния до ряда внегалактических туманностей.

Расстояние до туманности в созвездии Андромеды оказалось по вычислениям Хаббла огромным — около 1 млн. св. лет. По современным данным это расстояние превышает 2 млн. св. лет.

Примерно таким же оказалось и расстояние до туманности в созвездии Треугольника. Таким образом, расстояния от нас до близких туманностей в десятки раз больше размеров нашей звездной системы.

Но это было только началом. В последующие годы Хаббл исследовал очень много внегалактических туманностей. Они теперь называются галактиками (в отличие от них наша Галактика пишется с прописной буквы). Оказалось, что далеко не все эти галактики имеют спиральную форму. Многие из них эллиптической, а некоторые неправильной формы.

Хаббл составил подробную классификацию галактик по их форме и другим особенностям.

В течение последующих лет благодаря трудам Хаббла и многих других ученых быстро расширились границы изученной части Вселенной. При помощи фотографии астрономы открыли миллионы галактик, находящихся от нас на все более и более далеких расстояниях, и обнаружили целые скопления их.

В 1941 г. работы Хаббла вновь прервались: ученого привлекли к военно-техническим делам. После второй мировой войны Хаббл возобновил свои исследования на обсерватории Маунт Вилсон и одновременно принял деятельное участие в проектировании новой обсерватории на горе Паломар. Здесь в послевоенные годы установлен гигантский рефлектор с зеркалом диаметром 508 см.

Хаббл скончался в 1953 г. Он был одним из самых выдающихся и талантливых астрономов нашей эпохи и пионером изучения далеких звездных систем.

Карл Шварцшильд и Артур Стэнли Эддингтон

В начале XX в. разные страны дали миру многих выдающихся астрономов — исследователей мира звезд. Но пределы данной статьи не позволяют рассказать о них, поэтому ограничимся сведениями о деятельности двух астрофизиков — немецкого уче-

ного Карла Шварцшильда (1873—1916) и английского — Артура Стэнли Эддингтона (1882—1944). (Смотри фото наверху.)

Карл Шварцшильд учился в Мюнхенском университете. Его учителем здесь был Г. Зеелигер (1849—1924) — крупный немецкий астроном, много времени занимавшийся изучением строения Млечного Пути.

Влияние Зеелигера определило и направление научных интересов Шварцшильда. С 1901 по 1909 г. Шварцшильд состоял профессором и директором обсерватории Геттингенского университета и с 1909 г. возглавлял Потсдамскую астрофизическую обсерваторию. Шварцшильд много сделал в области изучения блеска звезд, где применил фотографические методы исследования. Составленный им каталог точнейших определений блеска 3500 звезд явился ценнейшим приобретением для науки.

Особенно много Шварцшильд работал в области изучения движения звезд в нашей Галактике. Эти его исследования очень много дали для познания строения Галактики и выяснения закономерностей движений звезд в ней.

Шварцшильд создал первую точную теорию передачи и распределения энергии в звездных атмосферах — теорию «лучистого равновесия», которая стала основой для изучения строения звездных атмосфер и внутреннего строения звезд. Известно, что строение солнечной атмосферы сложное. Но Солнце — рядовая звезда. Следовательно, атмосферы других звезд не менее сложны, а у звезд-гигантов, например, атмосферы и гораздо обширнее, чем у рядовых звезд. Шварцшильд впервые разработал теорию строения звездных атмосфер.

Жизнь и деятельность Шварцшильда оборвалась рано. В 1914 г. его призвали в армию, где он умер от тифа.

В настоящее время в США работает видный исследователь строения и развития звезд Мартин Шварцшильд. Это сын Карла Шварцшильда.

Артур Стэнли Эддингтон учился в Кембриджском университете (Англия). С 1906 по 1913 г. он был ассистентом старейшей в Англии Гринвичской обсерватории, а с 1913 г. — профессором и директором обсерватории Кембриджского университета.

Эддингтон занимался изучением движений звезд и строения звездных систем. Но главная его заслуга в том, что он впервые создал теорию внутреннего строения звезд. Поскольку физические знания тогда были далеки от их современного уровня, предложения и расчеты Эддингтона могли быть только приближением к современным представлениям о строении звезд и о происходящих в них физических процессах.

Шварцшильд и Эддингтон заложили основу наших знаний о строении звезд. Теперь мы знаем об этом гораздо больше.

Григорий Абрамович Шайн

Жизнь Григория Абрамовича Шайна (1892—1956) — выдающегося советского ученого, одного из крупнейших астрофизиков — ярчайший пример неустанного творческого научного труда, увенчанного важными и плодотворными достижениями.

Г. А. Шайн родился и вырос в Одессе. Он был сыном бедного ремесленника. С ранних лет интересуясь различными областями науки и искусства, Г. А. Шайн с большим трудом прокладывал себе путь к образованию. Материальная необеспеченность семьи лишила будущего ученого возможности учиться в гимназии, и он учился самостоятельно. В возрасте 19 лет Г. А. Шайн сдал экстерном экзамен за полный курс гимназии. Но еще до этого он начал успешно заниматься астрономией. Стремясь глубже овладеть этой наукой, он с исключительной настойчивостью изучал математику и физику. Уже тогда Г. А. Шайн с особенным увлечением вел наблюдения за небесными светилами с крыши дома при помощи простейших астрономических приборов. Г. А. Шайн познакомился с астрономами Одесской университетской обсерватории, и они допустили его к работе на ней. Ко времени сдачи экзаменов за среднюю школу он уже имел печатную работу — исследование орбиты одного из метеорных потоков.

С 1912 г. Г. А. Шайн учился в Юрьевском университете. Потом работал ассистентом профессоров аст-

рономии в Пермском и Томском университетах. В 1921 г. Г. А. Шайн стал астрономом Пулковской обсерватории, а с 1923 г. работал в ее Симеизском отделении, в Крыму.

В эти годы определилось основное направление последующих трудов Г. А. Шайна. Он поставил своей целью исследование физической природы звезд, туманностей и строения звездных систем. Г. А. Шайн в совершенстве овладел методами спектрального анализа и фотографирования небесных тел. Учителем его был А. А. Белопольский.

В 1924 г. на Симеизской обсерватории установили рефлектор с зеркалом диаметром 102 см. Г. А. Шайн руководил установкой его и использовал этот инструмент для спектральных исследований звезд. Вместе с другим симеизским астрономом — В. А. Альбицким (1891—1952) он определил лучевые скорости многих звезд.

Еще Галилей сделал правильный вывод, что Солнце вращается вокруг своей оси. Но Солнце — одна из бесчисленных звезд. Следовательно, и звезды должны вращаться. Но звезды представляются нам светящимися точками. Поэтому нельзя было увидеть на звездах какие-либо детали, по перемещениям которых можно было бы установить вращение звезд. Оно могло быть установлено только путем тончайших спектральных исследований. Такие исследования и выполнил Г. А. Шайн в контакте с работавшим в США правнуком В. Я. Струве — известным астрономом О. Л. Струве (1897—1963). Эти ученые не только установили, что звезды вращаются, но и измерили скорость вращения. При этом оказалось, что самые горячие звезды на их экваторах вращаются со скоростью, исчисляемой сотнями километров в секунду, тогда как скорость вращения Солнца на его экваторе составляет только 2 км/с.

Открытие вращения звезд и исследование их лучевых скоростей, наряду с другими трудами, выполненными Г. А. Шайном в те же годы, создали ему широкую известность среди астрономов всех стран. В 1939 г. Г. А. Шайна избрали академиком, а затем членом старейшего в мире Лондонского астрономического общества.

Работу Г. А. Шайна в Симеизе прервала Великая Отечественная война. Заняв Крым, немецко-фашистские захватчики разрушили Симеизскую обсерваторию. Ее 102-сантиметровый рефлектор не удалось эвакуировать, он попал в руки врагов, которые привели его в полную негодность.

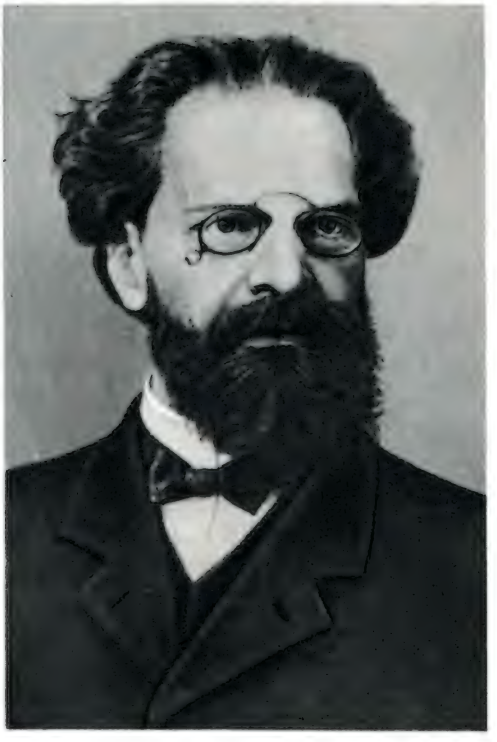
В годы войны Г. А. Шайн продолжал свои исследования в Абастумани, на обсерватории Академии наук Грузинской ССР. После освобождения Крыма он вместе с другими астрономами вернулся в Симеиз. В послевоенные годы Симеизскую обсерваторию не только восстановили, но и построили вблизи нее, в селе Партизанском, новую обсерваторию. Обе они составили одно научное учреждение — Крымскую астрофизическую обсерваторию Академии наук СССР, одну из крупнейших в мире. Академика Г. А. Шайна назначили директором новой обсерватории. Ему выпала труднейшая задача: он должен был руководить строительством обсерватории и оборудовать ее первоклассными инструментами и приборами. Как только вновь были установлены на обсерватории первые инструменты, Г. А. Шайн развернул исследовательскую работу.

Академик Г. А. Шайн внес большой вклад в изучение загадочных объектов — разреженных самоизлучающих газовых туманностей. Он не ограничился исследованием уже известных, но обнаружил в нашей и других галактиках множество новых газовых туманностей, состоящих из разреженного водорода. Они не видны глазом в телескоп и улавливаются только путем фотографирования их особыми способами. Г. А. Шайн со своими сотрудниками открыл свыше 300 таких туманностей. Выяснилось, что некоторые туманности не бесформенные массы газа, а имеют ярко выраженное волокнистое строение и в них происходят разнообразные физические (в частности, магнитные) явления. Оказалось, что у многих туманностей огромные массы, в сотни раз и более превышающие массу Солнца.

Большое значение имеют и другие исследования Г. А. Шайна. В особенности важны его труды по изучению звезд с обильным содержанием углерода. Г. А. Шайн много и успешно занимался также изучением спектрально-двойных звезд и другими вопросами.

В 1952 г. Григорий Абрамович Шайн по состоянию здоровья вынужден был отказаться от поста директора обсерватории, но научную работу он продолжал вести до последних дней жизни.

Ученый-революционер Павел Карлович Штернберг



Павел Карлович Штернберг, имя которого носит Государственный астрономический институт Московского государственного университета, был не только видным астрономом, но и революционером, активным участником Великой Октябрьской социалистической революции.

П. К. Штернберг родился в 1865 г. в г. Орле. Настойчивость и упорство в работе, стремление каждое начатое дело доводить до конца были свойственны ему с юных лет. Он рано заинтересовался астрономией. Еще гимназистом он сам изготовил штатив для подаренной ему астрономической трубы, установил ее на крыше дома, в котором жил, и регулярно наблюдал небо.

Окончив гимназию, П. К. Штернберг в 1883 г. поступил в Московский университет. Здесь на физико-математическом факультете он стал учеником Ф. А. Бредихина. В 1887 г., по окончании университета, П. К. Штернберга пригласили работать на Московской обсерватории. В первые годы он был рядовым сотрудником и помогал Ф. А. Бредихину в исследованиях комет, а с 1890 г. стал астрономом-наблюдателем и одновременно начал преподавать в университете.

Молодой ученый принимал активное участие в перестройке обсерватории и расширении ее научной работы.

Для своих научных трудов П. К. Штернберг всегда выбирал темы, требовавшие особенно тщательных наблюдений и измерений. Его труды по точности выполнения всегда служили образцом для астрономов.

В 90-е годы XIX в. — начале XX в. П. К. Штернберг занимался точным определением широты Московской обсерватории в связи с движением полюсов. Земные полюсы не неподвижные точки: они перемещаются по земной поверхности, и, как ни ничтожны эти перемещения, измеряемые немногими метрами, они все же вызывают изменение широт различных мест на Земле.

Тщательные исследования привели П. К. Штернберга к выводу, что движение полюсов очень сложно и для полного уяснения его нужны наблюдения в обоих полушариях Земли. Он указывал и на возможную связь между движением полюсов и такими явлениями в истории Земли, как ледниковые эпохи и неоднократно происходившие наступления моря на сушу.

Много внимания П. К. Штернберг уделял также работам по определению силы тяжести (гравиметрия) в разных местах Европейской России. Эти работы имеют большое практическое значение: они помогают обнаруживать залежи полезных ископаемых. В советскую эпоху такие исследования развернулись на территории нашей страны в огромных масштабах. Но на рубеже XIX—XX вв. П. К. Штернберг был смелым новатором в этом деле.

Немало времени П. К. Штернберг уделял преподавательской работе. Он жил и работал в то время, когда рабочий класс России готовился к борьбе с самодержавием и капитализмом. Изучение трудов Маркса и Ленина и наблюдение в фабричном районе за жизнью и борьбой рабочих определили политические взгляды ученого. Он решил идти с партией Ленина, бороться за свержение капитализма и установление социалистического строя.

П. К. Штернбергу не пришлось быть в Москве в дни Декабрьского вооруженного восстания 1905 г. Он находился в заграничной командировке и вернулся только в начале 1906 г., после подавления восстания. По возвращении он включился в работу большевистской организации.

Свою революционную работу П. К. Штернберг проводил в условиях строжайшей конспирации, да-

же его ближайшие товарищи по обсерватории не подозревали, что он революционер-большевик.

Для подготовки вооруженного восстания необходим был подробный план Москвы со всеми ее извилистыми улицами и переулками, проездами и проходными дворами. Такого плана Москвы не имели и царские власти. Благодаря энергии и изобретательности П. К. Штернберга московская организация большевиков создала такой план на глазах у властей и даже с их помощью. В научных кругах Москвы хорошо знали, что П. К. Штернберг много занимался исследованиями силы тяжести. Поэтому никого не удивило, когда он поставил в университете вопрос о необходимости получить от московских властей разрешение проводить такие исследования со студентами на территории Москвы.

Университет выхлопотал П. К. Штернбергу такое разрешение, и вскоре на улицах города появились студенты с геодезическими приборами. Полиция получила указание не мешать работам. В действительности же производилась съемка детального плана Москвы, а выполняли это отчаянно смелое дело не столько студенты, сколько переодетые рабочие. Заснятые планы районов города тщательно хранились и потом были использованы во время октябрьских боев 1917 г.

Выполняя всевозможные партийные поручения, П. К. Штернберг не прерывал и научной деятельности. После перестройки Московской обсерватории он работал с самым крупным ее инструментом—15-дюймовым астрографом. П. К. Штернберг использовал его для применения фотографии к точным измерениям в астрономии, так как поставил перед собой задачу подметить движение в пространстве одной из далеких туманностей. За эту работу он получил ученую степень доктора и звание профессора, а когда в 1916 г. директор обсерватории В. К. Цераский по болезни оставил работу, П. К. Штернберг заменил его на этом посту.

В стране назревали события всемирно-исторического значения. В первые месяцы после Февральской революции П. К. Штернберг участвовал в легальной работе московской большевистской организации. Он много работал по организации Красной гвардии. Но легальная работа партии продолжалась недолго. В июле 1917 г. Временное правительство стало преследовать партию большевиков.

После ареста многих деятелей партии, разгрома партийных организаций и газет большевики вынуждены были уйти в подполье. Состоявшийся вскоре VI съезд партии взял курс на подготовку вооруженного восстания для свержения власти капиталистов и помещиков.

Вместе с другими членами партии П. К. Штернберг готовился к решающим революционным боям. Но и в самое напряженное время он не оставлял научной работы.

В боях за победу пролетарской революции в Москве П. К. Штернберг принимал самое активное участие. Выделенный Московским комитетом партии большевиков боевой партийный центр назначил его своим уполномоченным в Замоскворецкий район Москвы. Отсюда должен был начаться обстрел Кремля, в котором находился штаб контрреволюции.

П. К. Штернберг проявил качества подлинного большевистского руководителя. Он понимал, что успех дела могут обеспечить только смелые наступательные действия. По его инициативе и под его руководством осуществлялся артиллерийский обстрел Кремля. Это обеспечило победоносный штурм и окончательный разгром засевших в Кремле белогвардейских войск.

После победы Великой Октябрьской социалистической революции П. К. Штернберг некоторое время был комиссаром Московской губернии, а затем по поручению правительства работал над перестройкой системы высшего образования.

При участии П. К. Штернберга было разработано новое положение о высшей школе, широко открывшее ее двери людям из народа. В этой работе его поддерживал профессор К. А. Тимирязев.

В трудное для молодой Советской республики время партия направила П. К. Штернберга на Восточный фронт. Как член Реввоенсовета одной из армий Восточного фронта, а потом Реввоенсовета всего фронта, Павел Карлович участвовал в организации первых побед над армией Колчака, а затем и в окончательном ее разгроме. Даже тяжелобольной, он оставался на фронте, пока его не заставили уехать в Москву для лечения. Вылечить П. К. Штернберга от тяжелого легочного заболевания не удалось. 1 февраля 1920 г. он скончался.

К. А. Тимирязев справедливо назвал П. К. Штернберга ученым-героем. Советские астрономы и весь советский народ чтут память крупного ученого-большевика Павла Карловича Штернберга.

Юные астрономы

Любителям астрономии

Дорогие читатели!

Из прочитанных статей вы узнали о далеком от нас мире небесных тел. Узнали о строении Вселенной, о звездах и звездных системах, о планетах, кометах, метеорах и других небесных телах и явлениях. Получили также представление о том, как развивалась наука астрономия, каких успехов она достигла, какое значение имеет познание Вселенной для прогресса человечества.

Вероятно, некоторые из вас заинтересовались астрономией и с увлечением прочтут рекомендуемые книги. А некоторые, может быть, не ограничатся чтением книг и пожелают практически быть чем-либо полезными для астрономии. Наука о Вселенной развивалась трудами не только астрономов-профессионалов. В разные времена и в разных странах любители астрономии — люди самых различных профессий — отдавали этой науке свое свободное время и вносили в нее серьезный вклад.

Читая о замечательных достижениях астрономии в нашу эпоху, о гигантских телескопах и других совершенных и сложных инструментах, при помощи которых осуществляются эти достижения, вы можете подумать, что в наше время любители уже не могут играть активную роль в науке и делать ценные открытия. В самом деле, разве доступно рядовому любителю иметь мощный телескоп и сложнейшие приборы современной астрофизики? Ведь их сооружение требует огромных затрат и применения таких знаний и опыта, которыми обладают только люди, всецело посвятившие себя астрономии и овладевшие всеми методами и средствами исследования.

И тем не менее в наше время перед любителями астрономии, и особенно юными, открываются широкие возможности не только приобретать астрономические знания, но и приносить пользу науке.

Во многих областях астрономии, таких, как наблюдения метеоров, исследования переменных звезд, изучение Луны, больших планет, да и в других областях можно получать ценные результаты самыми скромными средствами. В умелых руках и при живом интересе к делу обычный бинокль, небольшой телескоп, простая фотографическая аппаратура дают возможность проводить наблюдения, а в иных случаях и делать открытия, ценные для науки.

Для занятий юных любителей у нас созданы самые благоприятные условия. Обсерватории и астрономические кружки при Дворцах пионеров и планетариях, юношеские секции при отделениях Всесоюзного астрономо-геодезического общества всемерно помогают юным любителям. Они объединяют их усилия и направляют на решение наиболее увлекательных и важных в научном отношении задач.

Можно не сомневаться в том, что некоторые из вас, юные читатели, станут астрономами-специалистами, будут работать на больших обсерваториях, примут участие в будущих научных экспедициях на Луну и на близкие планеты. Дело каждого — в надлежащее время сознательно и продуманно выбрать себе специальность. Быть же активными любителями астрономии могут все те из вас, кто интересуется этой наукой и хочет быть для нее полезным.

Вашему вниманию предлагаются статьи, из которых вы почерпнете самые начальные знания о том, как сделать любительский телескоп, как оборудовать астрономическую площадку, как и что систематически наблюдать на небе.

Телескоп астронома-любителя

Каждому, вероятно, известно, что важнейший прибор, главное орудие астронома — телескоп. Но в чем основное преимущество телескопа перед невооруженным глазом? Это знают далеко не все.

Принято думать, что главное свойство телескопа — увеличивать изображения небесных светил. Подходя к телескопу, школьники обычно спрашивают: «А во сколько раз он увеличивает?» На самом деле мощность телескопа определяется не даваемым им увеличением, а *диаметром объектива*. Ведь чем больше диаметр объектива, тем больше его площадь, а значит, и больше количество света, которое объектив собирает. Даже школьный телескоп с диаметром объектива всего 80 мм собирает света примерно в 250 раз больше, чем глаз. Это и понятно: диаметр зрачка (5 мм) в 16 раз меньше диаметра школьного телескопа, а $16^2=256$. Поэтому в школьный телескоп мы увидим звезды, которые в 250 раз слабее видимых невооруженным глазом. Нужно помнить, что звезды даже в самый сильный телескоп кажутся светящимися точками, поэтому к их наблюдениям термин «увеличение» неприменим.

Иное дело — Солнце, Луна, планеты, туманности и другие так называемые протяженные небесные тела. Благодаря сочетанию в оптической системе телескопа объектива и специальной сложной лупы — *окуляра* можно получить увеличенные изображения этих светил. Посмотрим, как это происходит.

Объектив телескопа — это система линз, задача которой — построить *действительное изображение* светила. Это изображение, получаемое в *главном фокусе* объектива, можно принять на экран, сфото-

Школьный телескоп-рефрактор с объективом 80 мм (большая модель) на экваториальной установке.

Школьный телескоп-рефрактор с объективом 60 мм (малая модель) на азимутальной установке.

графировать, поставив здесь фотопластинку, или же рассматривать в окуляр. Расстояние от объектива или окуляра до главного фокуса называется *фокусным расстоянием*. Окуляр имеет свое фокусное расстояние, обычно во много раз меньшее, чем объектив. Увеличение телескопа равно отношению фокусных расстояний объектива и окуляра.

Казалось бы, следует добиваться как можно больших увеличений телескопа, чтобы рассмотреть мельчайшие подробности на Луне, Марсе и других планетах. На самом деле возможность рассматривать те или иные мелкие подробности (разрешающая сила телескопа) определяется опять-таки не увеличением, а диаметром объектива. Чтобы узнать, какие наименьшие детали можно различить в данный телескоп, надо 120 разделить на диаметр объектива, выраженный в миллиметрах. Мы получим видимые размеры наименьших различимых деталей в секундах дуги. Напомним, что 1″ дуги — 1/3600°. Это угол, под которым видна толщина обычной спички с расстояния 400 м. На расстоянии Луны 1″ дуги соответствует линейный размер детали в 2 км, на расстоянии Марса (в период великого противостояния) — в 300 км. Такие детали можно различить в телескоп с объективом в 120 мм и более.

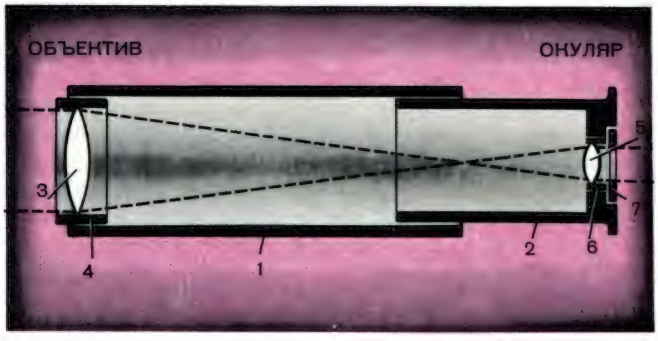
Конечно, большие увеличения позволяют лучше рассматривать мелкие детали поверхности Луны или планет. Но они имеют и отрицательные стороны. При больших увеличениях изображение становится более бледным, менее ясным, так как собранное объективом количество света распределяется на большую площадь изображения. Кроме того, при больших увеличениях соответственно возрастает дрожание изображения, вызванное колебаниями атмосферы, а также искажения, связанные с несовершенством оптики телескопа (аберрации). Поэтому лучше выбрать не наибольшее увеличение, а такое, при котором светило в телескоп видно наиболее четко.

Телескопы бывают различных типов. Любителю астрономии обычно приходится иметь дело с двумя из них: рефрактором и рефлектором.

Рефрактор — «преломляющий» — наиболее старый тип телескопа. Его объектив состоит из линз, преломляющих падающие на них лучи. (Устройство оптической системы рефрактора описано на стр. 42.)

В СССР для школ выпускаются два типа телескопов-рефракторов. Большая модель (см. рис.) с объективом диаметром 80 мм, фокусным расстоянием 800 мм и тремя окулярами, дающими увеличение в 28, 40 и 80 раз. Телескоп смонтирован на так называемой *экваториальной* установке, которая позволяет следить за светилом длительное время, поворачивая

Схема самодельного телескопа-рефрактора из очковых стекол: 1 — главная труба, 2 — окулярная трубка, 3 — объектив, 4 — оправа объектива, 5 — окуляр, 6 — оправа окуляра, 7 — диафрагма.



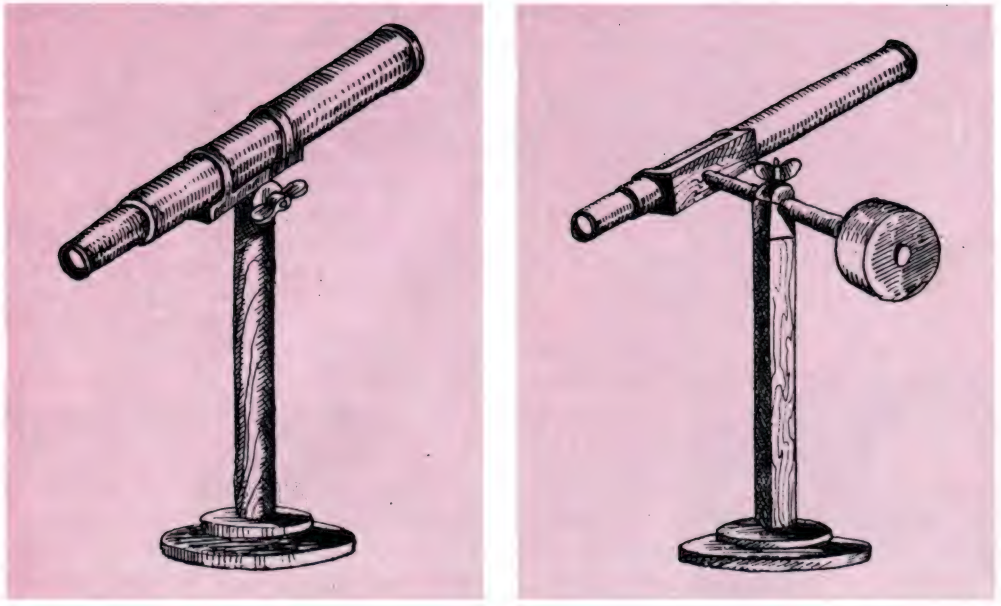
телескоп вокруг только одной оси — *полярной* (направленной на Полярную звезду). Наклон полярной оси к горизонту должен быть равен географической широте места, которую определяют по карте. Перпендикулярно полярной оси проходит ось склонений. Поворачивая трубу вокруг обеих осей, мы наводим телескоп на светило, закрепляем зажимными винтами и, следя за светилом в окуляр, медленно с помощью микрометрического ключа поворачиваем телескоп вокруг полярной оси.

Малая модель школьного телескопа-рефрактора (см. рис.) имеет объектив диаметром 60 мм, фокусное расстояние 600 мм. Окуляры дают увеличение в 30 и 60 раз. В отличие от большой модели малая имеет *азимутальную* установку. В ней труба телескопа может поворачиваться вокруг двух осей: вертикальной и горизонтальной. Чтобы следить за светилом, телескоп приходится поворачивать одновременно вокруг обеих осей, что очень неудобно (о том, как этого избежать, рассказано в «Справочнике любителя астрономии» П. Г. Куликовского, «Наука», 1961, стр. 246). Ведь суточный путь светила по небу обычно расположен под углом к плоскости горизонта, а этот угол в течение суток меняется.

К обоим телескопам прилагаются различные дополнительные приспособления: солнечный экран, зенит-призма, темные стекла и светофильтры и др.

Часто любитель астрономии не имеет возможности приобрести фабричный телескоп. В этом случае мы можем предложить два варианта самодельного телескопа: для начинающих любителей — рефрактор из очковых стекол, для более опытных — рефлектор.

Изготовление самодельного рефрактора доступно любому школьнику. Прежде всего нужно приобрести объектив и окуляр. Для объектива можно использовать простую двояковыпуклую линзу в 1 диоптрию (фокусное расстояние ее равно 1 м). Такие линзы бывают в оптических магазинах и в аптеках. Два стекла для очков («мениск») по +0,5 диоптрии, расположенных выпуклыми сторонами наружу на



Азимутальные деревянные штативы.
Слева — первый вариант.
Справа — второй вариант.

расстоянии 30 мм одно от другого, заменяют линзу в 1 диоптрию. Между ними нужно поставить диафрагму с отверстием диаметром около 30 мм. Годятся и насадочные линзы для фотоаппарата, например, типа «Любитель». Линзу в 1 диоптрию могут заменить линзы в 0,75 или 1,25 диоптрии (их фокусные расстояния — 133 и 80 см). Линза должна быть непременно круглая и иметь большой диаметр (до 50 мм).

Для окуляра можно взять сильную лупу небольшого диаметра, окуляр от микроскопа (в том числе школьного типа), от старого теодолита, нивелира или бинокля. Чтобы определить, какое увеличение даст наш телескоп, измерим фокусное расстояние окуляра. Для этого наведем в ясный день окуляр на Солнце и расположим за ним лист белой бумаги. Будем приближать и удалять лист, пока не получится самое маленькое и яркое изображение Солнца (чтобы бумага не загоралась, окуляр прикрывают засвеченной пленкой или пластинкой). Расстояние между центром окуляра и изображением и есть фокусное расстояние окуляра. Поделив фокусное расстояние объектива (оно равно 100 см, деленным на число диоптрий очковой линзы) на фокусное расстояние окуляра, получим увеличение телескопа. Обычно у самодельного рефрактора можно получить увеличение в 20—50 раз.

Трубу телескопа можно сделать из бумаги. Возьмите несколько листов бумаги большого формата и деревянную круглую болванку диаметром на 2—3 мм больше, чем линза объектива. Обмотайте болванку несколько раз бумагой, пока не получится достаточной прочности и толщины труба. Наматывая бумагу, промазывайте каждый слой клеем — обычным конторским, казеиновым, можно и клейстером из картофельной или пшеничной муки грубого помола. Наружную поверхность трубы покройте светлой эмалевой или масляной краской (можно лаком), а внутреннюю — вычерните тушью, чтобы избежать вредных отражений света от стенок трубы. Это лучше сделать до проклеивания трубы. Трубу можно изготовить и из листовой жести, дюраля и других материалов.

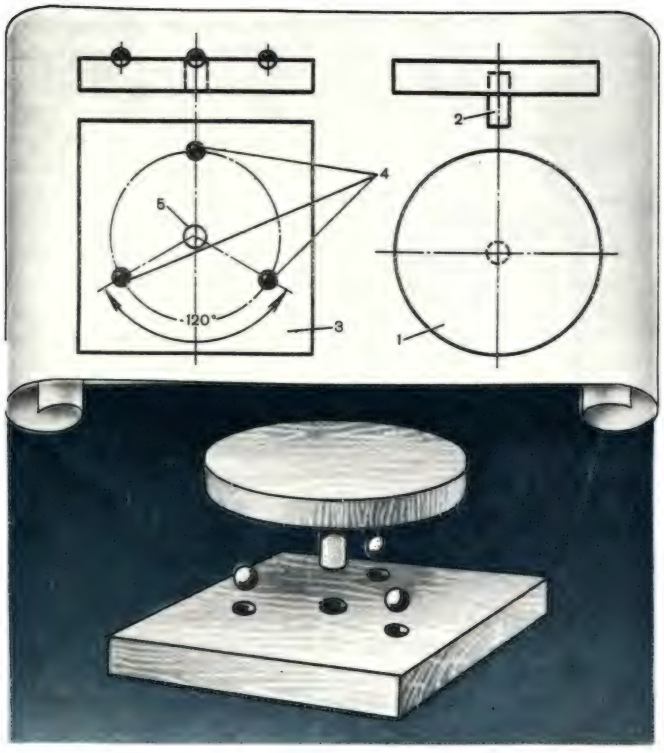
Таким же способом изготовляется выдвижная трубка меньшего диаметра для окуляра. Внутренний диаметр ее зависит от внешнего диаметра оправы окуляра.

Главную трубу (1) делают сантиметров на десять короче фокусного расстояния объектива; длина окулярной трубки (2) около 40 см. Чтобы наводить телескоп на фокус («на ясное зрение»), окулярная трубка должна плотно, на трении, вдвигаться и выдвигаться. Звезды в телескоп при установке на фокус кажутся яркими точками, а не размытыми дисками.

Линза объектива (3) вставляется в передний конец трубы с помощью оправы (4), состоящей из двух картонных колец с разрезом и двух коротких бумажных трубок чуть меньшего диаметра, чем линза. С помощью этих трубок линза плотно зажимается между кольцами.

Чтобы было удобнее вести наблюдение, надо изготовить для телескопа штатив. Проще всего сделать

Станочек для шлифовки и полировки зеркала телескопа (схема): 1 — столик, 2 — ось столика, 3 — основание станочка, 4 — стальные шарики, 5 — отверстие для оси.



деревянный азимутальный штатив, на котором труба поворачивается вокруг двух осей: вертикальной и горизонтальной. Однако на таком штативе нельзя наводить трубу на небо близ зенита. Устранить это неудобство можно. Надо только слегка изменить конструкцию штатива. Трубу на другом конце горизонтальной оси нужно уравновесить грузом. Чтобы не приходилось поддерживать все время трубу рукой, сделайте стопорный винт, а еще лучше два: для вертикальной и горизонтальной осей.

Вполне по силам астроному-любителю и изготовление экваториального штатива. В этом случае полярная ось закрепляется в двух втулках под углом к горизонтальной плоскости, равным широте места. Вторая ось — ось склонений устанавливается перпендикулярно ей.

Самодельный рефрактор позволит любителю наблюдать горы на Луне, пятна на Солнце (обязательно прикрывать окуляр темным стеклом; лучше изображение Солнца проецировать на экран — лист белой бумаги, защитив его от прямых лучей Солнца куском картона с отверстием посредине, надетым на трубу; при наблюдении с темным стеклом объектив надо задиафрагмировать на $^1/_3$), кольца Сатурна, фазы Венеры, диск Юпитера, четыре его спутника, диск Марса, двойные звезды, некоторые звездные скопления — Плеяды, Ясли и др. Для сложных наблюдений этот инструмент недостаточен.

Если любитель астрономии терпелив и у него, как говорят, умелые руки, он может собственными силами изготовить телескоп-рефлектор с диаметром главного зеркала 100—150 мм, а после приобретения небольшого опыта — и большего размера.

Рефлектор — отражательный телескоп. Роль объектива в нем играет вогнутое зеркало. Если придать отражающей поверхности зеркала форму параболоида вращения, лучи от светила, падающие на зеркало параллельным пучком, после отражения сойдутся в его главном фокусе. Здесь и получится действительное изображение светила. Чтобы его наблюдать и фотографировать, между зеркалом и фокусом (ближе к фокусу) под углом 45° ставят плоское дополнительное зеркало, которое отражает пучок лучей вбок. Зеркало можно заменить прямоугольной призмой с полным внутренним отражением, например от призменного бинокля. Такая система телескопа называется *системой Ньютона.* В ней окуляр находится сбоку трубы. Существуют и другие системы рефлекторов, но они значительно сложнее и построить их любителю гораздо труднее.

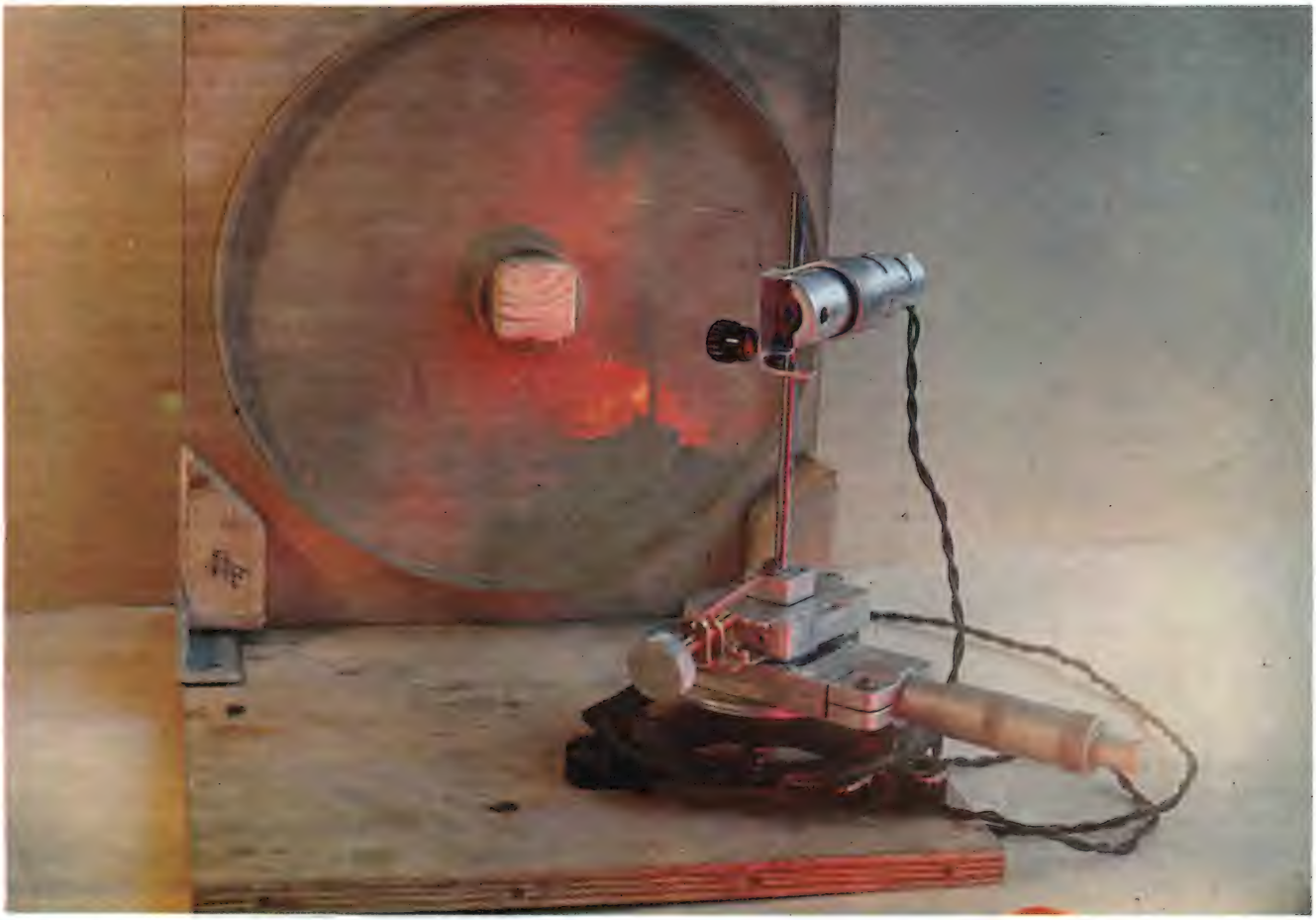
Если фокусное расстояние главного зеркала при диаметре 100 мм будет не менее 700 мм, а при диаметре 150 мм — не менее 1200 мм, то поверхность зеркала можно сделать не параболической, а сферической, что намного легче.

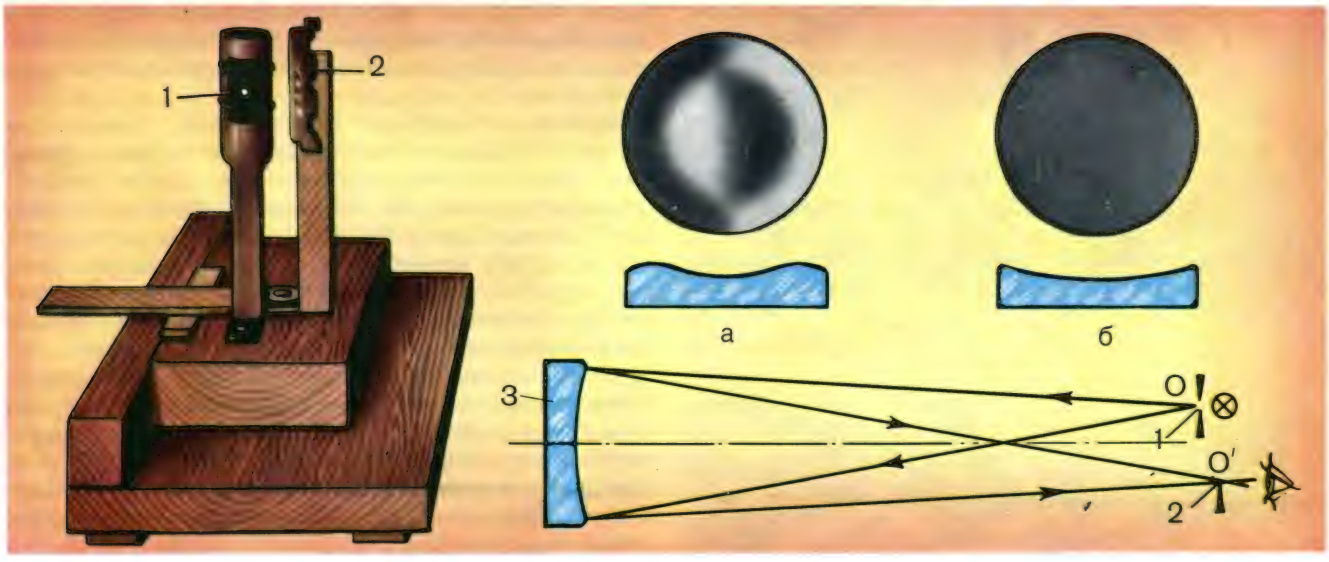
Для изготовления такого сферического зеркала нужны два диска (при диаметре 100 мм толщиной не менее 10 мм; при диаметре 150 мм около 20 мм) из хорошо отожженного стекла, например зеркального, витринного, иллюминаторного. Если есть толстое зеркальное стекло, диски можно вырезать и самому, но при этом понадобится так называемое трубчатое сверло — отрезок трубки подходящего диаметра. Его можно согнуть из полосы железа, стали или другого не очень мягкого металла с толщиной стенок 1—2 мм и укрепить на деревянном диске того же диаметра, что и зеркало (можно, например, использовать корпус старого будильника). Диски вырезают, вращая трубчатое сверло при помощи сооруженного для этой цели станочка или вручную. Под край сверла непрерывно подмазывают кашицу из абразива (например, порошка наждака), размешанного с водой.

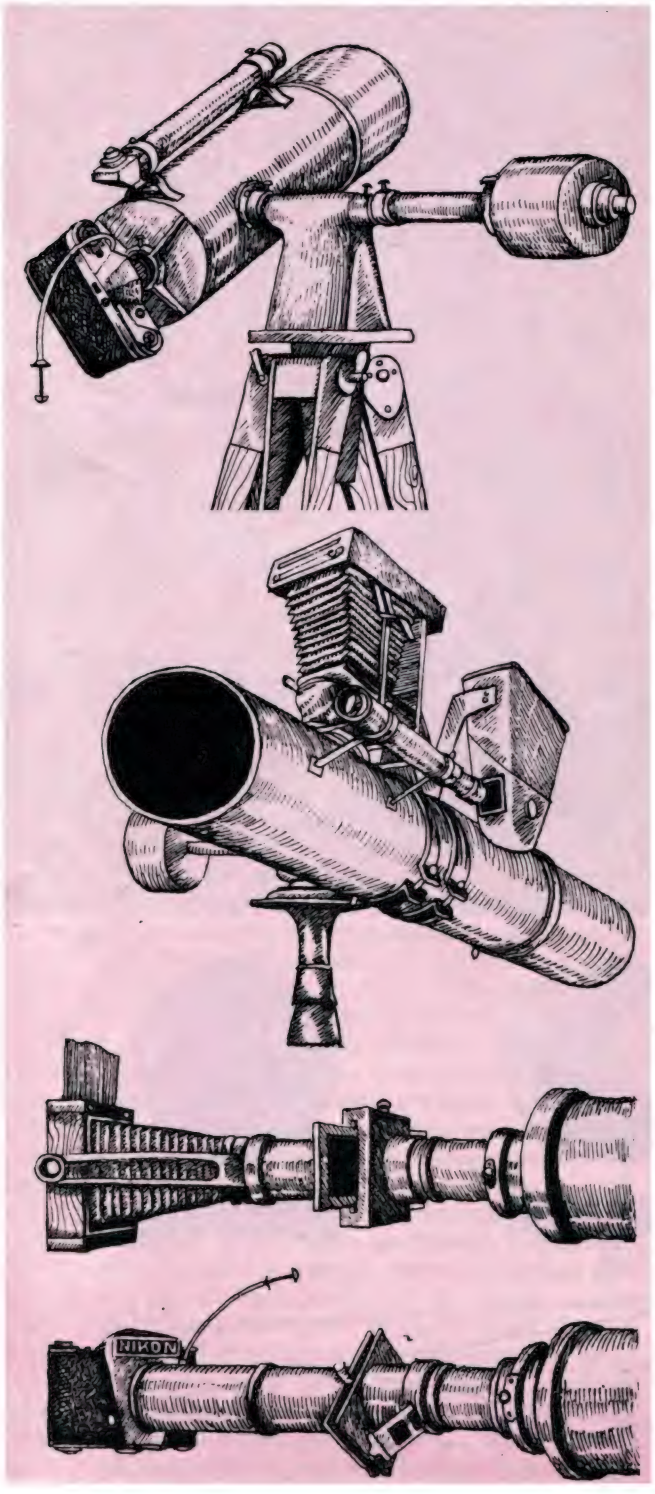
Для изготовления зеркала нужны шлифующие и полирующие материалы, а также смола и канифоль. Шлифуют зеркало с помощью абразивных порошков, карборунда (карбида кремния), корунда или наждака. В нашей работе понадобятся абразивы с зернами разной величины, они обычно различаются по номе-

Теневой прибор для проверки кривизны испытываемого зеркала.

Внизу — схема теневого прибора: 1 — искусственная звезда, 2 — «нож Фуко», 3 — зеркало.







Четыре способа крепления фотокамер к любительским телескопам: вверху — камера «Зенит» в фокусе Кассегрена рефлектора или менискового телескопа; в центре — камера «Фотокор» в фокусе рефлектора Ньютона; внизу — камеры «Фотокор» и «Никон», прикрепленные к рефрактору с помощью переходной трубки. Видна рамка для светофильтров.

рам: 40—60 (самый крупнозернистый), 100—120, 280. Начинается шлифовка самым крупным абразивом. Когда углубление приближается к заданной величине, переходят от грубой шлифовки к тонкой, применяя все более и более мелкие сорта абразива. Нужно, чтобы абразив был однородным и одного сорта (без примеси зерен другого размера).

В процессе шлифовки из отработанного абразива изготовляют еще более мелкие сорта порошков — так называемые *минутники*. В высокую стеклянную банку наливают воду, высыпают смесь отработанных абразивов и взбалтывают. Через 5 мин воду осторожно сливают во вторую банку и снова отстаивают. Осадок, выпавший при отстаивании во второй банке, и есть пятиминутник. Таким же способом (он называется отмучиванием) получают 10-, 15-, 30-, 60-, 120-минутники.

Для шлифовки сферической поверхности нужно положить два стеклянных диска один на другой, а затем, смазывая соприкасающиеся поверхности кашицей из абразивного порошка с водой, двигать верхний диск от себя и к себе, непрерывно поворачивая оба диска. При этом поверхности дисков не останутся плоскими: поверхность верхнего диска становится вогнутой, а нижнего — выпуклой. В этом процессе имеет значение нажим на края нижнего диска при сдвигании верхнего.

Шлифуют диски на станке. Это может быть бочка или круглый стол, на которых при помощи доски и четырех шурупов с надетыми на них пробками или отрезками толстостенной резиновой трубки прочно закрепляется один из дисков (нижний). К верхнему диску можно приклеить смолой деревянную ручку. Шлифующий постепенно перемещается вокруг бочки, двигая верхний диск от себя и к себе на $^1/_4$—$^1/_3$ радиуса и одновременно понемногу поворачивая его вокруг оси.

Можно пользоваться и станочком, показанным на стр. 200. На толстой доске — основании — укреплен вращающийся круглый или шести-, восьмиугольный столик. В его центре наглухо закреплена ось, вращающаяся в основании. Столик может опираться на «утопленные» в основании три стальных шарика. На таком станочке работать удобнее: вместо того чтобы самому ходить вокруг стола, можно стоя или сидя поворачивать столик станка.

По окончании шлифовки поверхность зеркала полируют. На нижний диск (шлифовальник) наносится слой из сплава смолы с канифолью, разделенный сетью канавок на квадратики-фасетки (для лучшего контакта со стеклом и циркуляции полирующего вещества). Полируют специальными порошками: крокусом или полиритом с водой.

При изготовлении зеркала для телескопа требуется очень большая точность. Поверхность его не должна отклоняться от заданной более чем на 70 нм. Тем не менее и в домашних условиях можно проверить зеркало с такой точностью. Для этой цели служит так называемый *теневой прибор*, изобретенный французским физиком Фуко. Такой самодельный прибор из деревянных брусочков или деталей «Конструктора», лампочки от карманного фонаря и лезвия для безопасной бритвы поможет провести испытание зеркала.

Принцип работы теневого прибора таков (см. схему на стр. 201). В центре кривизны O испытываемого зеркала помещают искусственную звезду — точечный источник света 1 (например, в листовой фольге делают небольшой прокол и освещают сзади ярким светом), а в точке пересечения отраженных от зеркала лучей света (вершине конуса O') ставят тонкий плоский экран — «нож Фуко» 2 (например, лезвие бритвы). Если смотреть на зеркало 3 из-за экрана на расстоянии около 25 см (для нормального глаза) и медленно пересекать вершину конуса лучей «ножом Фуко», то можно увидеть «теневую картину», по которой судят о форме поверхности зеркала. Если все лучи сойдутся в одной точке,— значит, зеркало имеет сферическую форму и все зеркало будет «гаснуть» одновременно (б). Если кривизна поверхности зеркала отклоняется от заданной, то фокусы разных зон, например фокус середины зеркала и фокус краевой зоны, не совпадут (а): при более длинном фокусе краевой зоны и более коротком — середины зеркала образуются «завал» на краю и «яма» в центре (реальные отклонения поверхности от сферы измеряются долями микрона).

Вогнутая сферическая поверхность отполированного зеркала отражает всего около 5% падающего на него света, поэтому ее покрывают светоотражающим слоем алюминия или серебра. Алюминируют зеркало только в специальной установке, а серебрить можно и в домашних условиях.

Подробнее о том, как построить телескоп-рефлектор, рассказывается в книге М. С. Навашина «Телескоп астронома-любителя» («Наука», 1967).

В современных астрономических наблюдениях большую роль играют дополнительные приборы, присоединяемые к телескопу. Это или фотокамера, или спектрограф, или фотоэлектрический фотометр. Астроному-любителю тоже не следует ограничиваться простым рассматриванием небесных светил в телескоп. Ведь интересно иметь собственные снимки Солнца, Луны, звездного неба, метеоров. Полученные снимки иногда могут иметь и научную ценность.

На окулярный конец телескопа можно насадить легкую, но прочную камеру из фанеры. Сзади в камере нужно сделать пазы для кассет к фотопластинкам 6×9 см. Внутри камеру следует зачернить тушью, а место присоединения к телескопу изнутри оклеить черным бархатом, чтобы не проникал посторонний свет.

Можно воспользоваться фотоаппаратами «ФЭД», «Зоркий», «Зенит»; особенно удобны так называемые «зеркалки» типа «Зенит» — их оптическая система позволяет видеть светило в момент фотографирования. О фотографировании небесных тел рассказывается в статье «Наблюдения неба любителем астрономии». Мы лишь напомним, что всякое дополнительное приспособление, присоединяемое к телескопу (фотокамера, солнечный экран), надо уравновесить, например надеть на объективную часть трубы металлические кольца. Усиливается и общий противовес на другом конце оси склонений (или горизонтальной оси). Все насадки должны быть жесткими и прочными. В связи с тем что расстояние между камерой и объективом должно изменяться (для наводки на фокус), камеру крепят к окулярной трубке, а не к главной трубе. Если имеется возможность, для телескопа надо построить небольшой павильон с откидывающейся крышей (см. ст. «Наблюдения неба любителем астрономии»). Особенно это важно для самодельного рефлектора. Переносить его каждый раз из помещения на улицу и обратно сложно: из-за разности температур изменяется форма зеркала, каждый раз приходится заново производить установку по Полярной звезде и т. д.

В последние годы у нас развернулось широкое движение за организацию народных обсерваторий. Их уже несколько десятков. Инициатива в их создании принадлежит любителям астрономии, общественным организациям и органам народного просвещения.

Народные обсерватории чаще всего создаются при Дворцах культуры, при Домах пионеров, планетариях, в парках и т. д.

Во всех народных обсерваториях любители астрономии ведут активные наблюдения и распространяют астрономические знания среди населения.

Наблюдения неба любителем астрономии

Многих из тех, кто серьезно заинтересовался астрономией, увлекают наблюдения небесных светил и явлений. Начинать такие наблюдения лучше с детального ознакомления с расположением созвездий и звезд на небосводе в разное время суток и года. Затем нужно разработать программу любительских наблюдений и включить в нее то, что можно наблюдать с помощью имеющихся приборов. Это прежде всего Солнце и солнечная активность, Луна, планеты, метеоры, искусственные спутники Земли, кометы, переменные звезды, серебристые облака.

Астрономические наблюдения лучше вести со специально оборудованной площадки или обсерватории. В городе такой наблюдательный пункт можно устроить во дворе или на своем балконе. Астрономическому кружку лучше оборудовать наблюдательную площадку или обсерваторию при школе, Доме пионеров, станции юных техников. В сельской местности условия для любительских наблюдений неба гораздо лучше: там легче выбрать место, с которого хорошо обозревается небосвод.

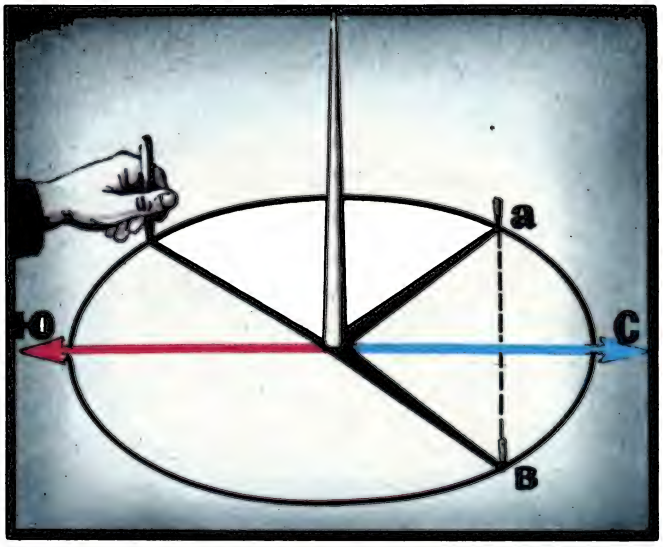
Организация специального наблюдательного пункта, будь то открытая площадка или павильон-обсерватория, начинается с определения полуденной линии, магнитного склонения и географических координат данного пункта.

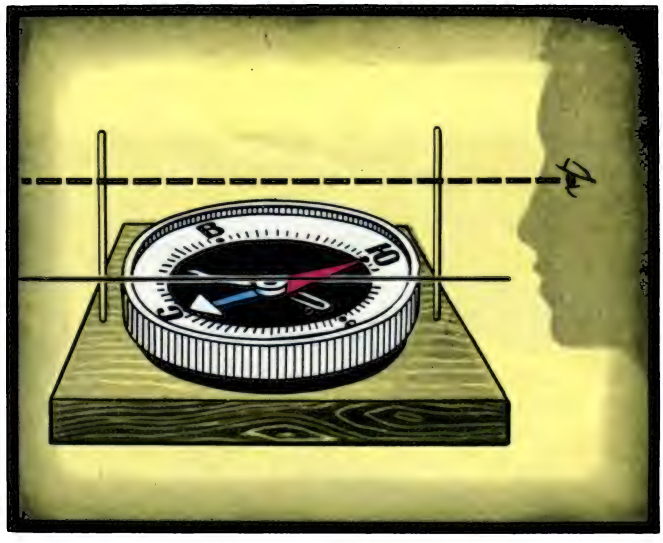
Полуденную линию определяют по тени гномона — вертикально установленного на ровной площадке столбика с заостренной верхушкой. В безоблачную погоду, часа за два до полудня, заметьте на конце тени гномона точку *а* (см. рис. на стр. 205) и радиусом, равным расстоянию этой точки до основания стержня, опишите окружность. Перемещаясь по часовой стрелке, тень гномона до полудня будет укорачиваться, а после полудня она станет удлиняться и в какой-то момент своим концом коснется окружности. Эту точку *в* также заметьте и проведите хорду *ав*. Через середину хорды и основание гно-

Слева — одно из самых увлекательнейших занятий — наблюдение неба в телескоп.

Вверху — так определяют полуденную линию.

Внизу — определение величины магнитного склонения.





мона проведите прямую. Это и будет полуденная линия, или географический меридиан, проходящий через основание гномона. Тот конец полуденной линии, который проходит через дугу хорды, направлен на Северный полюс, а противоположный конец указывает направление на Южный полюс. Направление восток — запад укажет перпендикуляр к полуденной линии.

Если полуденную линию совместить с прямой, обозначенной на планшетке, то, установив на прямой компас, можно заметить, что направление магнитной стрелки не совпадает с полуденной линией. Это объясняется тем, что магнитные и географические полюсы Земли не совпадают. Угол между северным концом магнитной стрелки и полуденной линией называется *магнитным склонением*. Его надо учитывать при пользовании приборами с магнитными стрелками. В районе Москвы, например, магнитное склонение равно 8° к востоку. А его величину в месте расположения своей площадки определите сами.

Географические координаты данного пункта приближенно можно найти по географической карте. Для этого через точку, изображающую пункт на карте, проведите меридиан и параллель, а на рамке карты отсчитайте широту и долготу.

Отмерив на полуденной линии 4 м к северу от гномона, поставьте деревянный или кирпичный столб высотой около 1 м. На расстоянии 2 м от него к северу, югу, востоку и западу установите еще 4 столба с круглыми или квадратными площадками на них. На этих столбах-столиках устанавливают необходимые для наблюдений приборы (стр. 206).

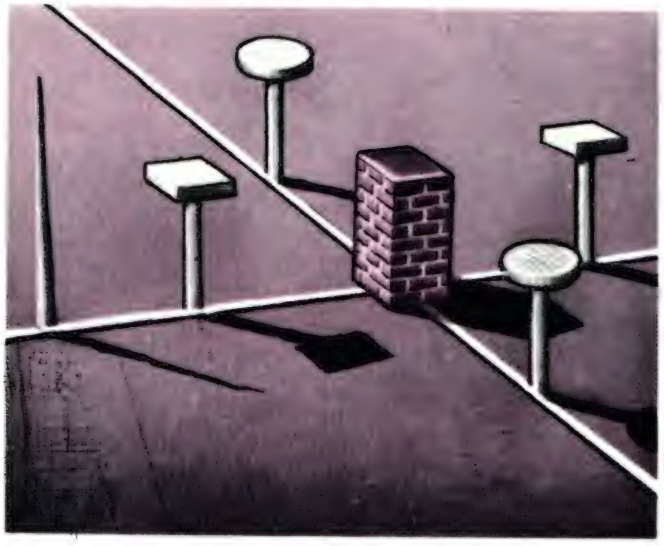
На наблюдательной площадке можно соорудить павильон-обсерваторию. Площадь павильона может быть 3×2 м, а высота стен — 2 м. Угловые столбы врывают в грунт примерно на 1 м, а каркас монтируют из брусьев поперечным сечением 150× ×100 мм. Стены делают из 20-миллиметровых досок, которые вертикально прибиваются к брусьям каркаса. Крышу обшивают кровельным железом, а чтобы части крыши легко раскрывались, их скрепляют дверными петлями. Входную дверь делают с северной стороны.

В середине павильона на кирпичном столбе высотой около 1 м устанавливают телескоп или самодельный, или заводского изготовления. В павильоне должно быть электроосвещение. На стенах развешивают карты звездного неба, Луны, рисунки и фотоснимки планет, звездных скоплений, схемы приборов, используемых в астрономических наблюдениях.

Павильон может иметь и цилиндрическую форму с вращающимся куполом. В этом случае по верхнему обрезу стены прокладывают металлическое кольцо из углового или швеллерного железа и по нему, как по рельсу, на специально изготовленных колесах или катках вращается полусферический купол. Люк купола обеспечивает обзор полосы неба от горизонта до зенита. Он закрывается подвижным сектором, который петлей закреплен в вершине купола, а его нижняя часть скользит по направляющей.

При желании и настойчивости любитель астрономии может сделать немало полезного для науки. Известны имена многих любителей, которые обогатили науку о Вселенной важными открытиями. Но это не означает, что астрономические открытия де-

Простейшая наблюдательная площадка.



Павильон-обсерватория с раскрывающейся крышей.

лаются быстро и легко. В наше время астрономия достигла такой высокой степени развития, что только длительные и систематические наблюдения могут дать полезные для науки результаты. Поэтому в дальнейшем будет указываться, какие наблюдения могут представлять научную ценность, а какие будут иметь лишь познавательное значение для самих любителей астрономии.

Наблюдения Солнца и солнечных затмений

Наблюдать Солнце целесообразно в телескоп с диаметром объектива не менее 60 мм либо визуально, либо фотографически. При этом надо помнить, что смотреть на Солнце невооруженным глазом и тем более в телескоп нельзя — можно мгновенно и навсегда потерять зрение. Невооруженным глазом наблюдают Солнце через предварительно засвеченную и обработанную негативную фотопластинку, которая поглощает большую часть солнечного света.

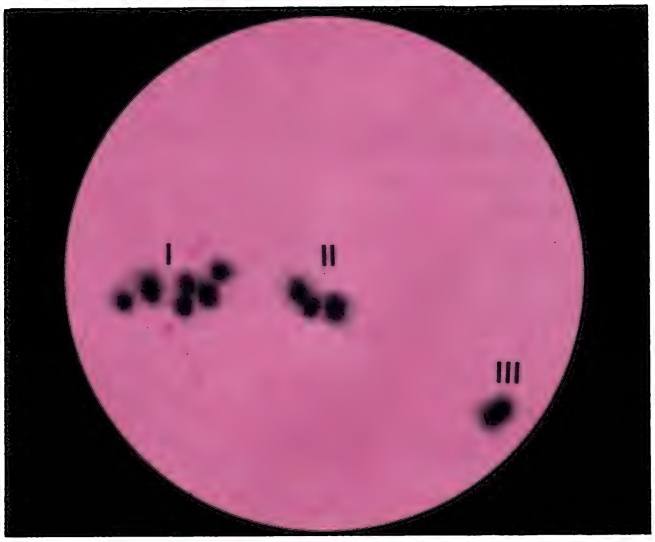
При визуальных наблюдениях Солнца к окуляру телескопа прикрепляют устройство для проецирования увеличенного изображения солнечного диска на бумажный экран. Для зарисовки наблюдаемой картины заранее готовят листки чертежной бумаги и на каждом из них вычерчивают окружность диаметром 100 мм. С окружностью совмещают изображение солнечного диска и быстро зарисовывают видимые пятна. Такие зарисовки легче обрабатывать с помощью таблиц, которые приводятся в руководствах для любителей астрономии.

Для фотографирования Солнца к телескопу вместо окуляра прикрепляют специальную фотокамеру с затвором и кассетой. Изображение солнечного диска на негативе должно иметь диаметр 100 мм, чтобы можно было печатать с него на фотобумаге контактным способом.

Можно фотографировать Солнце и узкопленочным фотоаппаратом типа «Зенит», вывинтив из него объектив и используя переходную втулку. С пленки изображение увеличивается на фотобумагу до диаметра 100 мм. В зеркальную систему фотоаппарата смотрят только через достаточно затемняющий светофильтр.

Пластинка и пленки для фотографирования Солнца должны иметь самую малую чувствительность. Продолжительность экспозиции определяют опытным путем. Чтобы шторка затвора не сгорела, в переходную втулку вставляют светофильтр или объектив телескопа диафрагмируют настолько, чтобы получилось неяркое, но четкое изображение солнечного диска. Наводят телескоп с фотокамерой на Солнце по тени, отбрасываемой прибором на подставленный экран. Наводку на фокус рекомендуется делать по Луне и замечать положение кремальеры (специального приспособления), соответствующее точному фокусу.

Образец зарисовки солнечных пятен. Группы пятен обозначены римскими цифрами.



По зарисовкам и фотоснимкам Солнца, если они производятся систематически, можно вести регистрацию солнечной активности. Для этого каждый раз надо считать количество пятен и групп пятен на диске Солнца, помня, что за группу принимают не только несколько близко расположенных пятен, но и одиночное пятно. Показателем (индексом) солнечной активности является сумма удесятеренного числа групп плюс общее число пятен. Эта величина называется относительным числом солнечных пятен или числом Вольфа. Так, например, на солнечном диске, изображенном на рисунке, отмечены 3 группы, всего 10 пятен. Значит, число Вольфа будет равно: 30+10=40.

В СССР хорошо налажена Служба Солнца. Она пользуется современными мощными телескопами, и поэтому любительские наблюдения солнечной активности не имеют научной ценности, но для самих любителей астрономии, несомненно, интересны. Ведя наблюдения в течение нескольких лет, можно строить графики солнечной активности, отмечать зависимость числа гроз, полярных сияний и других явлений от солнечной активности.

Наблюдения полярных сияний, как одной из форм влияния солнечной активности на состояние верхних слоев земной атмосферы, представляют особый интерес для любителей астрономии, живущих в северных районах. Описывая явление, особое внимание обращают на изменения в окраске и форме сияния, на направление движения отдельных его частей и продолжительность всего явления, отмечают начало, наибольшую интенсивность и конец сияния. К описанию прилагают зарисовки или фотоснимки.

Солнечные затмения для любителя астрономии исключительно интересны. Полное солнечное затмение — явление сравнительно редкое. Оно позволяет видеть внешние слои атмосферы Солнца — хромосферу и корону, которые в обычных условиях наблюдать нельзя из-за освещенности земной атмосферы. Частные затмения бывают чаще, и их наблюдать также очень интересно.

Во время затмения можно наблюдать многие геофизические явления в атмосфере и на поверхности Земли. Опытному любителю астрономии доступны зарисовки и фотографирование солнечной короны и протуберанцев во время полного затмения, актинометрические и метеорологические наблюдения, фотографирование фаз частного затмения и многое другое.

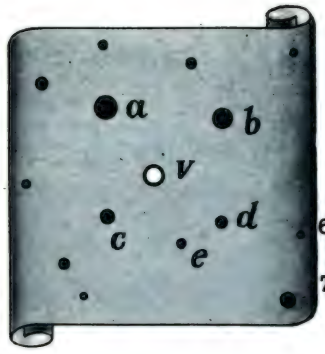
Подробнее о наблюдениях Солнца, солнечной активности и солнечных затмений вы прочтете в книгах: В. В. Шаронов. Солнце и его наблюдения. Изд. 2, Гостехиздат, 1953; сб. ст. под ред. А. А. Михайлова «Солнечные затмения и их наблюдения», Физматгиз, 1960.

Наблюдения переменных звезд

Наблюдения переменных звезд наиболее доступны для любителей астрономии и имеют научную ценность. Их можно вести, имея шестикратный бинокль и звездный атлас. Наблюдатель должен определить блеск (видимую яркость) переменной звезды в звездных величинах в каждый момент наблюдения и построить график изменения блеска за возможно более длительный период времени. Анализ такого графика позволяет вскрыть основные закономерности изменения блеска переменной звезды и по ним судить о ее физической природе.

Программу наблюдений составляют после ознакомления с соответствующей литературой и определения условий видимости заинтересовавших наблюдателя звезд. Начинать лучше с наблюдений хорошо изученных переменных звезд и лишь потом переходить к наблюдениям менее изученных и совсем неизученных звезд.

Блеск переменной звезды определяют путем сравнения с блеском соседних (непеременных) звезд. Удобнее всего это делать по методу Блажко — Нейланда, который состоит в следующем. Зная (хотя бы приблизительно) амплитуду изменения блеска переменной, наблюдатель выбирает в ее окрестностях



Карта окрестностей переменной звезды.

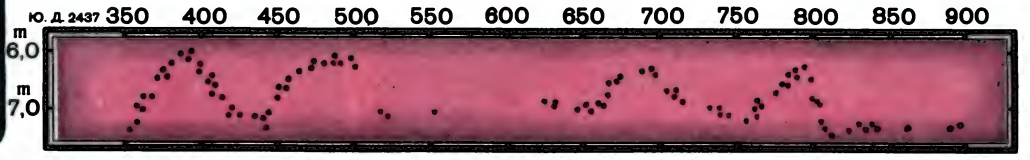


График изменения блеска переменной звезды.

звезды сравнения. Блеск некоторых из них должен быть примерно такой, какой бывает у переменной в максимуме ее блеска, у других — соответствовать блеску переменной в минимуме, у третьих — иметь промежуточное значение. Затем составляют карту окрестностей данной переменной с обозначением звезд сравнения.

В каждый момент наблюдения переменная может быть либо равна по блеску одной из звезд сравнения, либо несколько ярче одной и слабее другой звезды сравнения. В первом случае переменной приписывается та звездная величина, которую имеет звезда сравнения, равная по блеску переменной. Во втором случае блеск переменной сравнивается с блеском двух звезд сравнения посредством условных единиц блеска — степеней.

Если переменная, например, ярче звезды сравнения d, но слабее звезды сравнения c и при этом разность блеска между переменной и d в два раза больше, чем разность между переменной и c, то запись может иметь вид: $c1v2d$, где v — переменная звезда. Зная блеск звезд сравнения в звездных величинах (например, $c=6{,}7$; $d=7{,}0$), определяют разницу в их блеске, также выраженную в звездных величинах: 7,0—6,7=0,3. Что же касается разности в блеске между данными звездами сравнения в условных степенях, то она равна сумме степеней, записанных слева и справа от переменной, т. е. 1+2=3. Теперь находим значение условной степени, выраженное в звездных величинах: 0,3:3=0,1. И наконец, прибавив к звездной величине c 0,1 или вычтя из звездной величины d 0,2, получаем блеск переменной звезды в звездных величинах. Он будет равен: 7,0—0,2=6,8.

В журнале наблюдений данной переменной звезды записывают порядковый номер наблюдения, дату и время наблюдения, оценку блеска переменной в степенях, вычисленное значение блеска переменной в звездных величинах. В примечании характеризуют условия наблюдений. Пример: 87. 1970 г., август, 27. 22 ч 45 мин. $c1v2d$ 6,8. Воздух чист и спокоен.

При обработке наблюдений дату и время пересчитывают в так называемые сутки юлианского периода, счет которых ведется с 4713 г. до н. э. Приведенная выше дата соответствует 2 440 826 сут юлианского периода. (Таблицу пересчета в дни юлианского периода см. в «Справочнике любителя астрономии» П. Г. Куликовского или в «Постоянной части Астрономического календаря», а для текущего года в «Астрономическом календаре».) Поясное декретное время после пересчета во всемирное и в доли суток составило 0,3229 сут (при ведении астрономических наблюдений сутки принято считать от полудня до полудня). Таким образом, указанные дата и время в сутках и долях суток юлианского периода составляют 2 440 826, 3229, и, следовательно, наблюдение в обработанном виде будет записано так: 2 440 826, 3229. 6,8. Такая запись очень удобна, так как она позволяет легко определить промежуток времени, прошедший между двумя моментами наблюдений, путем вычитания меньшего из большего.

По мере накопления наблюдений строят график изменения блеска переменной звезды и уточняют или заново определяют амплитуды и период изменения блеска данной звезды.

Области неба, где много переменных звезд, можно фотографировать и исследование вести по снимкам, но для этого нужен телескоп с часовым механизмом и фотокамера со светосильным объективом большого диаметра.

Подробнее о переменных звездах рассказано в книге В. П. Цесевича «Переменные звезды и способы их исследования», «Педагогика», 1970. См. также «Справочник любителя астрономии» П. Г. Куликовского, «Наука», 1971.

Наблюдения Луны и планет

Наблюдения Луны и планет представляют большой познавательный интерес. Если они производятся в телескоп с диаметром объектива 100 мм и более, то такие наблюдения планет могут иметь и научную ценность.

Наблюдая Луну, можно описывать и зарисовывать наиболее примечательные образования на ее поверхности. Это помогает запоминать названия равнин, гор, кратеров. Во время лунных затмений следят за изменением освещенности и цвета лунной поверхности. Подробнее о наблюдениях Луны рассказано

Так наблюдают метеоры через круг.

в книге Н. Н. Сытинской «Луна и ее наблюдение», Гостехиздат, 1956.

Визуальные наблюдения планет ведутся с целью зарисовок и описания видимых деталей их поверхности. Очень важно при этом выбрать увеличение (не обязательно самое большое), обеспечивающее наибольшую четкость изображения, и терпеливо ждать момента, когда наступит мгновение самого спокойного состояния воздуха вдоль луча зрения. В такой момент хорошо видны детали поверхности наблюдаемой планеты; одну из деталей надо запомнить и по памяти изобразить на рисунке. Затем приходится вновь ждать подходящего момента для зарисовки другой детали. Так, в течение 10—15 мин можно получить рисунок всей видимой части планеты. Ценность таких зарисовок увеличивается, если их делают одновременно и независимо друг от друга несколько наблюдателей. Это позволяет исключить индивидуальные ошибки каждого наблюдателя и при окончательной обработке рисунка получить более достоверную картину наблюдаемой планеты.

Луну и планеты Венера, Марс, Юпитер и Сатурн можно фотографировать. Для этого к окулярному концу телескопа переходной втулкой прикрепляют фотоаппарат типа «Зенит» или самодельную фотокамеру. Можно получать снимки Луны и планет

и с окулярным увеличением, но в этом случае телескоп должен иметь часовой механизм.

Подробнее о наблюдениях планет читайте в книге В. А. Бронштэна «Планеты и их наблюдение», Гостехиздат, 1957.

Наблюдения комет

Наблюдения комет можно вести при помощи самого скромного телескопа и даже бинокля. Если вы хорошо знаете звездное небо и систематически просматриваете его в телескоп, то не исключено, что вам удастся открыть новую комету.

Вдали от Солнца комета имеет вид туманного пятнышка. По мере приближения к Солнцу у кометы развивается светящийся хвост и она становится более заметной. Наблюдатель должен постараться точно определить положение кометы среди звезд (с помощью достаточно подробного звездного атласа) и изучить видимую структуру головы и хвоста кометы. Можно сфотографировать любую яркую комету, но телескоп должен быть снабжен часовым механизмом.

Инструкция для наблюдения комет помещена в «Справочнике любителя астрономии» П. Г. Куликовского, а также в «Постоянной части Астрономического календаря». Изд. 5, Физматгиз, 1962.

Наблюдения метеоров

Любители астрономии могут провести наблюдения метеоров при сравнительно скромных возможностях; результаты этих наблюдений нередко имеют научную ценность.

Наблюдая метеоры, надо хорошо знать расположение всех созвездий и ярких звезд, звездные величины и цвета возможно большего количества звезд, угловые расстояния между наиболее примечательными звездами. Начинающим наблюдателям необходимо также научиться определять продолжительность очень малых интервалов времени, в течение которых может быть виден метеор. Для этого надо тренироваться в счете секунд, принимая на слух удары секундного маятника, метронома или следя за движением секундной стрелки.

Простейшим видом визуальных наблюдений является счет метеоров. Выбирают определенную область неба и в течение нескольких часов обозревают ее, учитывая количество метеоров, увиденных в течение каждого из пятиминутных интервалов, следующих друг за другом.

При более детальных наблюдениях определяют блеск метеора в звездных величинах, его цвет, длину видимого пути и расстояние в градусах середины метеорного следа от центра обозреваемой области неба. Желательно определять и угол положения метеора, т. е. угол между отвесной линией, проходящей через центр обозреваемой области неба, и видимым путем метеора, начало которого мысленно совмещается с этим центром. Отсчет ведется по часовой стрелке.

В случае, когда ведутся наблюдения метеорных потоков, центр обозреваемой области неба выбирается вблизи радианта данного потока. Делают это, ориентируясь по звездам.

Наибольший научный интерес представляют наблюдения метеоров в следующих областях неба:

1) восточной стороне небосвода с центром, имеющим зенитное расстояние $Z=30°$ и азимут $A=270°$;

2) западной стороне небосвода с центром в точке, где $Z=30°$ и $A=90°$;

3) северной стороне небосвода с центром в точке, где $Z=30°$ и $A=180°$.

Рекомендуется также обозревать южную сторону небосвода с центром в точке, где $Z=30°$ и $A=0°$.

Наблюдения метеоров удобнее вести вдвоем: один наблюдает, другой ведет запись под диктовку. Еще лучше, если одну и ту же область неба обозревают несколько пар наблюдателей независимо друг от друга. Это позволит устранить возможные ошибки наблюдателей и их секретарей.

В журнале наблюдений секретарь записывает порядковый номер метеора, момент полета (с точностью до $1''$), звездную величину (с точностью до 0,1), длину видимого пути метеора, угол положения, наличие следа, время его видимости и характеристику изменений.

Более точные результаты визуальных наблюдений метеоров получаются, если наблюдения ведутся в строго ограниченной области неба. Перед наблюдателем на расстоянии 1 м от глаз устанавливается проволочный круг диаметром 1 м. Плоскость круга располагается перпендикулярно лучу зрения (см. стр. 209). Наблюдатель сосредоточивает свое внимание только на том участке неба, который он видит через круг. В журнале наблюдений в данном случае дополнительно отмечают положение метеора относительно рамки.

Фотоснимок серебристых облаков.

При телескопических наблюдениях метеоров можно использовать телескоп с большим полем зрения или бинокль. Прибор направляется в одну из указанных выше точек небосвода или в точку, расположенную в 3—4° от радианта метеорного потока. В последнем случае выбирают не очень яркую звезду и держат ее в центре поля зрения в течение всего времени наблюдения. Записи в журнале наблюдений те же, что и при наблюдениях с кругом. Но длину пути метеора оценивают в десятых долях диаметра поля зрения телескопа или бинокля и обязательно указывают основные данные прибора.

Наибольшую научную ценность представляют фотографические наблюдения метеоров. Фотографировать метеоры можно любым фотоаппаратом, но лучше с оптикой большей светосилы. Пластинки или пленки выгоднее брать изопанхроматические, с наибольшей чувствительностью. Для фотографирования метеоров аппарат направляют либо в зенит, либо в область радианта метеорного потока и устанавливают неподвижно.

Продолжительность экспозиции в безлунную ночь до 2 ч. Полет яркого метеора регистрируют в журнале наблюдений: указывают время полета и примерное положение на небе. Можно нанести его путь на копию звездной карты. Чтобы удобнее было отождествлять звезды на фотоснимке, надо во время экспозиции через каждые 15—20 мин делать 10-секундные перерывы, закрывая объектив картонкой.

Наблюдая болиды, делают подробные описания и зарисовки. Обязательно указывают место наблюдения, время, направление полета болида, его яркость и цвет, отмечают звуковые явления, характеризуют остающийся след.

Подробнее о наблюдениях метеоров смотрите в «Справочнике любителя астрономии» и в «Постоянной части Астрономического календаря».

Наблюдения искусственных спутников Земли

Искусственные спутники может наблюдать каждый. В одних случаях отмечают путь движения спутника на звездной карте и время его прохождения около какой-нибудь яркой звезды. В других случаях фотографируют видимую трассу движения спутника и также отмечают момент его прохождения около звезды.

Если есть радиоприемник, можно с помощью специальной приставки принимать радиосигналы спутника и записывать их на магнитную пленку, отмечая моменты наилучшей слышимости и обязательно записывая при этом дату, время начала и конца приема.

Подробнее о наблюдениях искусственных спутников Земли читайте в книге С. А. Каплана «Как увидеть, услышать и сфотографировать искусственные спутники Земли», Физматгиз, 1958.

Наблюдения серебристых облаков

Серебристые облака — интереснейшее, но еще малоизученное явление природы, поэтому любительские наблюдения их имеют большую ценность. Серебристые облака наблюдаются в летнее время в полосе широт от 50 до 65°. Они видны только во время сумеречного освещения стратосферы, когда угол погружения Солнца под горизонт составляет от 5 до 18°. В это время солнечные лучи освещают только верхние слои атмосферы, где на высоте 80—85 км и образуются серебристые облака. Поэтому в отличие от обычных облаков, которые в сумерки кажутся темными, серебристые облака ярко светятся. Они наблюдаются в северной стороне, невысоко над горизонтом.

Наблюдая серебристые облака, надо подробно описывать их вид и изменения формы, отмечать направление движения, время появления и исчезновения. Еще лучше через равные интервалы времени зарисовывать и фотографировать серебристые облака.

Звезды на рисунке должны быть в таком же положении относительно видимого горизонта, как и на небе в момент наблюдений.

Важно отметить резко выделяющиеся детали облаков и приложить к рисунку их подробное описание.

Особую ценность имеют фотоснимки серебристых облаков. Фотографировать их лучше аппаратом с более светосильной оптикой. Если светосила объектива будет 1:2 и чувствительность пленки 130—180 единиц по ГОСТу, то хорошие снимки можно получить при экспозиции в 1—2 с. На снимке должны быть видны основная часть поля облаков и четко выделяющиеся силуэты строений или деревья. После съемки определяют азимуты ярких звезд и этих объектов.

Инструкцию для наблюдений серебристых облаков читатель найдет в «Постоянной части Астрономического календаря».

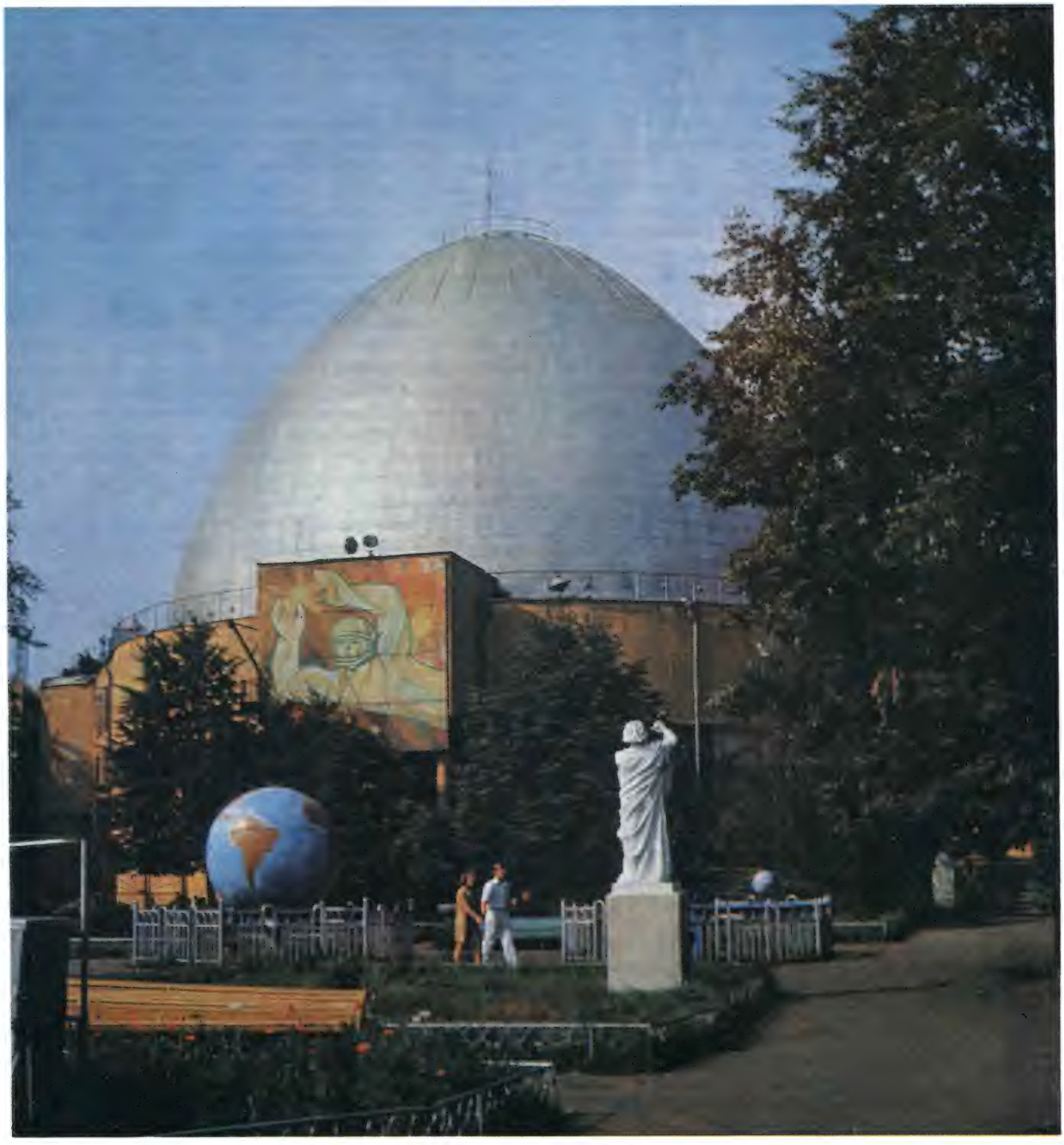
* *
*

Наши советы по проведению любительских наблюдений неба лишь самые общие, поэтому мы и рекомендуем любителю астрономии различные пособия, книги, специальные руководства, данные как в этой статье, так и в библиографическом указателе ко всему разделу этого тома. Начинающим любителям в первую очередь следует ознакомиться с книгой М. М. Дагаева «Наблюдения звездного неба», «Наука», 1969 (изд. 2-е, 1972).

По вопросам обработки и дальнейшего использования результатов наблюдений можно обращаться во Всесоюзное астрономо-геодезическое общество по адресу: 103009, Москва, К-9, абонементный ящик № 918, ЦС ВАГО, Астрономическая секция. По этому же адресу можно выписать инструкции и различные пособия для наблюдений.

Планетарий

Московский планетарий.



На полюсе хотите побывать? Или на экваторе? Может быть, умчаться на Луну или на Марс? Эти и многие другие увлекательные путешествия по Земле и в космическом пространстве можно совершить, сидя в зрительном зале большого планетария.

Медленно погружается в темноту круглый зал с полотняным куполом, имеющим форму вогнутого полушария. Звучит торжественная мелодия, и вдруг в непроглядном мраке над вашей головой разом вспыхивают сотни звезд.

Сердце этой искусственной Вселенной — аппарат планетарий точно воспроизводит видимые невооруженным глазом светила и их движение на протяжении суток. Но в природе суточное вращение неба происходит сравнительно медленно, а аппарат планетарий может ускорить это вращение в сотни раз, сократив сутки до четырех и даже до одной минуты. За те же четыре или одну минуту в планетарии можно «прожить» целый год! Благодаря ускорению движений многие небесные явления видны в планетарии с такой наглядностью, какая недоступна при непосредственных наблюдениях неба.

В планетарии можно сравнить наблюдаемые явления с действительными. Например, аппарат показывает видимое сложное, петлеобразное движение планет на фоне звездного неба. Демонстрируемый же на искусственном небосводе короткометражный фильм разъясняет причину видимого явления: планеты движутся в пространстве вокруг Солнца всегда в одном направлении, но их движения выглядят петлеобразными потому, что наблюдаются с Земли, также движущейся вокруг Солнца.

Аппарат может показать вид звездного неба и суточное движение небесных светил для наблюдателя, находящегося на любой географической широте. Другими словами, можно «переселиться» в любую точку земного шара, притом в любое время года, дня и ночи. Вы, например, улетаете из Москвы 22 июня и мчитесь на север со скоростью около 100 км/с. Не пройдет и 40 с, как вы уже оказались на Северном полюсе Земли, разумеется, в тот же день, 22 июня. В это время там Солнце расположено на небе так низко, как в Москве во второй половине февраля или октября, но движется оно совсем необычно: нигде не опускаясь, Солнце совершает полный круг над горизонтом.

В планетарии можно «прожить» на полюсе Земли целый год за 1 мин и увидеть, как незаходящее Солнце Арктики, совершая свои суточные круги, после 22 июня постепенно приближается к горизонту. 25 сентября оно опускается под горизонт и снова показывается из-за него лишь через 6 мес — 19 марта. Более полугода, 195 сут, длится на полюсе день, а светлое время, включая сумерки, — целых 8 мес, темная же полярная ночь длится 4 мес.

Только один раз в год восходит и заходит Солнце на полюсе. Звезды же никогда не восходят и не заходят: все они в любой день года движутся по кругам, параллельным горизонту; звезды северного небесного полушария всегда находятся над горизонтом, а звезды южного неба совсем не видны.

Мрак полярной ночи смягчают не только звезды: ежемесячно в течение двух недель светит незаходящая Луна. Нередко на небе загораются полярные сияния в виде разноцветных лучей или прихотливо извивающихся занавесей. И эти явления можно увидеть в некоторых планетариях.

За 2 мин аппарат планетарий переносит зрителей с полюса Земли на ее экватор. Никогда Солнце в самом южном пункте Советского Союза не поднимается так высоко, как весной и осенью, для наблюдателя, находящегося на экваторе Земли: в полдень 21 марта и 23 сентября оно проходит там точно над головой, через зенит. Здесь всегда равны продолжительность дня и продолжительность ночи. Ежедневно в течение 12 ч Солнце опаляет Землю своими знойными лучами, и, в отличие от суточного движения на полюсе, оно круто поднимается над горизонтом и так же круто опускается за горизонт.

На ночном небе земного экватора видны созвездия обоих полушарий неба, как знакомые нам созвездия северного неба, так и незнакомые по виду созвездия южного неба — Центавр, Южный Крест и др. Но звезды движутся там не так, как у нас, а, подобно Солнцу, круто поднимаются с востока и так же круто опускаются к горизонту. Нет ни одного незаходящего светила, все они восходят и заходят.

Большие планетарии оборудованы аппаратурой, позволяющей демонстрировать солнечные и лунные затмения, кометы, метеоры, болиды, «звездные дожди».

Без астрономических знаний и наблюдений нельзя ориентироваться в пространстве и времени, находить верный и кратчайший путь для морских, воздушных и космических кораблей, создавать географические карты, изучать магнитное поле Земли и предвидеть его изменения. Обо всем этом можно узнать в планетарии.

Как и другие науки, астрономия всегда была помощницей человека, расширяя его власть над природой и облегчая покорение ее сил. А в наше время перед астрономией открылось новое, беспредельное в прямом смысле этого слова поле практической деятельности.

В 1957 г. с территории Советского Союза поднялся первый в истории человечества искусственный спутник Земли; за ним последовали другие, потом космические корабли и автоматические межпланетные станции. Само небо приблизилось к нам, когда проник в космос первый космический капитан Юрий Гагарин и увидел Солнце одновременно со звездами в черной бездне мирового пространства.

Теперь в планетарии нетрудно совершить воображаемое космическое путешествие, полюбоваться нашей планетой, окруженной голубым ореолом атмосферы; можно наглядно показать движение искусственных спутников и космических кораблей на фоне звездного неба, стыковку, выход астронавтов в открытый космос и другие сложные эксперименты, впервые выполненные нашими прославленными героями, увидеть вокруг себя лунный ландшафт. На лекциях, посвященных освоению космоса, посетители узнают, с какой тщательностью советские ученые готовят каждый полет человека в космос, сколько строгих экзаменов и сложнейших тренировок должны выдержать космонавты.

Человечество уже открыло новую, космическую эру. Сбываются мечты гениального Циолковского. Человек уже побывал на Луне, и теперь не за горами путешествия на ближайшие планеты. А пока... космические полеты к Марсу можно совершать в планетарии.

Как устроен большой аппарат планетарий

Эта своеобразная «машина времени» внешне напоминает огромную гимнастическую гирю с двумя шарами. В центре каждого шара горит яркая лампа мощностью в тысячу ватт; снаружи она не видна, блестят только стекла — объективы шестнадцати проекционных фонарей. Под этими стеклами укреплены тончайшие металлические пластинки с крохотными круглыми отверстиями, некоторые из них меньше острия иглы. Сквозь отверстия проходят лучи лампы и создают на искусственном небе светлые кружки — изображения небесных светил.

Но это совсем не так просто. У каждого фонаря свой «небесный район», а на металлической пластинке просверлено больше сотни отверстий. Нужно разместить их точь-в-точь так же, как расположены на небе звезды, да еще точно рассчитать величину каждого отверстия: чем оно крупнее, тем ярче светит «его» звезда на небе планетария.

Даже при очень остром зрении на ясном небе невооруженным глазом в одном полушарии можно увидеть около 3000 звезд. Их и показывает аппарат проекционными фонарями одного шара.

Для чего же второй шар?

Ночью каждый из нас не раз любовался созвездиями Большой и Малой Медведиц, Цефея, Кассиопеи... Но есть и такие созвездия, которые никогда не видны в нашем, Северном полушарии — их можно наблюдать в тропическом поясе Земли, в Южном полушарии или... в планетарии: эти созвездия демонстрируются вторым шаром аппарата.

На каждом из больших шаров иногда установлен маленький. В нем также 16 фонарей. Когда загорается лампа внутри маленького шара, на искусственном небе появляются названия созвездий — небесный свод превращается в наглядную звездную карту.

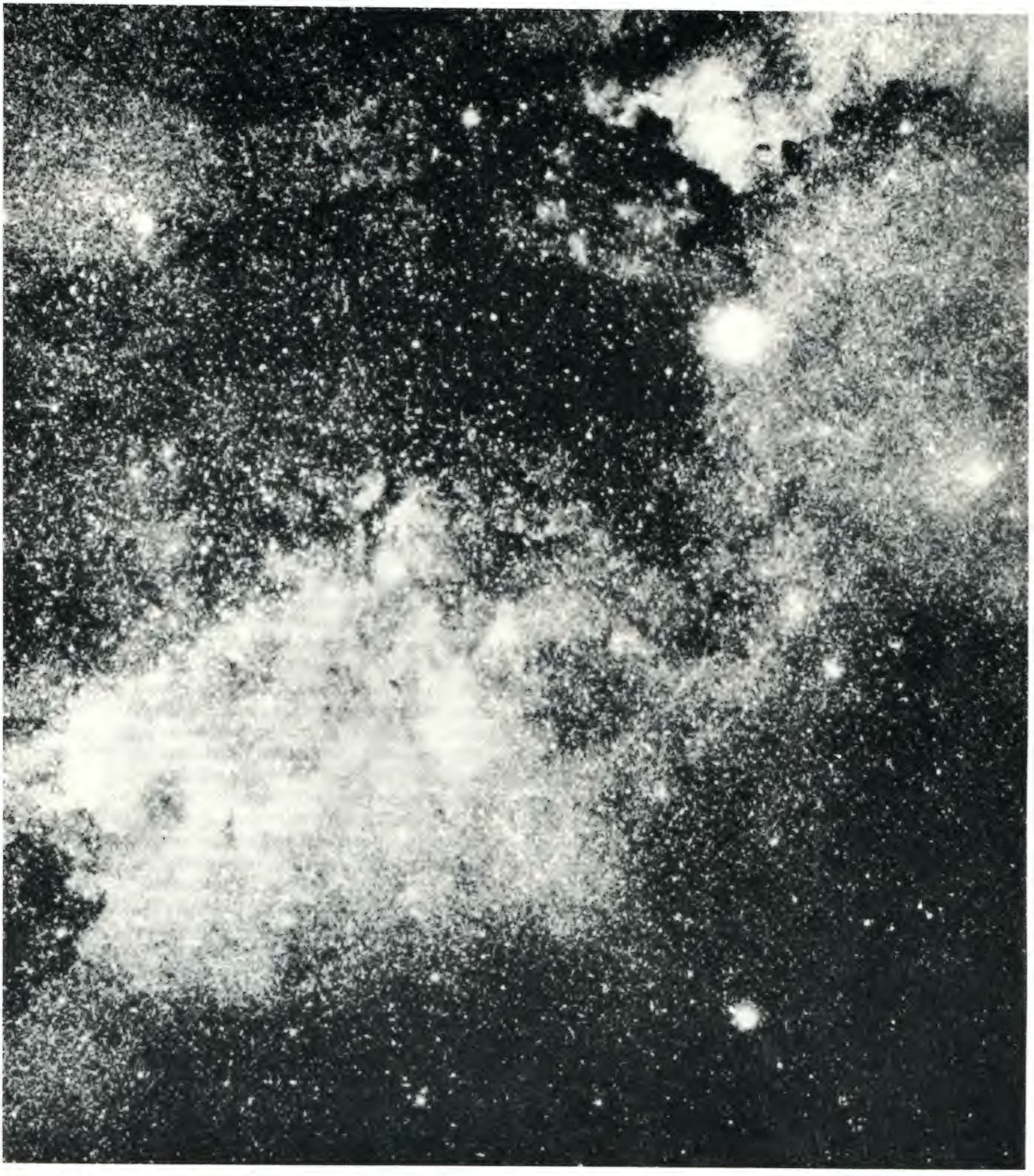
Специальный электромотор поворачивает аппарат вокруг главной оси, большие шары медленно вращаются и показывают суточное движение звезд, взаимное расположение которых не изменяется. Именно для этого все проекционные фонари, дающие изображения звезд, размещены в двух шарах и прочно скреплены друг с другом.

А как быть с Солнцем? Ведь оно в течение суток, подобно звездам, движется по небу с востока на запад, кроме того, на протяжении года медленно перемещается на фоне звезд в противоположном направлении — с запада на восток. Каждый месяц Солнце переходит из одного зодиакального созвездия в другое. Ясно, что для Солнца нужен свой, особый проекционный фонарь, не зависящий от больших шаров аппарата, показывающих звезды. И этот фонарь позволяет видеть явление, ненаблюдаемое с поверхности Земли: на фоне звездного неба Солнце перемещается по созвездиям Зодиака.

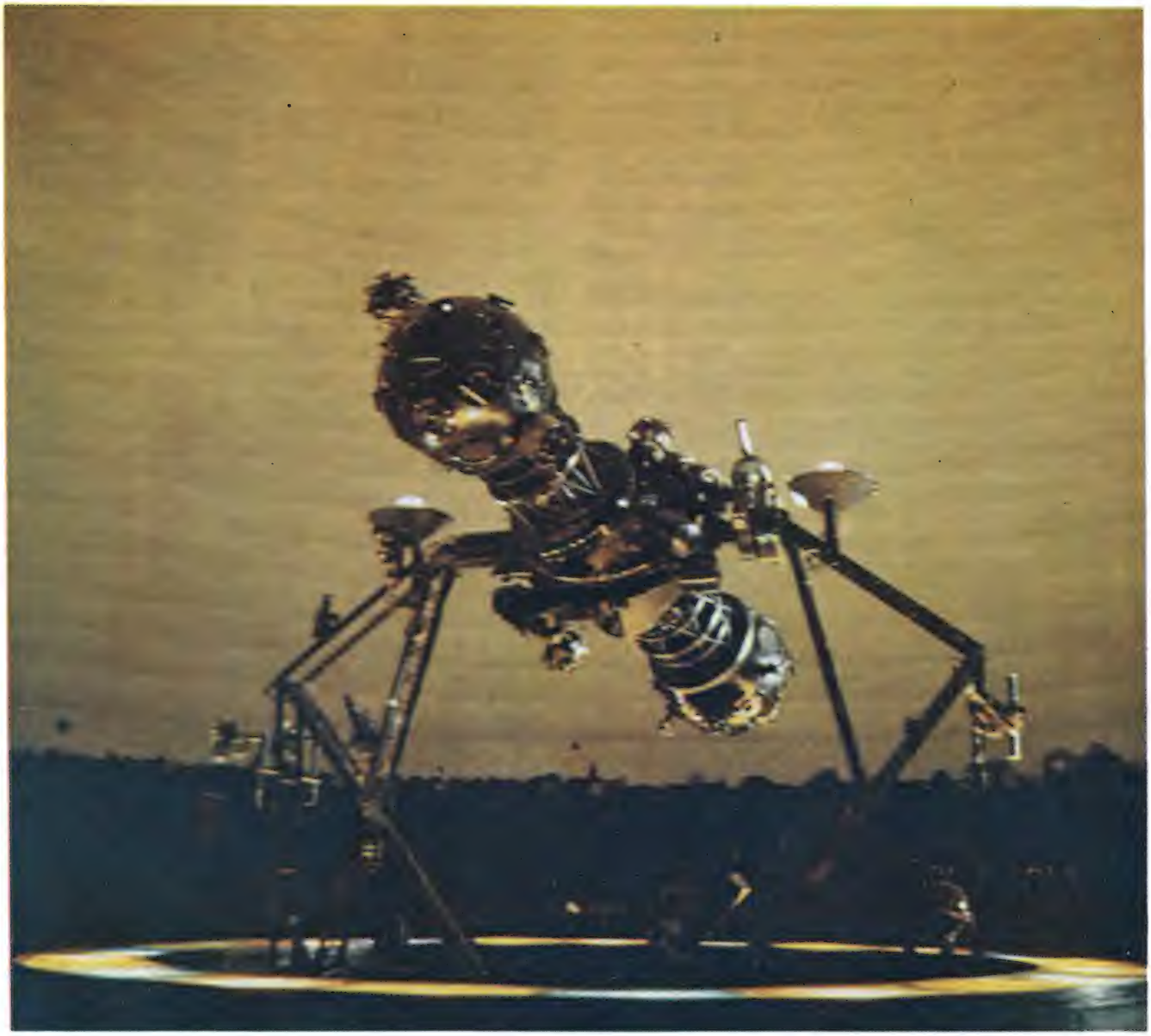
Планеты Меркурий, Венера, Марс, Юпитер и Сатурн демонстрируются обособленными проекционными фонарями, установленными между большими шарами аппарата. Особенно сложно устроен проекционный фонарь, демонстрирующий Луну: он показывает не только движение Луны, но и смену ее фаз.

В больших аппаратах установлено около ста проекционных фонарей, а демонстрация движения светил осуществляется семью электромоторами. Так, один из моторов поворачивает весь аппарат вокруг главной оси на 360° за 4 мин и, таким образом, за эти 4 мин показывает суточное движение светил, в действительности происходящее на протяжении 24 ч. Второй мотор вращает аппарат в 4 раза быстрее и позволяет сократить «сутки» до 1 мин, т. е. «ускоряет» время в 1440 раз.

Миллиарды звезд
во Вселенной. Многие из
них можно увидеть
при помощи своеобразной
«машины времени» —
аппарата планетарий.



Большой аппарат планетарий.



Перемещение Солнца, Луны и планет на фоне звезд осуществляется также двумя моторами: один сокращает продолжительность года до 4 мин, другой — до 1 мин, условно ускоряется течение времени более чем в 525 тыс. раз!

Специальный мотор поворачивает аппарат вокруг его горизонтальной оси, поднимая на желаемую высоту большие шары с проекционными фонарями, показывающими звезды, и тем самым демонстрирует вид звездного неба на любой географической широте. Именно с помощью этого мотора совершаются путешествия в любое место земной поверхности.

Наконец, еще один мотор позволяет увидеть интересное небесное явление, заметить которое в природе можно лишь на протяжении столетий. Дело в том, что направление земной оси в мировом пространстве медленно изменяется. Только астрономы сумели измерить ничтожно малую величину ежегодного поворота земной оси. Но пройдут десятки веков, и По-

люс мира, расположенный сейчас вблизи Полярной звезды, постепенно удалится от нее. Для наших далеких потомков через 13 тыс. лет полярной звездой будет уже Вега — главная звезда созвездия Лиры. Тогда в Северном полушарии можно будет любоваться созвездием Южного Креста, которое сейчас у нас не видно. А еще через 13 тыс. лет ось нашей планеты вновь вернется к нынешнему положению в пространстве. Этот медленный поворот земной оси, занимающий в природе 26 тысячелетий, аппарат планетарий показывает за 4 мин, условно ускоряя течение времени в 3,4 млрд. раз!

Планетарии оказывают большую помощь ученикам в изучении ими астрономии в школе. Ведь изучать видимые и истинные движения небесных тел без их наглядного изображения очень трудно, да еще приходится представлять себе на небе различные точки и небесные круги, без знания положений которых на небе многие явления становятся непонятными. Специальные проекционные фонари показывают ученикам расположение небесного экватора, небесного меридиана, эклиптики и других кругов небесной сферы, дают наглядное представление о системах небесных координат и их использовании в практической жизни.

* * *

Первым в СССР открылся Московский планетарий (5 ноября 1929 г.). Теперь в Советском Союзе установлено свыше 60 стационарных и много малых передвижных планетариев. Кроме больших аппаратов, установленных в Москве, Ленинграде, Волгограде и Риге, во многих городах есть малые планетарии различных систем, изготовленные в ГДР и СССР.

Конструкции малых планетариев проще, они обладают меньшими возможностями, чем описанный выше большой планетарий. Но и малые планетарии оборудуются дополнительными приборами, позволяющими расширить демонстрационные возможности аппаратов.

Непрерывно обновляются и обогащаются темы лекций, читаемых во всех планетариях. Да так и должно быть. Астрономия еще в древности была тесно связана с математикой и механикой, а теперь также с физикой, химией, метеорологией, геологией, геофизикой, географией. Обогащая другие науки, астрономия, в свою очередь, пользуется их достижениями. Вот почему планетарии не ограничиваются лекциями только на астрономические темы, а часто знакомят посетителей с использованием солнечной и атомной энергии, полупроводников и ультразвука, радиолокации и ракетной техники, радиоэлектроникой, квантовыми генераторами, показывают, как астрономические знания помогают преобразовывать природу, подчинять ее силы и богатства воле человека. Наши советские планетарии все больше становятся подлинно народными университетами.

Особое место в тематике больших планетариев занимают лекции, посвященные В. И. Ленину: «Ленин и революция в астрономии», «Ленин и физика», «Ленин и природа», «От штурма Зимнего к штурму космоса» и др.

Даже знакомым с астрономией интересно послушать в планетарии лекции и посмотреть кинофильмы о методах изучения Вселенной, ее строении, рождении и развитии звезд, о происхождении Земли и других планет, познакомиться с глобусами Луны, Марса, настоящими метеоритами, макетами советских ракет. При крупных планетариях имеются астрономические площадки с различными демонстрационными приборами — глобусами, схемами, картами, а также обсерватории с телескопами, в которые посетителям показывают небесные светила.

Кроме популярных лекций планетарии проводят и учебные лекции в рамках школьных учебных программ. Эти лекции помогают ученикам лучше усвоить многие разделы астрономии, географии, физики. А для юных любителей астрономии при планетариях работают астрономические кружки.

Справочный отдел

Основные данные о небесных телах

Астрономические знаки

Знаки тел Солнечной системы

Солнце	☉	Сатурн	♄
Луна	☾	Уран	♅ или ♅
Меркурий	☿	Нептун	♆
Венера	♀	Плутон	♇ или ♇
Земля	♁ или ⊕	Комета	☄
Марс	♂	Астероид № 5	⑤
Юпитер	♃		

Знаки зодиакальных созвездий

♈	Овен (а также точка весеннего равноденствия)	♎	Весы (а также точка осеннего равноденствия)
♉	Телец	♏	Скорпион
♊	Близнецы	♐	Стрелец
♋	Рак (а также точка летнего солнцестояния)	♑	Козерог (а также точка зимнего солнцестояния)
♌	Лев (а также знак восходящего узла орбиты)	♒	Водолей
♍	Дева	♓	Рыбы

Земля

Экваториальный радиус	6 378 160 м
Полярный радиус	6 356 777 м
Сплюснутость земного эллипсоида	$\frac{1}{298{,}25}$
Длина окружности экватора	40 075 160 м
Площадь поверхности Земли	$5{,}1 \cdot 10^8$ км^2
Объем Земли	$1{,}08 \cdot 10^{12}$ км^3
Масса Земли	$5{,}978 \cdot 10^{27}$ г
Средняя плотность Земли	5,5 г/см^3

Луна

Расстояние Луны от Земли:	
наименьшее	356 410 км
наибольшее	406 740 км
среднее	384 400 км
Видимый угловой диаметр Луны:	
наименьший	29′20″
наибольший	33′32″
на среднем расстоянии от Земли	31′05″
Диаметр Луны	3474 км (0,27 диаметра Земли)
Площадь поверхности Луны	$3{,}8 \cdot 10^7$ км^2 (0,074 площади поверхности Земли)
Объем Луны	$22 \cdot 10^9$ км^3 (0,02 объема Земли)
Масса Луны	$7{,}35 \cdot 10^{25}$ г (1/81,3 массы Земли)
Плотность Луны	3,35 г/см^3 (0,6 плотности Земли)
Звездный месяц	27 сут 7 ч 43 мин 11,47 с
Синодический месяц	29 сут 12 ч 44 мин 2,78 с

Солнце

Расстояние от Земли (среднее)	149 600 000 км (1 а. е.)
Видимый угловой диаметр Солнца:	
наименьший	31′32″
наибольший	32′36″
средний	31′59″
Диаметр Солнца	1 392 000 км (109 диаметров Земли)
Площадь поверхности Солнца	$6 \cdot 10^{12}$ км^2 (в 11 900 раз больше площади поверхности Земли)
Объем Солнца	$1{,}4 \cdot 10^{18}$ км^3 (1 303 800 объемов Земли)
Масса Солнца	$1{,}99 \cdot 10^{33}$ г (332 958 массы Земли)
Плотность Солнца (средняя)	1,41 г/см^3 (0,26 плотности Земли)
Период вращения точек экватора (относительно звезд)	25 сут
Мощность общего излучения Солнца	$374 \cdot 10^{21}$ кВт
Видимая звездная величина	− 26,8
Абсолютная звездная величина	+ 4,7
Температура поверхности Солнца	около 6000° С

Сведения о некоторых наиболее известных малых планетах

Номера планет	Название	Диаметр (в км)	Звездная величина в близком и дальнем противостоянии	Большая полуось орбиты (в а. е.)	Сидерический период обращения (в годах)
1	Церера	770	7,0—7,9	2,8	4,60
2	Паллада	490	6,7—9,3	2,8	4,61
3	Юнона	190	7,0—10,0	2,7	4,36
4	Веста	380	5,9—7,0	2,4	3,63
433	Эрос	6×32	6,7—11,3	1,5	1,76
944	Гидальго	25—50	11,0—19,0	5,8	13,93
1036	Ганимед	50	12,5	2,7	4,34
1221	Амур	1—2	17,5	1,9	2,97
1566	Икар	1—2	12,5	1,1	1,12

Знаки фаз Луны

●	Новолуние
☽	Первая четверть
○	Полнолуние
☾	Последняя четверть

Полные лунные затмения с 1972 по 2000 г.

Год	Месяц	Число	Начало полного затмения по московскому времени	Конец полного затмения по московскому времени	Видимость в Европейской части СССР
1972	Январь	30	13 ч 32 мин	14 ч 14 мин	нет
1974	Ноябрь	29	17 » 38 »	18 » 54 »	да
1975	Май	25	8 » 1 »	9 » 31 »	нет
1975	Ноябрь	19	1 » 1 »	1 » 47 »	да
1978	Март	24	18 » 40 »	20 » 10 »	»
1978	Сентябрь	16	21 » 22 »	22 » 44 »	»
1979	»	6	13 » 28 »	14 » 20 »	нет
1982	Январь	9	22 » 14 »	23 » 38 »	да
1982	Июль	6	9 » 39 »	11 » 21 »	нет
1982	Декабрь	30	13 » 53 »	14 » 59 »	»
1985	Май	4	22 » 22 »	23 » 32 »	да
1985	Октябрь	28	20 » 22 »	21 » 4 »	»
1986	Апрель	24	15 » 10 »	16 » 18 »	нет
1986	Октябрь	17	21 » 42 »	22 » 56 »	да
1989	Февраль	20	17 » 59 »	19 » 15 »	»
1989	Август	17	5 » 15 »	6 » 53 »	нет
1990	Февраль	9	21 » 49 »	22 » 35 »	да
1992	Декабрь	10	2 » 6 »	3 » 20 »	»
1993	Июнь	4	15 » 11 »	16 » 49 »	нет
1993	Ноябрь	29	9 » 1 »	9 » 51 »	»
1996	Апрель	4	2 » 27 »	3 » 51 »	да
1996	Сентябрь	27	5 » 17 »	6 » 29 »	»
1997	»	16	21 » 14 »	22 » 20 »	»

Полные солнечные затмения с 1972 по 2000 г.

Середина полного затмения по московскому времени				Наибольшая продолжительность полного затмения (в мин)	Где затмение будет видно как полное
Год	Месяц	Число	Час		
1972	Июль	10	23	3	Северо-Восточная Азия, Канада
1973	Июнь	30	15	7	Южная Америка, Африка, Атлантический океан
1974	»	20	8	5	Австралия, Индийский океан
1976	Октябрь	23	8	5	Африка, Австралия
1977	»	13	0	3	Венесуэла, Тихий океан
1979	Февраль	26	20	3	США, Канада
1980	»	16	12	4	Африка, Индия

Год	Середина полного затмения по московскому времени: Месяц	Число	Час	Наибольшая продолжительность полного затмения (в мин)	Где затмение будет видно как полное
1981	Июль	31	7	2	Тихий океан, Сибирь
1983	Июнь	11	8	5	Ява, Тихий океан
1984	Ноябрь	23	2	2	Патагония, Тихий океан
1985	»	12	17	1	Антарктика
1986	Октябрь	3	22	2	Гренландия
1987	Март	29	16	0,3	Африка, Атлантический океан
1988	»	18	5	4	Индийский и Тихий океаны, Суматра
1990	Июль	22	6	3	Финляндия, Северная Сибирь
1991	»	11	22	7	Тихий океан, Центральная Америка
1992	Июль	30	15	5	Атлантический океан
1994	Ноябрь	3	17	5	Тихий океан, Южная Америка
1995	Октябрь	24	8	2	Тихий и Индийский океаны
1997	Март	9	4	3	Восточная Сибирь
1998	Февраль	26	20	4	Тихий океан, Центральная Америка
1999	Август	11	14	3	Западная Европа, Иран, Индия

Самые яркие звезды неба

Звезды и созвездия	Видимая звездная величина	Светимость (в светимостях Солнца)	Расстояние (в световых годах)
Сириус (Б. Пес)	− 1,6	22	8,8
Канопус (Киль)	− 0,9	4700	188
Вега (Лира)	+ 0,1	51	26,4
Капелла (Возничий)	+ 0,2	141	44,7
Арктур (Волопас)	+ 0,2	107	36,2
Альфа Центавра	+ 0,3	1,3	4,2
Ригель (Орион)	+ 0,3	81 000	1080
Процион (М. Пес)	+ 0,5	7,4	11,4
Ахернар (Эридан)	+ 0,6	510	102
Бета Центавра	+ 0,9	1860	204

Звезды и созвездия	Видимая звездная величина	Светимость (в светимостях Солнца)	Расстояние (в световых годах)
Альтаир (Орел)	+ 0,9	9,8	16,3
Бетельгейзе (Орион)	+ 0,9	22 400	653
Альфа Креста	+ 1,0	6200	408
Альдебаран (Телец)	+ 1,1	155	68
Поллукс (Близнецы)	+ 1,2	32	35
Спика (Дева)	+ 1,2	740	156
Антарес (Скорпион)	+ 1,2	980	171
Фомальгаут (Южн. Рыба)	+ 1,3	13	22,8
Денеб (Лебедь)	+ 1,3	24 600	946
Регул (Лев)	+ 1,3	155	84

Данные о природе планет

Планета*	Экваториальный диаметр: в единицах диаметра Земли	Экваториальный диаметр: в тыс. км	Объем (в единицах объема Земли)	Масса (в единицах массы Земли)	Средняя плотность (в г/см³)	Освещенность Солнцем (по сравнению с Землей)	Число спутников
Меркурий	Атмосфера разреженная. Углекислый газ						
	0,38	4,870	0,055	0,056	5,6	от 5 до 10	нет
Венера	Атмосфера плотная, сплошь облачная. Углекислый газ						
	0,95	12,100	0,86	0,81	5,2	1,9	нет
Земля	Атмосфера относительно прозрачная, с массивами облаков. Азот, кислород						
	1	12,756	1	1	5,5	1	1
Марс	Атмосфера разреженная, прозрачная. Углекислый газ						
	0,53	6,79	0,15	0,11	4,0	от 0,36 до 0,53	2
Юпитер	Атмосфера мощная, облачная. Водород, гелий, метан, аммиак						
	11,1	141,7	1290	316,9	1,3	≈0,037	12
Сатурн	Атмосфера мощная, облачная. Водород, гелий, метан						
	9,4	120,0	740	94,9	0,7	≈0,011	10
Уран	Атмосфера мощная, облачная. Водород, гелий (?), метан						
	4,0	50,8	62	14,7	1,3	≈0,0028	5
Нептун	Атмосфера мощная, облачная. Водород, метан						
	4,0	50,5	60	17,2	1,7	0,0011	2
Плутон	<0,5	<6	<0,1	≈0,18	?	от 0,0004 до 0,001	нет

* Пять планет: Меркурий, Венера, Марс, Юпитер и Сатурн — известны с глубокой древности. Остальные видны с Земли только в телескоп. Уран открыт в 1781 г. В. Гершелем, Нептун — в 1846 г. И. Галле на основании вычислений У. Леверье, а Плутон — в 1930 г. К. Томбо.

Данные о движении и вращении планет

Планета	Среднее расстояние от Солнца: в астрономических единицах длины	Среднее расстояние от Солнца: в млн. км	Период обращения вокруг Солнца (в земных годах и сутках)	Средняя скорость движения по орбите (в км/с)	Период осевого (суточного) вращения: относительно звезд — «звездные сутки»	Период осевого (суточного) вращения: относительно Солнца — «солнечные сутки»	Наклонение экватора к плоскости орбиты (в градусах)
Меркурий	0,387	57,9	88,0 сут	47,9	58 сут 16 ч	176 сут	≈0
Венера*	0,723	108,1	224,7 »	35,0	243 сут	117 »	<4
Земля	1,000	149,6	1 год	29,8	23 ч 56 мин 4 с	24 ч	23,45
Марс	1,524	227,9	1,88 года	24,1	24 ч 37 мин	24 ч 39 мин	25
Юпитер	5,20	778,3	11,9 »	13,0	9 ч 50 мин, 9 ч 55 мин***	**	3
Сатурн	9,55	1429	29,5 »	9,6	10 ч 14 мин, 10 ч 38 мин***	**	27
Уран*	19,2	2875	84,0 »	6,8	10,8 ч ± 0,1 ч	**	≈98
Нептун	30,1	4504	164,8 »	5,4	15,8 ч ± 0,1 ч	**	≈29?
Плутон	39,5	5910	247,7 »	4,7	6 сут 9 ч	**	?

* Обратное направление осевого вращения.
** Период осевого вращения практически такой же, как относительно звезд.
*** Период вращения экваториального пояса короче, чем остальных зон.

Спутники планет

Планета и ее спутники	Кто и когда открыл	Расстояние от центра планеты: в радиусах планеты	Расстояние от центра планеты: в тыс. км	Период обращения — звездный (в сутках)	Наклонение*** плоскости орбиты спутника (в градусах)	Диаметр спутника (в км)	Масса спутника: во сколько раз она меньше массы: Земли	Масса спутника: во сколько раз она меньше массы: планеты
Земля								
Луна	—	60,3	384,4	27,3	5,15	3476	81,3	—
Марс								
I. Фобос	Холл, 1877	2,8	9,4	0,32	1,1	≈20	—	—
II. Деймос	» 1877	6,9	23,5	1,26	1,6	8	—	—
Юпитер								
12 спутников; самые крупные из них:								
I. Ио	Галилей, 1610	5,9	422	1,77	0,0	Ок. 3660	82	26 000
II. Европа	» 1610	9,4	671	3,55	0,0	» 2920	130	40 000
III. Ганимед	» 1610	15,0	1070	7,15	0,0	» 5100	39	12 300
IV. Каллисто	» 1610	26,5	1883	16,69	0,0	» 4720	65	20 000
V. Амальтея	Бернард, 1892	2,6	181	0,50	0,0	» 160	—	--
Сатурн								
I. Мимас	Гершель, 1789	3,1	186	0,94	1,5	» 600	160 000	15 000 000
II. Энцелад	» 1789	4,0	238	1,37	0,0	» 600	84 000	8 000 000
III. Тефия	Кассини, 1684	4,9	295	1,89	1,1	» 1000	9100	870 000
IV. Диона	» 1684	6,3	377	2,74	0,0	» 1000	5800	550 000
V. Рея	» 1672	8,8	527	4,52	0,3	» 1400	2600	250 000
VI. Титан	Гюйгенс, 1655	20,4	1222	15,95	0,3	» 4880	43,5	4150
VII. Гиперион	Бонд, 1848	24,7	1481	21,28	0,5	» 400	52 000	5 000 000
VIII. Япет	Кассини, 1671	59,4	3560	79,33	14,7	» 1000	5200	500 000
IX. Феба*	Пикке-ринг, 1898	216,0	12950	550,45	30	» 200	—	—
X. Янус	Дольфюс, 1966	2,65	315	0,75	0	» 350	—	—
Уран								
I. Ариэль**	Лассель, 1851	7,5	192	2,52	0	» 600	4800	70 000
II. Умбриэль**	» 1851	10,7	267	4,14	0	» 400	12 000	170 000
III. Титания**	Гершель, 1787	17,2	439	8,71	0	» 1000	1400	20 000
IV. Оберон**	» 1787	23,0	587	13,46	0	» 800	2300	34 000
V. Миранда**	Койпер, 1948	5,1	128	1,41	0	» 200	69 000	1 000 000
Нептун								
I. Тритон*	Лассель, 1846	12,9	354	5,88	20,1	» 4000	44	750
II. Нереида	Койпер, 1949	200	5570	500	27,5	» 200	170 000	3 000 000

* Движение обратное, т. е. происходит в направлении против орбитального движения всех планет и большинства спутников в Солнечной системе.

** Движение обратное, но совпадающее с направлением суточного вращения Урана.

*** Приводится наклонение к плоскости экватора соответствующей планеты, а для Луны — к плоскости земной орбиты.

Что читать по астрономии

Краткий указатель научно-популярной литературы ставит своей целью помочь читателям Детской энциклопедии расширить и углубить свои знания по астрономии. В него включены наиболее новые издания, предлагающие читателю современный научный материал. Однако в ряде случаев, для полноты охвата астрономических проблем, в указатель вошли лучшие популярные издания прошлых лет. В аннотациях выделены наиболее сложные книги, доступные лишь школьникам старших классов. Завершается указатель перечнем руководств для любительских астрономических наблюдений. Рекомендуемая литература разбита на тематические разделы.

Общие книги по астрономии

Воронцов-Вельяминов Б. А. Очерки о Вселенной. Изд. 6, перераб. и доп. М., «Наука», 1969. 725 с. с илл.

Книга представляет собой популярную энциклопедию астрономических знаний. Она рассказывает об окружающем нас мире небесных тел, начиная с больших и малых планет Солнечной системы и кончая удаленнейшими звездными системами. Автор, известный советский астроном и педагог-популяризатор, живо и увлекательно показывает, как, какими методами и с помощью каких инструментов ученые исследуют Вселенную. Книга снабжена большим количеством иллюстраций, в том числе цветных.

Горбацкий В. Г. Космические взрывы. Изд. 2, перераб. и доп. М., «Наука», 1972. 208 с. с илл.

Автор рассказывает о самых грандиозных явлениях природы: взрывных процессах на Солнце и в звездах, в ядрах галактик — и, наконец, рассматривает проблему загадочных квазаров. Книга доступна школьникам старших классов.

Комаров В. Н. Увлекательная астрономия. М., «Наука», 1968. 432 с. с илл.

Увлекательный рассказ об актуальных вопросах современной астрономии: жизни на других планетах, загадке сверхзвезд, новых состояниях вещества, заатмосферных космических исследованиях и многих других проблемах.

Перельман Я. И. Занимательная астрономия. Изд. 11. М., «Наука», 1966. 211 с. с илл.

Книга известного популяризатора науки поможет читателю уяснить основные астрономические факты, которые нередко облекаются в парадоксальную форму, показываются с новой, неожиданной стороны. Читатель познакомится с Землей, Луной, планетами и их движениями, а также с миром звезд.

Азимов А. Вселенная. Пер. с англ. М., «Мир», 1969. 352 с. с илл.

О различных небесных объектах — телах Солнечной системы, звездах, галактиках и об основных проблемах, интересующих современную астрономию, рассказывает известный популяризатор науки. Специальные разделы посвящены проблемам эволюции Вселенной.

Корлисс У. Загадки Вселенной. Пер. с англ. М., «Мир», 1970. 248 с. с илл.

Одиннадцать глав в книге — одиннадцать увлекательных рассказов о наиболее выдающихся открытиях современной астрономии. Теории Большого взрыва и Стационарной Вселенной, квазары, возраст Вселенной, цикличность солнечной активности, каналы на Марсе, малые планеты, гигантская планета Юпитер, поиски жизни за пределами Земли — таковы проблемы, с которыми познакомится читатель этой книги.

Солнце

Витинский Ю. И. Солнечная активность. М., «Наука», 1969. 92 с. с илл. («Популярные лекции по астрономии»).

Рассказ о солнечной активности и ее разнообразных проявлениях. В заключение автор рассматривает гипотезы о происхождении солнечной цикличности, описывает Службу Солнца. Доступна школьникам старших классов.

Мензел Д. Г. Наше Солнце. Пер. с англ. М., Физматгиз, 1963. 328 с. с илл.

Книга дает полное представление о центральном светиле нашей системы — Солнце и о происходящих на нем процессах. Автор как бы анатомирует этот гигантский раскаленный газовый шар, последовательно рассказывая нам об окружающих Солнце оболочках и о его внутреннем строении, источниках энергии и т. д. Специальные разделы посвящены одиннадцатилетнему циклу солнечной активности и воздействию Солнца на Землю. Доступна школьникам старших классов.

Пикельнер С. Б. Солнце. М., Физматгиз, 1961. 84 с. с илл. («Популярные лекции по астрономии»).

В книге излагаются современные представления о действующих на Солнце процессах и связи этих процессов с явлениями на Земле. Описываются источники солнечной энергии, объясняются явления, происходящие на «спокойном» Солнце и в период усиления его активности. Доступна школьникам старших классов.

Луна, планеты и их движения

Болдуин Р. Что мы знаем о Луне? Пер. с англ. М., «Мир», 1967. 173 с. с илл. и карт.; 1 л. карт.

Цель книги — дать читателю сводку современных представлений о Луне — от затмений до свойств лунной поверхности. Особенно интересно написаны главы о формировании лунного рельефа под действием метеоритных ударов.

Бронштэн В. А. Беседы о космосе и гипотезах. М., «Наука», 1968. 240 с. с илл.

Как произошла Земля, как образовались лунные кратеры, что скрывается под облачным покровом Венеры, есть ли жизнь на Марсе, что такое Тунгусский метеорит — эти и многие другие проблемы, связанные с природой тел Солнечной системы, доступно и достаточно подробно рассматривает автор в своей книге. Он разбирает достоинства и недостатки выдвигаемых гипотез и предостерегает от беспочвенного фантазирования.

Гребеников Е. А., Рябов Ю. А. Что такое небесная механика. М., «Наука», 1966. 111 с. с черт. («Популярные лекции по астрономии»).

Рассказ о законах небесной механики, ее методах и полученных ею конкретных результатах. Специальный раздел посвящен движению искусственных небесных тел. Доступна школьникам старших классов.

Демин В. Г. Судьба Солнечной системы. (Популярные очерки по небесной механике.) М., «Наука», 1969. 256 с. с илл.

«Распадается ли Солнечная система?» — таков основной вопрос, рассматриваемый в книге. Наряду с проблемой устойчивости, «прочности» Солнечной системы как единого механического целого в книге подробно излагаются результаты разнообразных исследований движения отдельных групп спутников Солн-

ца (астероидов, комет, спутников). Автор приводит многочисленные примеры из истории развития небесной механики. Доступна школьникам старших классов.

Зигель Ф. Ю. Малые планеты. М., «Наука», 1969. 104 с. с илл. («Популярные лекции по астрономии»).

Каково происхождение малых планет, или астероидов? Какова их физическая природа? Связаны ли малые планеты с метеоритами, падающими на Землю? Какое место в планах освоения космоса могут занимать малые планеты? Вот некоторые вопросы, рассматриваемые в книге. Читатель узнает также об истории изучения астероидов, методах их исследования, некоторых замечательных малых планетах.

Левин Б. Ю. Происхождение Земли и планет. Изд. 4, доп., М., «Наука», 1964. 116 с. с илл. («Популярные лекции по астрономии»).

Кратко рассмотрев наиболее интересные космогонические гипотезы прошлого, оценив их достоинства и недостатки, автор подробно рассказывает о гипотезе О. Ю. Шмидта.

Рябов Ю. А. Движения небесных тел. Изд. 2. М., Физматгиз, 1962. 215 с. с илл.

Рассказ о законах небесной механики, управляющих движениями небесных тел. Доступна школьникам старших классов.

Тейфель В. Г. Планеты-гиганты. М., «Наука», 1964. 86 с. с илл. («Популярные лекции по астрономии»).

Краткий рассказ о гигантских планетах Солнечной системы — Юпитере, Сатурне, Уране и Нептуне. Читатель узнает об атмосферах этих планет, их внутреннем строении, радиоизлучении, особенностях каждой из них. Специальные разделы посвящены спутникам гигантских планет и кольцам Сатурна.

Уиппл Ф. Земля, Луна и планеты. Пер. с англ. М., «Наука», 1967. 252 с. с илл.

Подробный рассказ о больших планетах Солнечной системы и спутнике Земли — Луне. Автор описывает атмосферы планет, их поверхности, внутреннее строение, исследует возможности существования на них живых существ. К книге приложен планетоискатель, помогающий находить планеты на небе.

Кометы, метеоры, метеориты

Зигель Ф. Ю. Кометы. Изд. 2. М., Гостехиздат, 1955. 72 с. с илл. («Популярные лекции по астрономии»).

В книге рассказывается о строении и движении комет, о физических явлениях, происходящих в кометах, о происхождении комет и их связи с другими «малыми телами» Солнечной системы.

Кринов Е. Л. Метеориты. М., Физматгиз, 1958. 108 с. с илл. («Популярные лекции по астрономии»).

Популярный рассказ о строении и химическом составе метеоритов, об условиях их падения, о происхождении метеоритов. Подробно описываются два гигантских метеорита, упавших в XX в. на территории нашей страны, — Тунгусский и Сихотэ-Алинский.

Федынский В. В. Метеоры. М., Гостехиздат, 1956. 112 с. с илл. («Популярные лекции по астрономии»).

Исследование метеоров — та область астрономии, в которой любители оказывают большую помощь науке. Автор рассказывает о роли метеорного вещества в Солнечной системе, о происхождении метеорных потоков и связи их с кометами, о полете метеоров в атмосфере Земли и многих других вопросах.

Звездная Вселенная

Агекян Т. А. Звезды, галактики, Метагалактика. Изд. 2, доп. М., «Наука», 1970. 334 с. с илл.

Популярное описание звездных систем — галактик. Читатель получит достаточно полное представление о методах и результатах исследования этих удаленнейших небесных объектов. Автор рассказывает о строении галактик, о содержащихся в них звездах и туманностях, об эволюции звездных систем, сопоставляя различные существующие точки зрения. В заключительной главе автор излагает свои взгляды на проблему существования жизни во Вселенной.

Альвен Г. Миры и антимиры. Пер. со швед. М., «Мир», 1968. 120 с. с илл.

Существуют ли миры из антивещества? Есть ли антивещество в нашей Солнечной системе? Можно ли это антивещество обнаружить наблюдениями с Земли? Вот далеко не полный перечень вопросов, рассматриваемых в книге. Во второй части излагаются взгляды автора, известного шведского физика и астрофизика, на эволюцию Метагалактики и проблемы космологии. Книга доступна школьникам старших классов.

Бок Б., Бок П. Млечный Путь. Пер. с англ. М., Физматгиз, 1959. 264 с. с илл.

Увлекательный рассказ о звездах и нашей звездной системе Млечного Пути — Галактике. Читатель узнает из книги о звездах — близких и далеких, ярких и тусклых, холодных и горячих, о звездах-гигантах и звездах-карликах, о заполняющих межзвездное пространство газово-пылевых туманностях, о звездных скоплениях и свойствах Галактики в целом.

Воронцов-Вельяминов Б. А. Галактики, туманности и взрывы во Вселенной. М., «Просвещение», 1967. 175 с. с илл.

Книга посвящена новейшим открытиям в мире галактик, гигантским взрывам в их ядрах, рассказывает о недавно обнаруженных интересных объектах, находящихся от нас на огромных расстояниях.

Зигель Ф. Ю. Невидимый космос. М., «Детская литература», 1970. 208 с. с илл.

Описываются новейшие открытия астрономии, совершенные при помощи аппаратуры, способной улавливать приходящие из космоса радиоволны, инфракрасное излучение и гамма-излучение, рентгеновские лучи. Значительная часть книги отведена достижениям радиоастрономии. Книга написана увлекательно и общедоступно.

Каплан С. А. Физика звезд. Изд. 2, перераб. и доп. М., «Наука», 1970. 212 с. с илл.

Почему вещество в недрах звезд нагрето до высокой температуры? Как теоретически подсчитать температуру в центре Солнца? В каких ядерных процессах освобождается звездная энергия? Как определить химический состав звездного вещества? Как объясняется существование сверхплотных звезд? Ответы на эти и многие другие вопросы дает теория внутреннего строения звезд, которой и посвящена книга С. А. Каплана. Книга доступна школьникам старших классов.

Каплан С. А. Элементарная радиоастрономия. М., «Наука», 1966. 275 с. с илл.

В книге рассказывается об инструментах и методах радиоастрономии, истории ее зарождения. Основная часть книги посвящена результатам исследования радиоизлучения различных небесных объектов. Прово-

дится детальный разбор физических процессов, в результате которых это радиоизлучение возникает. Рассчитана на подготовленного читателя.

Хойл Ф. Галактики, ядра и квазары. Пер. с англ. М., «Мир», 1968. 155 с. с илл.

В первых трех главах книги, иллюстрированных интересными фотографиями, рассказывается о новейших астрономических открытиях. Здесь и различные особенности структуры галактик, и взрывы в галактиках, и вновь открытые тела — квазары, а также результаты исследований рентгеновского излучения и гамма-излучения небесных тел и космических лучей. В последующих двух главах автор излагает свои космологические представления (разделяемые далеко не всегда астрономами). Заключительная глава книги содержит краткий очерк современной теории происхождения химических элементов. Книга доступна школьникам старших классов.

Цесевич В. П. Маяки Вселенной. Киев, «Наукова думка», 1968. 151 с. с илл.

Интересный рассказ о звездах, меняющих свой блеск. Автор описывает двойные звезды, временами затмевающие одна другую, звезды пульсирующие, то сжимающиеся, то расширяющиеся, наконец, звезды взрывающиеся. Исследование именно таких звезд дает особенно много астрономам, так как позволяет определить массы звезд и их размеры, изучить строение и проследить пути эволюции.

Жизнь во Вселенной

Внеземные цивилизации. (Проблемы межзвездной связи). М., «Наука», 1969. 438 с. с илл.

Популярная монография, посвященная проблеме распространенности разумной жизни во Вселенной, и в первую очередь возможностям связи между инопланетными цивилизациями. Отдельные главы посвящены методам дешифровки сообщений, темпам развития цивилизаций и другим проблемам. Книга требует серьезной подготовки и доступна школьникам старших классов лишь частично.

Овенден М. В. Жизнь во Вселенной. М., «Мир», 1965. 120 с. с илл.

Рассказ о возможности существования жизни за пределами нашей планеты. Автор анализирует физические условия на различных телах Солнечной системы и рассматривает возможность их обитаемости. Его интересует и проблема эволюции на Земле, и проблема существования других планетных систем.

Петрович Н. Кто вы? М., «Молодая гвардия», 1970. 240 с. с илл. (Серия «Эврика»).

Очень живо и доступно написанная книга, знакомящая читателей с современными представлениями о возможности существования разумной жизни на других небесных телах, о том, как попытаться уловить сигналы, посылаемые инопланетянами, или самим сигнализировать во Вселенную. В книге рассматривается и ряд других вопросов, в частности проблема эволюции жизни на Земле.

Шкловский И. С. Вселенная, жизнь, разум. Изд. 2, перераб. и доп. М., «Наука», 1965. 284 с. с илл.

Книга посвящена проблеме распространенности жизни во Вселенной. В первой ее части излагаются современные представления о строении и развитии Вселенной, во второй — исследуются условия, необходимые для возникновения и эволюции жизни, в третьей — многочисленные вопросы, связанные с существованием разумной жизни во Вселенной. Рассматриваются также вопросы связи между инопланетными цивилизациями. Автор книги, известный советский астрофизик, включил в нее ряд оригинальных идей и гипотез.

История астрономии

Воронцов-Вельяминов Б. А. Очерки истории астрономии в России. М., Гостехиздат, 1956. 371 с. с илл.

Сводный обзор истории русской астрономии, охватывающий обширную историческую эпоху, начиная с Древней Руси и кончая началом XX в. Автор рассказывает о распространении астрономических знаний на Руси, о русских астрономических обсерваториях, о наиболее выдающихся русских астрономах и их открытиях. Значительная часть книги доступна школьникам старших классов.

Воронцов-Вельяминов Б. А. Очерки истории астрономии в СССР. М., Физматгиз, 1960. 228 с. с илл.

Книга является продолжением монографии того же автора «Очерки истории астрономии в России». Автор рассказывает о строительстве астрономических обсерваторий и развитии отдельных отраслей астрономии в нашей стране. Значительная часть книги доступна школьникам старших классов.

Куликовский П. Г. М. В. Ломоносов — астроном и астрофизик. Изд. 2. М., «Физматгиз», 1961. 103 с. с илл.

Книга подробно освещает многочисленные труды великого русского ученого-энциклопедиста XVIII в. М. В. Ломоносова в области астрономии, рассказывает о его астрономических открытиях, о предложенных им конструкциях телескопов и навигационных приборов, о его философских взглядах и о многом другом. Приводятся биографические сведения и обширная библиография.

Леонов Н. И. Научный подвиг самаркандских астрономов XV в. М., Физматгиз, 1960. 118 с. с илл.

Увлекательный рассказ о замечательной научной школе, возникшей в XV в. в Самарканде вокруг политического деятеля и выдающегося научного организатора Улугбека. Улугбек и ученые, работавшие на его обсерватории, внесли большой вклад в развитие астрономии.

Перель Ю. Г. Развитие представлений о Вселенной. Изд. 2. М., Физматгиз, 1962. 391 с. с илл.

История познания Вселенной, начиная с примитивных представлений людей древности о строении видимого мира до достижений науки 50-х годов XX в. Наибольшее внимание уделяется развитию представлений о Вселенной в XVIII—XX вв. Специальная глава в конце книги посвящена вопросу о жизни во Вселенной.

Селешников С. И. История календаря и хронология. М., «Наука», 1970. 223 с. с илл.

Книга посвящена проблеме календаря и является энциклопедическим справочником. Автор рассказывает об астрономических основах календаря, разбирает математические теории солнечных и лунных календарей, описывает различные календарные системы, применявшиеся на протяжении многовековой истории культуры в различных странах. Здесь календари — вавилонский, египетский, римский, своеобразный календарь народа майя, календарь Французской революции и многие другие. Читатель познакомится

с вопросом дальнейшего совершенствования календаря, различными проектами календарной реформы. Книга снабжена восемью приложениями для справок и обширной библиографией.

Чистяков В. Д. Рассказы об астрономах. Минск, «Вышэйшая школа», 1969. 264 с. с илл.

Биографические очерки и описания научной деятельности многих знаменитых астрономов прошлого и современности, начиная с Гиппарха, Птолемея, Бируни, Улугбека, Коперника, Галилея, Кеплера и кончая Ресселом, Эддингтоном, Хабблом. Специальные очерки посвящены замечательным астрономам дореволюционной России (Ломоносов, Струве, Бредихин и др.) и Советского Союза (Белопольский, Блажко, Шайн, Шмидт и др.). Очерки написаны популярно и вполне доступно для школьников старших классов.

Шур Я. И. Когда? Изд. 2. М., «Детская литература», 1968. 288 с. с илл.

Популярный рассказ о календарном счете времени. Книга написана гораздо более популярно и доступно, чем посвященная той же проблеме книга С. И. Селешникова, причем основное внимание автор уделяет истории введения календарных систем в разных странах. «Хорош ли наш календарь?» — так называется последний раздел книги, в котором разбираются достоинства и недостатки предполагаемых новых систем календаря.

Руководства к изготовлению астрономических инструментов и к любительским наблюдениям

Вокулер Ж., Тексеро Ж. Фотографирование небесных тел. Пер. с франц. М., «Наука», 1967. 103 с. с илл.

Руководство к любительским фотографическим наблюдениям небесных тел. Авторы дают любителям ценные рекомендации, предлагают простейшую аппаратуру, рассказывают о фотографируемых объектах, надеясь и на изобретательность любителей. Книга поможет любителям производить интересные, а иногда и полезные для науки фотографические наблюдения. Рассчитана на школьников старших классов.

Дагаев М. М. Наблюдения звездного неба. Изд. 2., доп. М., «Наука», 1972. 152 с. с илл. и вкл.

Популярный рассказ о звездном небе, созвездиях, о наиболее интересных небесных объектах. Во второй части книги приводятся рекомендации начинающему наблюдателю неба. К книге приложены подвижная карта неба и схематическая карта Луны.

Куликовский П. Г. Справочник любителя астрономии. Изд. 4, перераб. и доп. М., «Наука», 1971. 632 с. с илл. и вкл.

Настольная книга каждого любителя астрономии. В первой части сосредоточено описание различных небесных тел и их систем. Здесь же читатель познакомится с астрономической терминологией, с любительскими наблюдениями, с хронологической таблицей астрономических открытий, с астрономической библиографией. Вторая часть книги содержит необходимые любителю астрономические справочные сведения, собранные в 102 таблицах. К книге приложены подробная карта Луны, карта поверхности Марса, звездный атлас (пять звездных карт всего неба), карта экваториальных созвездий, а также ряд пособий для производства и обработки астрономических наблюдений.

Набоков М. С. Астрономические наблюдения с биноклем. М., Гостехиздат, 1948. 184 с. с илл.

Рекомендации к астрономическим наблюдениям с помощью бинокля. Ценным приложением к книге являются схематические карты Млечного Пути.

Навашин М. С. Телескоп астронома-любителя. Изд. 2, испр. М., «Наука», 1967. 396 с. с илл.

Подробное руководство, предназначенное оказать любителям астрономии помощь в сооружении самодельного телескопа-рефлектора, пригодного для серьезных работ. В первой части книги приводится элементарная теория телескопа, во второй — автор делится своим богатым практическим опытом по изготовлению рефлектора, штатива и различных принадлежностей к телескопу.

Новиков И. Д., Шишаков В. А. Самодельные астрономические инструменты и наблюдения с ними. М., «Наука», 1965. 123 с. с илл.

Руководство к самостоятельному изготовлению простейших астрономических инструментов (телескопа, гелиоскопа, астрографа) и оборудованию астрономической площадки. Во второй части книги авторы приводят рекомендации к различным любительским наблюдениям, в том числе и к фотографированию небесных тел.

Цесевич В. П. Что и как наблюдать на небе. Руководство к организации и проведению любительских научных наблюдений небесных светил. Изд. 3. М., Физматгиз, 1963. 462 с. с илл.

Первая часть книги представляет собой популярный рассказ о мире небесных тел и их систем. Во второй части приводятся рекомендации к наблюдениям для достаточно квалифицированного любителя. Особенно ценны инструкции по наблюдению переменных звезд и метеоров, опираясь на которые любитель может получить интересные и для науки результаты. Доступна школьникам старших классов.

Бронштэн В. А. Планеты и их наблюдение. М., Гостехиздат, 1957. 207 с. с илл. и вкл.

Сытинская Н. Н. Луна и ее наблюдение. М., Гостехиздат, 1956. 254 с. с илл.

Шаронов В. В. Солнце и его наблюдение. М., Гостехиздат, 1953. 220 с. с илл. и вкл.

Руководства для любителей к наблюдениям Солнца, Луны и планет.

«Астрономический календарь». Ежегодно выпускается издательством «Наука» (основан в 1895 г.).

«Школьный астрономический календарь». Ежегодно выпускается издательством «Просвещение».

Эти два издания являются необходимыми пособиями для наблюдателя, сообщающими сведения об астрономических явлениях в соответствующем году, о движении по небу Солнца, Луны и планет и другие данные. В отделах приложений календарей рассказывается об успехах астрономии, ее открытиях, приводятся рекомендации к наблюдениям, юбилейные очерки, библиография.

«Постоянная часть Астрономического календаря». Изд. 5. М., Физматгиз, 1962. 772 с. с илл.

Обширное руководство для любителей. Содержит сведения из многих разделов астрономии, необходимые любителю, инструкции для наблюдений Солнца, Луны, планет, комет, метеоров и других небесных тел. В конце книги приведен справочный материал. Значительная часть книги доступна школьникам старших классов.

Словарь-указатель

А

Аберрации телескопа
— искажения или недостаточная отчетливость изображений, создаваемых оптикой телескопа; связаны со свойствами линз и зеркал.
198

Аберрация света
— изменение видимого положения звезды на небесной сфере, вызываемое сочетанием движения Земли с находящимся на ней наблюдателем и конечной скорости распространения света.
182

Абу-ль-Вефа, Мохаммед бен-Мохаммед
(940—998) — арабский астроном и математик; составил таблицы синусов и тангенсов, позволившие ему усовершенствовать астрономические вычисления.
17

Автоматические лунные станции.
71—75, 169

Автоматические межпланетные станции.
34, 94, 99, 100

Адамс, Джон Кауч
(1819—1892) — английский астроном, независимо от У. Леверье установивший существование планеты Нептун.
104

Азимутальная установка телескопа
— установка, позволяющая производить вращение телескопа вокруг вертикальной и горизонтальной осей.
198

Алголь (бета Персея)
— звезда переменного блеска, типа затменных переменных (см.).
134

Али Кушчи
(г. рожд. неизв. — 1474) — самаркандский астроном и математик, работавший на обсерватории Улугбека (см.).
19

Аль-Баттани
(858—929) — арабский астроном; произвел новые определения угла наклона эклиптики к экватору, ввел в употребление тригонометрические функции.
17

Альбицкий, Владимир Александрович
(1891—1952) — советский астроном; совместно с Г. А. Шайном определил лучевые скорости многих звезд.
193

Альфа Центавра
— система из трех звезд в созвездии Центавра, наиболее близких к Солнечной системе; расстояние 4,3 св. года (см.).
40, 133, 222

Амбарцумян, Виктор Амазаспович
(р. 1908) — советский астрофизик, академик, президент Академии наук Армянской ССР; автор трудов о физической природе и происхождении звездных систем и межзвездной среды.
52, 154

Антарес
— самая яркая звезда в созвездии Скорпиона, 1-й звездной величины, красного цвета; относится к звездам-сверхгигантам: диаметр более чем в 450 раз превосходит диаметр Солнца, а объем больше объема Солнца в 90 млн. раз.
129, 131, 132, 222

Ариабхата
(476 — г. смерти неизв.) — индийский астроном и математик; в его сочинении «Ариабхатиам» сжато изложены математические сведения, необходимые для астрономических вычислений.
19

Аризонский метеоритный кратер
— кратер в США, образовавшийся в результате падения гигантского метеорита; поперечник кратера около 1200 м, глубина 174 м, высота вала 40—50 м.
120

Аристарх Самосский
(жил в III в. до н. э.) — один из великих греческих ученых; впервые определил расстояние от Земли до Луны и до Солнца и высказал идею о движении Земли вокруг Солнца. За свое учение был обвинен в безбожии и изгнан из Афин.
11, 20

Аристотель
(384—322 до н. э.) — древнегреческий ученый; доказывал шарообразность Земли и утверждал, что она является неподвижным телом — центром Вселенной, вокруг которого обращаются все небесные тела.
11

Астероиды
— см. Малые планеты.

Астрология
— ложное учение о мнимом влиянии светил на судьбы государств и отдельных людей и о мнимой возможности предсказывать их судьбы и события по расположению небесных светил.
8

Астрономическая единица (а. е.)
— единица для выражения больших расстояний в Солнечной системе, принятая в астрономии; равна среднему расстоянию Земли от Солнца — 149,6 млн. км.
26, 96, 172, 220

Астрономические обсерватории
— научно-исследовательские учреждения, в которых ведутся наблюдения небесных светил и изучаются законы их движения и развития.
19, 42—44, 49, 51—55

Астрономия
— наука, занимающаяся изучением строения и развития небесных тел и их систем.
7, 8

Астрофизика
— раздел астрономии, изучающий физические свойства и химический состав небесных тел и межзвездной среды главным образом при помощи спектрального анализа, фотографии и радиоастрономических методов.
188

Атмосфера Земли.
157, 173

Афелий
— самая отдаленная от Солнца точка орбиты планеты.
96

Б

Баклунд, Оскар Андреевич
(1846—1916) — русский астроном, швед по происхождению; в 1895 — 1916 гг. был директором Пулковской обсерватории; основные научные исследования его относятся к небесной механике и геодезии.
185

Баллистика
— наука о движении артиллерийских снарядов, ракет и т. д.
168

Белопольский, Аристарх Аполлонович
(1854—1934) — русский астроном; исследовал закон вращения Солнца, доказал метеоритное строение колец Сатурна, произвел важнейшие исследования спектров звезд и их лучевых скоростей, опытным путем подтвердил правильность принципа Доплера (см.) в применении к свету.
47, 185, 188—189

Белые карлики
— звезды, имеющие очень малые размеры и светимость (в сотни и тысячи раз меньшие, чем размеры и светимость Солнца) и вместе с тем высокую температуру; отличаются чрезвычайно большой плотностью вещества (плотнее воды

в десятки и сотни тысяч раз).
132, 133

Бессель, Фридрих Вильгельм
(1784—1846) — немецкий астроном; разработал методы точного определения положений звезд, составил обширные звездные каталоги, вслед за В. Я. Струве положил начало точному определению расстояний до звезд.
183—184, 187

Бируни
(973—1048) — среднеазиатский ученый — астроном, географ, историк; впервые на Среднем Востоке высказал мысль о движении Земли вокруг Солнца; определил размеры Земли.
17, 18

Болид
— ослепительно яркий метеор; имеет вид светящегося шара с огненным хвостом.
118, 211

Большая Медведица
— созвездие северного полушария неба. Семь его наиболее ярких звезд образуют фигуру, напоминающую ковш с ручкой.
57

Брадлей, Джемс
(1693—1762) — английский астроном, один из основоположников современной звездной астрономии.
182—183, 184

Брахмагупта
(ок. 598—660) — индийский математик и астроном; в его сочинениях можно найти утверждение о вращении Земли вокруг оси, соображения о размерах Земли и Луны.
19

Бредихин, Федор Александрович
(1831—1904) — русский астроном; наиболее известен как создатель теории образования кометных хвостов и теории происхождения метеорных потоков; с 1890 по 1895 г. руководил Пулковской обсерваторией.
54, 110, 114, 185, 187—188

Бруно, Джордано
(1548—1600) — итальянский мыслитель, атеист; развивая учение Коперника, утверждал бесконечность Вселенной и бесчисленность звезд, солнц и обитаемых планет.
22—23

В

Варахамихира
(505—587) — индийский математик и астроном; изучал положение планет; в его сочинениях можно найти объяснение затмений, рассуждения о расстояниях до Солнца и Луны.
19

Великое противостояние Марса
— см. Противостояние Марса.

Венера
— вторая по расстоянию от Солнца планета Солнечной системы; после Солнца и Луны самое яркое светило на небе; по размерам и массе близка к Земле.
8, 48, 94—95, 153, 178, 209, 223

Видманштеттеновы фигуры
— рисунок, наблюдающийся на полированной поверхности железного метеорита, протравленной слабым раствором кислоты; названы по имени австрийского ученого Видманштеттена, впервые получившего эти фигуры в 1808 г.
123

Високосный год.
165

Воронцов-Вельяминов, Борис Александрович
(р. 1904) — советский астрофизик; выполнил ряд важных исследований новых звезд, газовых и планетарных туманностей, межзвездной среды, галактик; автор многих учебников и научно-популярных книг по астрономии.
154

Вращение Галактики.
149

Вращение звезд.
193

Время декретное
— по декрету Советского правительства в 1930 г. все часы в нашей стране были переведены на 1 ч вперед.
157, 167

Время местное
— в связи с вращением Земли вокруг своей оси на каждом меридиане Земли свое истинное время — местное.
157, 167

Время поясное
— весь земной шар разделен на 24 пояса, отстоящих друг от друга на расстоянии 15° долготы; внутри каждого пояса гражданское время условились считать одинаковым.
167

Вселенная
— окружающий нас мир, бесконечный в пространстве, во времени и по многообразию форм заполняющего его вещества и его превращений.
151, 182, 190

Всехсвятский, Сергей Константинович
(р. 1905) — советский астрофизик, известный исследователь комет, солнечной короны и солнечного корпускулярного излучения.
54

Вспышки солнечные
— резкое и быстрое увеличение яркости какого-нибудь участка хромосферы Солнца, расположенного в активной области; вспышки сопровождаются усилением коротковолнового излучения Солнца и потоков заряженных частиц.
84

Вторая космическая скорость
— минимальная скорость тела вблизи поверхности Земли, достижение которой позволяет ему, преодолев земное притяжение, навсегда удалиться от Земли; равна 11,2 км/с.
169, 172

Г

Гагарин, Юрий Алексеевич
(1934—1968) — советский летчик-космонавт, первый в мире человек, совершивший космический полет на космическом корабле «Восток» 12 апреля 1961 г.
7

Галактика (наша)
— звездная система, в которую входят все звезды, видимые в созвездиях, и все звезды Млечного Пути. В Галактике насчитывается более 100 млрд. звезд. Диаметр этой звездной системы составляет почти 100 тыс. св. лет. Все звезды в Галактике движутся вокруг ее центра.
148—149, 180, 181, 185, 186, 190

Галактика в Андромеде
— звездная система, сходная с нашей Галактикой по своему размеру, строению и многообразию входящих в нее звезд; видна в созвездии Андромеды невооруженным глазом.
149, 190, 191

Галактика в Треугольнике
— спиральная звездная система, расположенная в созвездии Треугольника.
149, 191

Галактики
(пишутся со строчной буквы) — звездные системы, подобные нашей Галактике.
149—151, 191

Галактический экватор
— большой круг на небесной сфере, образуемый при пересечении ее средней плоскостью Млечного Пути (см.).
148

Галилей, Галилео
(1564—1642) — итальянский физик, механик

и астроном; одним из первых применил телескоп для наблюдений неба; показал, что Млечный Путь — скопление множества звезд; открыл фазы Венеры, вращение Солнца вокруг своей оси, горы на Луне, четыре спутника Юпитера; сделал выдающиеся открытия в физике и механике.
23—24, 33, 193

Галле, Иоганн Готфрид
(1812—1910) — немецкий астроном, специалист по исследованию метеоров и комет; в сентябре 1846 г. обнаружил планету Нептун по данным, предвычисленным У. Леверье.
104

Галлей, Эдмунд
(1656—1742) — английский астроном; открыл собственное движение звезд в пространстве; установил расстояние Земли от Солнца и то, что комета (потом названная его именем) относится к Солнечной системе и появляется периодически.
31, 32, 182

Ганимед
— наибольший по размерам и массе из четырех самых ярких спутников Юпитера, открытых Галилеем.
102, 104, 224

Гевелий, Ян
(1611—1687) — польский астроном-наблюдатель; построил в г. Гданьске большую обсерваторию, снабженную точными угломерными инструментами; сделал первое подробное описание Луны, открыл четыре кометы, составил звездный каталог.
26, 28

Гелиоцентрическая система мира
(система Коперника) — учение, обоснованное Коперником, согласно которому Земля есть одна из планет, обращающихся вокруг Солнца — центра планетной системы. Это учение стало основой развития новой астрономии.
20—22, 26, 182

Геоцентрическая система мира
(система Птолемея) — ошибочное учение, господствовавшее в древности и в средние века, утверждавшее, что Земля неподвижна, а Солнце, Луна, планеты и звезды обращаются вокруг Земли; опровергнуто Коперником, установившим, что Земля — одна из планет Солнечной системы.
14—15, 17, 20, 23

Гераклит
(ок. 530—470 до н. э.) — древнегреческий философ-материалист; выдвинул идею об изменяемости в природе.
11

Гермес
— малая планета.
105

Герцшпрунг, Эйнар
(1873—1967) — датский астроном; изучал звездные скопления, переменные звезды; много сделал для изучения эволюции звезд.
190

Гершель, Вильям
(1738—1822) — английский астроном; открыл и исследовал много туманностей, двойных звезд, планету Уран, обнаружил движение Солнца в пространстве среди звезд; впервые на основе наблюдений пытался выяснить строение нашей звездной системы — Галактики.
104, 179—181, 185, 190

Гершель, Джон
(1792—1871) — английский астроном, сын В. Гершеля; продолжая работы отца, он изучал двойные звезды, туманности и звездные скопления южного полушария неба.
181

Гершель, Каролина
(1750—1848) — любитель астрономии, сестра В. Гершеля; открыла 8 комет и 14 туманностей; помогала брату в проведении наблюдений и их обработке.
181

Гиады
— звездное скопление в созвездии Тельца, содержит около 100 звезд.
141

Гиппарх
(II в. до н. э.) — древнегреческий астроном; установил разделение звезд по их видимому блеску на звездные величины (см.), определил расстояние до Луны и ее размеры; составил первый известный нам звездный каталог.
12, 14

Год
— единица измерения времени, равная продолжительности одного полного оборота Земли вокруг Солнца. В году содержится 365 сут 5 ч 48 мин и 46 с с долями.
159, 162, 163

Голова кометы.
108, 111—113

Гранулы
— газовые образования на солнечной поверхности, имеющие вид зерен. Размеры отдельных гранул измеряются сотнями километров.
79

Григорианский календарь
(новый стиль) — введен в 1582 г. папой Григорием XIII; более точный, чем юлианский календарь (см.); в настоящее время принят в большинстве стран земного шара.
165—166

Гудрайк, Джон
(1764—1786) — английский любитель астрономии, один из первых исследователей переменных звезд.
134

Гюйгенс, Христиан
(1629—1695) — нидерландский механик, физик, математик и астроном; открыл спутник Сатурна — Титан и кольцо Сатурна; усовершенствовал телескоп и маятниковые часы.
28

Д

Д'Аламбер, Жан Лерон
(1717—1783) — французский математик и философ; разрабатывал труднейшие вопросы движения небесных тел.
181

Движение полюсов Земли
— смещение полюсов, происходящее из-за того, что земной шар не занимает неизменного положения по отношению к своей оси вращения; за движением полюсов следит специальная сеть обсерваторий — широтных станций.
155, 194

Двойные звезды
— системы, состоящие из двух звезд, каждая из которых обращается вокруг их общего центра тяжести. Обычно одна из звезд в паре бывает ярче, и ее называют главной звездой, а другую — ее спутником (например, Мицар и его спутник Алькор). Системы, состоящие из трех, четырех или больше звезд, называются кратными звездами.
132—134, 179, 184

Деймос
— спутник Марса.
100, 224

Деландр, Анри
(1853—1948) — французский астроном; проводил систематическое фотографирование хромосферы Солнца, получил много фотографий планет и туманностей, исследовал вращение колец Сатурна.
189

Демокрит
(ок. 460—370 до н. э.) — древнегреческий философ-материалист, один из основоположников учения об атомах; считал, что во Вселенной существуют бесчисленные миры, одни из

которых формируются, другие достигли расцвета, третьи разрушаются и гибнут.
11

Деферент и эпицикл
— окружности, по которым, по мнению Птолемея, движутся планеты; деферент — большая окружность, центром которой является Земля, эпицикл — меньшая окружность, центр которой обращается по деференту вокруг Земли.
15

Диаграмма Герцшпрунга — Ресселла
(диаграмма «спектр — светимость») — график, на котором нанесены абсолютные величины звезд в зависимости от их спектральных классов; исследование этой диаграммы позволяет сделать важные выводы о природе звезд и об их эволюции.
190

Диффузные туманности
— обширные облака рассеянного (газового или состоящего из твердых частиц — пылинок) вещества, расположенного в межзвездном пространстве. Многие ученые полагают, что звезды и планеты возникли из диффузных туманностей в результате их уплотнения.
144

Ж

Жансен, Пьер
(1824—1907) — французский астроном, один из пионеров применения спектрального анализа в астрономии.
188

З

Задача двух тел
— проблема небесной механики, связанная с определением движения двух небесных тел с известной массой, находящихся под действием силы взаимного тяготения.
170

Закон всемирного тяготения
— закон, устанавливающий, что любые два тела взаимно притягиваются друг к другу и сила их притяжения прямо пропорциональна массам притягивающихся тел и обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними; открыт английским ученым И. Ньютоном (см.) в 1687 г.
30—32, 33—35, 168, 170, 171, 181

Законы движения планет Кеплера
— три закона, открытые Кеплером, которым подчиняются движения тел Солнечной системы.
26, 169—170, 181

Затменные переменные звезды
— очень тесные двойные звезды, плоскость орбиты которых проходит через луч зрения. При обращении вокруг общего центра тяжести обе звезды попеременно закрывают друг друга, так что общий блеск системы во время затмений ослабевает.
134, 136

Звездная величина
— принятая в астрономии единица измерения видимого блеска звезд и других небесных тел. Чем слабее светится звезда, тем больше число, обозначающее ее звездную величину. Самые яркие звезды назвали звездами 1-й величины. Самые слабые звезды, видимые невооруженным глазом, относятся к звездам 6-й звездной величины. К действительным размерам и светимости звезд звездная величина не имеет прямого отношения.
12, 56, 128

Звездные ассоциации.
52

Звездные скопления
— группы звезд, разделенные между собой меньшим расстоянием, чем обычные межзвездные расстояния; звезды в такой группе связаны общим движением в пространстве и имеют общее происхождение.
141

«Звездный дождь»
— см. Метеорный поток.

Звезды
— гигантские раскаленные, самосветящиеся газовые шары. Солнце — одна из звезд, притом средняя по размерам и светимости. По своим характеристикам звезды многообразны; различаются звезды — гиганты и карлики, одиночные, двойные и кратные, переменные и новые.
128—139, 154, 174, 190, 222

Звезды невосходящие.
63

Звезды незаходящие.
63

Зеелигер, Гуго
(1849—1924) — немецкий астроном; занимался вопросами теоретической астрономии, строения Млечного Пути и др.
192

Земля
— третья от Солнца планета, планета, на которой мы живем. Среднее расстояние Земли от Солнца принято в астрономии в качестве единицы для измерения больших расстояний (см. Астрономическая единица).
95—96, 153, 158, 219, 223

Зенит
— точка пересечения отвесной линии с воображаемой небесной сферой над головой наблюдателя.
62

Зодиакальные созвездия
— 12 созвездий: Овен, Телец, Близнецы, Рак, Лев, Дева, Весы, Скорпион, Стрелец, Козерог, Водолей, Рыбы, расположенных вдоль пути годичного перемещения Солнца по небу среди звезд. В каждом из созвездий Солнце ежегодно бывает приблизительно в течение месяца.
64, 219

И

Ибн-Юнус
(950—1009) — арабский астроном; провел обширные наблюдения на обсерватории близ Каира, составил таблицы движения Луны, Солнца и планет.
17

Ионосфера
— слой земной атмосферы, атомы и молекулы которого частично ионизованы под влиянием коротковолнового излучения Солнца и корпускулярных потоков.
173

Искусственные спутники Земли
— искусственные небесные тела, научные лаборатории, оснащенные автоматическими приборами для исследования верхних слоев атмосферы и изучения некоторых явлений во внеземном пространстве.
34, 158, 173, 177, 212

К

Кавендиш, Генри
(1731—1810) — английский физик и химик; производил опыты над взаимодействием тел под влиянием силы тяготения.
34

Казы-заде Ар-Руми
— математик и астроном XV в., работавший на Самаркандской обсерватории Улугбека (см.).
19

Календарь
— система счета времени. В основе его лежат единицы измерения времени, данные нам самой природой: год и сутки.
8, 159—166

Кант, Иммануил
(1724—1804) — известный немецкий ученый;

в 1755 г. впервые выдвинул научную гипотезу происхождения небесных тел.
152, 180, 182, 190

Кассини, Джованни Доменико
(1625—1712) — астроном, итальянец по происхождению, работавший во Франции; открыл вращение Юпитера и Марса, 4 спутника Сатурна, деление кольца Сатурна, определил расстояние от Земли до Солнца.
26

ал-Каши, Джемшид ибн-Масуд
(г. рожд. неизв. — ум. ок. 1436) — математик и астроном XV в., работавший на Самаркандской обсерватории Улугбека; принимал участие в составлении Самаркандского звездного каталога.
19

Квадратура
— такое взаимное расположение Земли, Солнца и одной из планет, отстоящих от Солнца дальше, чем Земля, при котором направление на планету составляет прямой угол с направлением на Солнце.
38

Квазары
— мощные источники космического радиоизлучения, природа которых в настоящее время еще не раскрыта. По-видимому, являются самыми яркими и далекими из известных сейчас небесных объектов.
151, 175

Кеплер, Иоганн
(1571—1630) — немецкий астроном; установил три основных закона, по которым совершаются движения планет вокруг Солнца.
22, 24, 26, 33, 110, 139

Кёртис, Хебер
(1872—1942) — американский астроном; утверждал, что многие туманности являются далекими звездными системами, подобными нашей Галактике. Это мнение было подтверждено в 1924 г. открытием Э. Хаббла.
190

Килер, Джемс Эдуард
(1857—1903) — американский астроном, исследователь спектров планет, звезд и туманностей; изучал кольца Сатурна.
189

Клеро, Алексис Клод
(1713—1765) — французский математик; изучал движение тел Солнечной системы.
181

Ковальский, Мариан Альбертович
(1821—1884) — русский астроном. Наиболее важные его работы посвящены изучению движения звезд, строению Галактики и небесной механике.
186

Козырев, Николай Александрович
(р. 1908) — советский астрофизик, исследователь Луны и планет, внутреннего строения звезд.
71

Кольца Сатурна
— образование, окружающее планету Сатурн и состоящее из бесчисленного множества мелких частиц, обращающихся вокруг планеты по законам Кеплера. Толщина колец около 3 км, поперечник внешнего края — 275 тыс. км.
28, 102, 104, 189

Комета Биэла
— комета, которая в XIX в. распалась на части и породила метеорный поток (см.), давший обильные «звездные дожди».
111

Комета Галлея
— первая комета, у которой была определена орбита и для которой предсказано время ее очередного появления. Обращается вокруг Солнца с периодом около 76 лет, очередное появление ожидается в 1986 г.
32, 109

Комета Энке — Баклунда
— комета с очень коротким периодом обращения вокруг Солнца (3,3 года), причем этот период постепенно уменьшается; наблюдается с 1785 г. Названа по имени немецкого астронома И. Ф. Энке (1791—1865) и русского астронома О. А. Баклунда (см.).
109

Кометоискатель
— специальная астрономическая труба для отыскания комет; отличается большой светосилой и дает большое поле зрения.
109

Кометы
— небесные тела, входящие в состав Солнечной системы; имеют вид туманных пятнышек с ярким сгустком в центре — ядром. У ярких комет при приближении к Солнцу появляется хвост в виде светящейся полосы.
107—115, 179, 187, 210

Коперник, Николай
(1473—1543) — польский ученый; опроверг ложную геоцентрическую систему мира Аристотеля — Птолемея, открыл действительное устройство Солнечной системы, в которой Земля — только рядовая планета.
18, 20—24, 26, 33, 152, 184

Космическая пыль.
141—142

Космогонические гипотезы.
152—154, 182

Крабовидная туманность
— туманность в созвездии Тельца, образовавшаяся в результате вспышки сверхновой звезды, которая наблюдалась в 1054 г.; является мощным источником радиоизлучения.
138, 139

Красное смещение в спектрах галактик
— смещение линий в спектрах далеких галактик к красному концу спектра; по всей вероятности, объясняется принципом Доплера (см.) в связи с удалением галактик от нас.
151

Кулик, Леонид Алексеевич
(1883—1942) — советский ученый; занимался изучением метеоритов, в особенности изучением обстоятельств падения Тунгусского метеорита.
122

Кульминация светила
— явление прохождения светила через меридиан небесный (см.).
62

Л

Ламберт, Иоганн Генрих
(1728—1777) — немецкий математик, физик и философ; утверждал, что наша звездная система — одна из бесчисленных звездных систем в бесконечной Вселенной.
180, 184, 190

Лаплас, Пьер Симон
(1749—1827) — французский математик и астроном. Основные труды Лапласа посвящены разработке теории движения тел Солнечной системы на основе закона всемирного тяготения. Разработал гипотезу образования Солнца и планет.
152, 179, 181—182

Лебедев, Петр Николаевич
(1866—1912) — русский физик; точнейшими опытами доказал существование давления света, что очень важно для астрономии.
114, 187

Леверье, Урбен Жан Жозеф
(1811—1877) — французский астроном. На основании его вычислений в 1846 г. была от-

крыта планета Нептун.
104

Левкипп
пред п о л о ж и т е л ь н о 500—440 до н. э.) — древнегреческий философ, один из основоположников теории атомного строения материи.
11

Лейбниц, Готфрид Вильгельм
(1646—1716) — немецкий математик и философ.
29

Лексель, Андрей Иванович
(1740—1784) — русский астроном; исследовал движение кометы, получившей впоследствии его имя; доказал, что открытое В. Гершелем новое небесное тело является не кометой, как это предполагалось, а планетой, названной Ураном.
179

Линия перемены дат
— воображаемая линия на земном шаре; проходит преимущественно в Тихом океане по меридиану, имеющему долготу 180°. Путешественники, направляющиеся с запада на восток, пересекая эту линию, дважды считают один и тот же день; направляющиеся в обратном направлении — пропускают один день.
167

Локьер, Джозеф Норман
(1836—1920) — английский астрофизик, исследователь спектра Солнца и звезд.
188

Ломоносов, Михаил Васильевич
(1711—1765) — русский ученый-энциклопедист; был выдающимся астрономом своего времени. Он открыл существование атмосферы у Венеры, создал новый тип телескопа, разработал ряд приборов и методов для нужд практической астрономии.
11, 94, 114, 128, 178—179, 182

Луна
— спутник Земли. Радиус ее немногим более $^1/_4$ земного; объем в 50 раз меньше объема Земли. Луна всегда обращена к нам одной и той же стороной; лишена атмосферы.
23, 33, 35, 65—75, 153, 208, 220, 224

Лундмарк, Кнут
(1889—1958) — шведский астроном; в 1920 г. установил, что туманность в Андромеде находится далеко за пределами нашей Галактики.
190

Лунно-солнечный календарь
— система календаря, в которой была сделана попытка согласовать три естественные единицы времени — год (см.), месяц (см.) и сутки (см.).
162

Лунное затмение
— небесное явление, вызываемое тем, что Луна, обращаясь вокруг Земли, попадает в тень, отбрасываемую Землей, и становится невидимой.
8, 70, 91, 208, 221

Лунные кратеры
— горный хребет в виде правильного кольца, окружающего ровную и гладкую площадку; в центре этой площадки возвышается коническая гора.
69—72

Лунные «моря»
— обширные равнинные места на Луне, совершенно не содержащие воды.
69—72

Лунный календарь
— система календаря, основой которого является лунный месяц (см.).
162

M

Магеллановы Облака (Большое и Малое)
— ближайшие к нашей Галактике звездные системы; имеют неправильную форму; расположены в южном полушарии неба и в СССР не видны.
149

Магнитное поле Земли.
175

Магнитопауза
— граница магнитосферы (см.).
175

Магнитосфера
— область околоземного пространства, заполненная заряженными частицами, движущимися в магнитном поле Земли.
175

Максутов, Дмитрий Дмитриевич
(1896—1964) — советский оптик; создал телескоп нового типа — менисковый (см.).
44

Малые планеты, или астероиды
— небольшие тела, входящие в состав Солнечной системы; имеют в поперечнике размеры от 800 км до 1—2 км и менее; движутся астероиды вокруг Солнца по тем же законам, по которым обращаются и большие планеты. Большинство малых планет движутся вокруг Солнца в пространстве между орбитами Марса и Юпитера.
105—106, 220

Марс
— четвертая по удаленности от Солнца планета Солнечной системы; имеет 2 спутника; полный оборот вокруг Солнца совершает за один год и 11 мес.
8, 24, 97—100, 106, 153, 170, 209, 223, 224

Мартынов, Дмитрий Яковлевич
(р. 1906) — советский астроном, исследователь переменных звезд, межзвездной среды и планет.
54

Маскелайн, Невил
(1732—1811) — английский астроном, был директором Гринвичской обсерватории, основатель английского астрономического ежегодника.
34

Масконы
— концентрации масс в некоторых областях Луны. Обнаружены по их воздействию на движение искусственных спутников Луны.
73

Межзвездная среда
— разреженное вещество, заполняющее пространство между звездами; состоит из газа и небольших твердых частиц (пыли), по большей части собранных в туманности. В межзвездную среду входят те же химические элементы, из которых состоят Солнце и звезды.
141, 143, 144

Межзвездное поглощение света
— ослабление видимого блеска далеких звезд, вызываемое облаками темной пылевой материи, заполняющими значительные области межзвездного пространства.
143

Менисковый телескоп
— зеркально-линзовый телескоп; оптическая система его состоит из сферического вогнутого зеркала и выпукло-вогнутой линзы — мениска; разработан Д. Д. Максутовым.
44

Меридиан небесный
— воображаемая линия на небесной сфере, проходящая через полюсы мира и зенит места наблюдения; пересекает линию горизонта в точках севера и юга.
62

Меркурий
— ближайшая к Солнцу планета Солнечной системы.
8, 92—94, 104, 153, 223

Местлин, Михаэль
(1550—1631) — австрийский математик и астроном, учитель Кеплера, последователь системы Коперника.
24

Месье, Шарль
(1730—1817) — французский астроном, исследователь комет; в 1784 г. составил первый каталог туманностей и звездных скоплений.
138

Месяц
— период времени, связанный с обращением Луны вокруг Земли; различают сидерический, или звездный, месяц (период обращения Луны вокруг Земли), равный в среднем 27 сут 7 ч 43 мин 11 с, и синодический месяц (период смены лунных фаз), равный в среднем 29 сут 12 ч 44 мин 2 с.
67, 161, 162

Метагалактика
— грандиозная совокупность отдельных галактик и скоплений галактик. Все усматриваемые в самые мощные телескопы звездные системы составляют только часть Метагалактики, границы которой пока остаются недоступными для наблюдений. Но и Метагалактика — только ничтожная часть бесконечной Вселенной.
151

Метеоритные кратеры
— углубления, нередко большие, в земной поверхности, образовавшиеся от падения гигантских метеоритов.
120

«Метеоритный дождь»
— выпадение на небольшой площади земной поверхности сразу большого числа отдельных метеоритов, образовавшихся в результате разрыва в воздухе одного крупного метеорита.
120

Метеориты
— камни или куски железа, упавшие на Землю из межпланетного пространства. Метеориты состоят из тех же химических элементов, из которых состоит Земля.
118—125

Метеорный поток
— периодическое появление на небе большого числа метеоров. Это объясняется встречей Земли с роем метеорных частиц. При некоторых обстоятельствах Земля, пересекая орбиту метеорного роя, попадает в наиболее плотную его часть, и тогда наблюдается «звездный дождь».
116, 118, 187

Метеоры
— небесные явления, получившие в народе название «падающие звезды». Их появление связано с тем, что в атмосферу Земли из межпланетного пространства влетают с огромной скоростью мельчайшие твердые частицы, испаряющиеся в атмосфере от нагревания.
116—118, 157, 210—211

Метон
(ок. 460 до н. э. — г. смерти неизв.) — древнегреческий астроном и математик; его работы имели важное значение для построения календаря.
162

Михайлов, Александр Александрович
(р. 1888) — советский астроном, академик; известен исследованиями во многих разделах астрономии.
185

Млечный Путь
— широкая светящаяся полоса, хорошо видимая на небе в темные ночи; состоит из огромного множества звезд; все они входят в нашу звездную систему — Галактику (см.), одной из звезд которой является Солнце.
148, 149

H

Наблюдения Солнца и солнечных затмений.
206—207

Наблюдения переменных звезд.
207—208

Наблюдения Луны и планет.
208—210

Наблюдения комет.
210

Наблюдения метеоров.
210—211

Наблюдения искусственных спутников Земли.
212

Наблюдения серебристых облаков.
212

Насирэддин Туси, Мухаммед
(1201—1274) — азербайджанский астроном и математик; основал обсерваторию в г. Мараге; составил очень важный для своего времени каталог звезд.
17, 19

Небесная механика
— раздел астрономии, посвященный изучению движения небесных тел (в первую очередь тел, составляющих нашу Солнечную систему) на основе закона всемирного тяготения.
168

Неделя
— промежуточная единица измерения времени между сутками и месяцами; возникла в древних государствах Востока.
165

Неймановы линии
— узор из тонких прямых линий, появляющийся на протравленных кислотой поверхностях некоторых железных метеоритов; названы по имени исследователя метеоритов австрийского ученого Неймана.
123

Нейтронные звезды
— предполагаемые звезды, состоящие из нейтронов; имеют в поперечнике около 10 км; вероятно, образуются в результате вспышек сверхновых звезд.
130—131, 139, 174

Нептун
— восьмая от Солнца планета Солнечной системы; открыта в 1846 г. немецким астрономом Галле на основании вычислений Леверье.
22, 104—105, 153, 186, 223, 224

Неуймин, Григорий Николаевич
(1886—1946) — советский астроном; в 1944—1946 гг. — директор Пулковской обсерватории; открыл 63 малые планеты и 7 комет.
185

Николай Кузанский
(1401—1464) — философ и ученый эпохи Возрождения, высказавший мнение о движении Земли и о том, что она не является центром Вселенной. Кузанский был одним из предшественников Коперника.
20

Новые звезды
— звезды, излучение которых внезапно увеличивается в тысячи раз, а затем медленно уменьшается. Иногда в нашей и в других галактиках наблюдаются вспышки сверхновых звезд. При таких вспышках звезды излучают свет в миллионы и сотни миллионов раз интенсивнее, чем Солнце. Причины таких вспышек наукой полностью еще не выяснены.
137—139

Ньютон, Исаак
(1643—1727) — английский математик, физик, астроном; открыл закон всемирного тяготения; впервые объяснил причину явлений приливов и отливов (см.).
28—32, 33, 35, 43, 158, 168, 170

O

Объектив
— оптическая система, состоящая из одной или нескольких линз, с помощью которой можно получить увеличенное изображение предмета. Используется в телескопах-рефракторах.
42, 43, 197

Окуляр
— часть телескопа; служит для рассматривания изображения, образуемого объективом; состоит обычно из нескольких линз.
42, 197

Ольберс, Генрих Вильгельм
(1758—1840) — немецкий астроном, исследователь комет и малых планет; высказал гипотезу о происхождении малых планет в результате разрыва большой планеты, обращавшейся между орбитами Марса и Юпитера.
183

Оорт, Ян Хендрик
(р. 1900) — голландский астроном; в 1927 г. обнаружил вращение нашей звездной системы — Галактики — вокруг ее центра.
115, 138, 186

Орлов, Александр Яковлевич
(1880—1954) — советский астроном; основные его работы относятся к небесной механике, исследованиям силы тяжести и движения полюсов Земли (см.).
54

Орлов, Сергей Владимирович
(1880—1958) — советский астроном; исследовал физическую природу комет, их происхождение и связь с малыми планетами и метеорами.
54, 110

Ось мира
— воображаемая прямая линия, вокруг которой происходит видимое суточное вращение неба. Она параллельна оси вращения Земли.
62

П

Павильон телескопа.
203, 205

Параллакс звездный, или годичный
— угол, под которым с той или иной звезды был бы виден радиус земной орбиты. Расстояние, на котором этот угол равен одной секунде (приблизительно 31 триллион км), называется парсеком и является мерой расстояний до далеких глубин Вселенной. Парсек равен 3,26 св. лет.
182, 183

Парсонс (лорд Росс), Уильям
(1800—1867) — английский астроном, построивший в 1845 г. гигантский по тому времени рефлектор, с диаметром зеркала 182 см, и исследовавший при его помощи многие внегалактические туманности.
179, 190

Первая космическая скорость
— скорость тела вблизи поверхности Земли, достижение которой позволяет ему превратиться в искусственный спутник с круговой орбитой; равна 7,9 км/с.
169, 172

Переменные звезды
— звезды, блеск которых со временем меняется. В зависимости от характера этого изменения и причин, его вызывающих, они подразделяются на различные типы (см. Цефеиды, Затменные переменные звезды, Новые звезды).
134, 136—139, 207—208

Перигелий
— ближайшая к Солнцу точка орбиты планеты.
96

Периодичность солнечной активности.
83—85

Пифагор
(ок. 580—500 до н. э.) — древнегреческий математик и философ.
11

Планетарий
— проекционный аппарат, с помощью которого воспроизводят картины звездного неба и движения небесных тел. Планетариями называются также научно-просветительные учреждения, в которых устанавливаются аппараты планетарий и ведется работа по распространению астрономических знаний среди населения.
213—218

Планетарные туманности
— туманности круглой формы, видимые в телескоп в виде маленьких дисков, напоминающих диск планеты; иногда имеют вид кольца с яркой звездой в центре; состоят из очень разреженного газа. Внутри такой газовой туманности всегда есть горячая звезда.
147

Планеты
— небесные тела, входящие в состав Солнечной системы и, несомненно, имеющиеся в системах других звезд; имеют шарообразную форму. Планеты Солнечной системы светят отраженным от их поверхности солнечным светом.
8, 92—106, 152—154, 209, 210, 219, 223, 224

Плеяды
— звездное скопление; относится к типу рассеянных скоплений; расположено в созвездии Тельца.
141, 161

Плутон
— девятая и самая далекая от Солнца планета Солнечной системы; открыт в 1930 г. астрономом К. Томбо (США).
22, 105, 153, 223

Полюс мира
— пересечение воображаемой оси мира с воображаемой небесной сферой. Северный полюс находится в созвездии Малой Медведицы, вблизи Полярной звезды, южный полюс — в созвездии Октанта.
62, 63

Полярная звезда
— самая яркая звезда в созвездии Малой Медведицы. Названа Полярной, так как расположена вблизи Северного полюса мира. По блеску относится к звездам 2-й звездной величины.
57, 62, 63

Полярные сияния
— электрическое свечение неба ночью, происходящее чаще всего в полярных областях Земли.
84, 157, 176—177, 207

Постоянная тяготения.
33, 34

Прикладной час
— величина, выражаемая в часах и минутах и характеризующая среднее запаздывание наивысшего уровня прилива относительно кульминации (см.) Луны.
37

Приливы и отливы
— периодическое наступление и отступление воды у берегов океанов и морей. Вызываются действием притяжения Луны и Солнца на Землю.
34, 35—38, 69, 157

Принцип Доплера
— изменение частоты колебаний или длины волны при движении источника этих колебаний относительно наблюдателя; выдвинут австрийским физиком Доплером (1803—1853) в 1842 г.; по отношению к свету доказан в лабораторных условиях А. А. Белопольским (см.); в астрономии используется для определения скоростей звезд и галактик по лучу зрения и для исследования вращения небесных тел.
93, 188, 189

Происхождение комет.
115

Происхождение метеоритов.
123—124

Происхождение Солнечной системы.
152—154

Происхождение звезд.
154

Противостояние Марса
— положение Марса на орбите, когда он и Земля находятся по одну сторону от Солнца и приблизительно на одной прямой линии. Если противостояние случится в тот момент, когда это расстояние наименьшее

(55,5 млн. км), то его называют великим; оно создает наиболее благоприятные условия для наблюдения Марса. Великие противостояния повторяются через каждые 15—17 лет.
97, 98

Протуберанцы
— громадные выступы причудливой и иногда быстро изменяющейся формы в солнечной атмосфере; состоят из раскаленных газов.
84—85, 86

Птолемей, Клавдий
— древнегреческий астроном, работавший в Александрии во II в. н. э.; разработал геоцентрическую систему мира, господствовавшую в науке вплоть до великого открытия Коперника.
12, 14, 15, 18, 22, 24

Пулковская обсерватория
— главная астрономическая обсерватория Академии наук СССР; одна из крупнейших обсерваторий мира; открыта в 1839 г.
49, 51, 185, 188, 189

Пульсары
— точечные источники радиоизлучения, испускающие импульсы с очень коротким периодом. Возможно, представляют собой нейтронные звезды.
130—131, 139

Р

Радиант
— точка на небесной сфере, откуда (как представляется для наблюдателя с Земли) вылетают метеоры при встрече Земли с метеорным потоком.
116

Радиационные пояса Земли
— пояса электрически заряженных частиц, окружающих Землю; открыты с помощью искусственных спутников Земли и космических ракет.
84, 96, 176

Радиоастрономия
— метод изучения небесных тел и глубин Вселенной, основанный на изучении радиоволн, приходящих на Землю из мирового пространства.
47—49

Радиолокация Луны, планет
— метод исследования, при котором к этим небесным телам направляется узкий пучок коротких радиоволн; отраженные ими радиолучи регистрируются, и по времени их прохождения можно определять расстояния и устанавливать некоторые физические свойства Луны и планет; уже проведены радиолокации Луны, Меркурия, Венеры, Марса и Юпитера.
48, 92, 94, 95

Радиолокация метеоров
— метод исследования метеоров, аналогичный радиолокации Луны и планет; этот метод позволяет изучать метеоры в любое время суток, независимо от погоды.
49, 118

Радиотелескопы
— приборы для исследования космического радиоизлучения; представляют собой радиоприемник чрезвычайно высокой чувствительности, присоединенный к антенне, принимающей излучение.
47, 144

Регмаглипты
— углубления на поверхности метеорита, образующиеся в результате воздействия на него атмосферы.
118

Ресселл, Генри Норрис
(1877—1957) — американский астроном; автор ряда важных исследований по астрофизике, звездной астрономии, космогонии, окончательно установил зависимость между светимостью звезд и их спектральным классом.
189—190

Рефлектор
— телескоп, в котором изображения небесных светил получаются с помощью отражения от вогнутого зеркала.
29, 43, 200—203

Рефрактор
— телескоп, в котором изображения небесных светил получают с помощью линзового объектива, создающего изображение, которое может быть рассмотрено глазом в окуляр или сфотографировано. В последнем случае рефрактор называют астрографом.
42, 43, 198—200

С

Сарос
— период повторяемости солнечных и лунных затмений; равен 18 годам и 11 дням (либо 10 дням, если за это время было 5 високосных лет); был известен еще астрономам древности.
89, 91

Сатурн
— шестая по расстоянию от Солнца планета Солнечной системы; имеет 9 спутников, наибольший из них — Титан.
8, 102—104, 153, 209, 223, 234

Сверхновые звезды
— см. Новые звезды.

Светимость звезд
— величина, принятая в астрономии для выражения мощности излучения звезды в сравнении с излучением Солнца. По светимости звезды разделяются на гиганты и карлики. Гиганты излучают свет в сотни и тысячи раз сильнее Солнца. Есть звезды-сверхгиганты, излучающие свет в десятки и сотни тысяч раз интенсивнее, чем Солнце. Звезды-карлики излучают свет как Солнце или во много раз слабее его.
129

Световой год
— единица расстояния в астрономии; обозначает расстояние, которое свет, распространяясь со скоростью 300 тыс. км/с, проходит за один год. Световой год равен 63 290 а. е., или 9,5 триллиона км.
148

Секки, Анджело
(1818—1878) — итальянский астроном; одним из первых изучал спектры звезд, Солнца и планет.
188

Серебристые облака
— облака, наблюдающиеся летом во время сумерек и плавающие в атмосфере на высоте 80—85 км; очень неплотные (сквозь них видны звезды) и изменчивые; по всей вероятности, состоят из ледяных кристалликов.
212

Сигналы времени
— передаются по радио для проверки часов; помимо специальных сигналов, передаваемых для проверки очень точных часов, каждый час передаются широковещательные сигналы.
47, 156

Сизигии
— новолуние и полнолуние.
38

Сидерический (или звездный) месяц
— см. Месяц.

Синодический месяц
— см. Месяц.

Сириус
— самая яркая по видимому блеску звезда неба.
32, 56, 57, 129, 133, 162, 163, 222

Система мира Коперника
— см. Гелиоцентрическая система мира.

Система мира Птолемея
— см. Геоцентрическая система мира.

Сихотэ-Алинский метеорит
— железный метеорит, упавший 12 февраля

1947 г. в районе горного хребта Сихотэ-Алинь на Дальнем Востоке; собрано около 23 т вещества этого метеорита.
120, 122

Скиапарелли, Джованни Вирджинио
(1835—1910) — итальянский астроном, исследователь комет, метеоров и планет; широко известны его наблюдения планеты Марс, на которой он открыл сеть тонких прямых линий, названных им каналами.
111

Служба времени
— работы, связанные с определением точного времени путем астрономических наблюдений, хранением времени с помощью точных астрономических часов и сообщением времени посредством радиосигналов.
156

Служба движения полюсов
— сеть широтных станций, следящих за перемещениями полюсов по земной поверхности.
155

Служба Солнца
— систематические наблюдения явлений на поверхности Солнца, производимые сетью обсерваторий по согласованной программе.
207

Созвездия
— участки, на которые разделяют звездное небо по фигурам, образуемым яркими звездами. Всего насчитывается 88 созвездий; ими пользуются для ориентировки на звездном небе. Принадлежность звезд к одному созвездию — это их «видимая», или перспективная, близость. На самом деле звезды, причисляемые к одному созвездию, находятся на самых различных расстояниях от нас.
56—64, 128

Солнечная корона
— самая внешняя часть атмосферы Солнца. Во время полных солнечных затмений корона наблюдается в виде серебристо жемчужного сияния, окружающего закрытый Луной диск Солнца.
78—82, 86, 90, 174, 207

Солнечная система, или планетная система
— совокупность небесных тел — планет и их спутников, астероидов, комет и т. д., обращающихся вокруг Солнца под действием силы его тяготения.
92—125, 219, 220, 223, 224

Солнечное затмение
— небесное явление, обусловленное тем, что Луна, обращаясь вокруг Земли, проходит между нею и Солнцем и закрывает собой солнечный диск. Затмения бывают полные, кольцеобразные и частные.
8, 86—91, 207, 221—222

Солнечные пятна
— представляют собой воронкообразные области более холодных газов на поверхности Солнца, находящихся под действием магнитных сил. Число пятен в году меняется. Наименьшее число пятен бывает приблизительно через каждые 11 лет.
23, 83

Солнечные установки
— сооружения, использующие непосредственно солнечную энергию для нужд народного хозяйства.
158

Солнечный ветер
— поток заряженных частиц, испускаемый Солнцем.
82, 175

Солнечный календарь
— система календаря, в основу которой кладется продолжительность солнечного года; в настоящее время действует в большинстве стран земного шара.
163—166

Солнце
— ближайшая к нам звезда, центральное тело нашей Солнечной системы; отстоит от Земли на расстоянии 149,6 млн. км.
38, 48, 64, 76—85, 129, 154, 173, 174, 179—181, 188, 189, 206—207, 220

Спектрально-двойные звезды
— тесные пары звезд, которые нельзя увидеть раздельно при помощи современных оптических средств; двойственность их обнаруживается по периодическим смещениям линий в их спектрах.
133

Спектральный анализ
— метод в астрофизике, позволяющий изучать химический состав светил с помощью исследования их спектров.
45, 158

Спутники планет
— небесные тела, обращающиеся вокруг планет под действием силы их тяготения; светят отраженным от их поверхности солнечным светом. Спутником Земли является Луна.
23, 26, 28, 33, 100—102, 104, 105, 179, 224

Струве, Василий Яковлевич
(1793—1864) — русский астроном, основатель и первый директор Пулковской обсерватории; исследовал двойные звезды и заложил основы современных представлений о строении нашей звездной системы — Галактики.
22, 40, 55, 181, 183, 184—185, 186, 190

Струве, Георг
— правнук В. Я. Струве, астроном, работавший в Германии.
55

Струве, Герман Оттович
(1854—1920) — внук В. Я. Струве, астроном, работавший в России и в Германии.
55

Струве, Людвиг Оттович
(1858—1920) — астроном, профессор Харьковского университета.
55

Струве, Отто Васильевич
(1819—1905) — русский астроном, сын В. Я. Струве; исследовал двойные звезды, измерил параллаксы некоторых звезд, наблюдал планеты, их спутники, кометы и туманности.
55, 185

Струве, Отто Людвигович
(1897—1963) — американский астроном, правнук В. Я. Струве; известен своими работами в области изучения спектров звезд и эволюции небесных тел; совместно с Г. А. Шайном (см.) открыл вращение звезд.
55, 193

Сутки
— единица измерения времени, равная периоду вращения Земли вокруг своей оси.
159, 161

Т

Талассоиды
— образования на обратной стороне Луны, сходные с лунными «морями»; покрыты многочисленными кратерами.
72

Тектиты
— стекловидные образования, находимые в почве в разных местах земного шара. Некоторые исследователи относят их к особому типу стеклянных метеоритов, однако природа тектитов окончательно еще не установлена.
123

Телескоп
— инструмент с оптическим устройством для наблюдений небесных светил.
29, 42—44, 173, 178, 179, 197—198

Телескоп самодельный.
198—203

Телескоп школьный.
197

Температуры звезд.
129, 174

Терминатор
— линия, отделяющая

на Луне (или планете) освещенную часть от неосвещенной.
70

Титан
— самый большой из спутников Сатурна, по размерам примерно равный Меркурию. На Титане обнаружена атмосфера.
28, 104, 224

Титов, Герман Степанович
(р. 1935) — советский летчик-космонавт; на космическом корабле «Восток-2», запущенном 6 августа 1961 г., в течение 25 ч 18 мин совершил 17 оборотов вокруг Земли и пролетел свыше 700 тыс. км.
7

Тихо Браге
(1546—1601) — датский астроном - наблюдатель; в своих исследованиях достиг наибольшей точности, которую можно было получить без телескопов. Его наблюдения использовал Кеплер для установления законов движения планет.
24, 26, 138

Тритон
— спутник Нептуна, один из крупнейших спутников в Солнечной системе.
105, 224

Тунгусский метеорит
— космическое тело, вторгшееся в атмосферу Земли 30 июня 1908 г. и взорвавшееся на некоторой высоте над земной поверхностью в сибирской тайге, в районе р. Подкаменная Тунгуска. Полагают, что это было столкновение Земли с ядром небольшой кометы.
115, 122

У

Увеличение телескопа.
197, 198, 199

Узлы лунной орбиты
— точки пересечения лунной орбиты с эклиптикой (см.).
87

Улугбек, Мухаммед
(1394—1449) — правитель Самарканда, узбекский астроном и математик; построил в Самарканде замечательную обсерваторию; совместно с другими выдающимися астрономами того времени составил звездный каталог и таблицы движения планет, наиболее точные для своей эпохи.
19, 43

Уран
— седьмая по расстоянию от Солнца планета Солнечной системы; открыт в 1781 г. В. Гершелем; имеет 5 спутников.
22, 104, 153, 179, 223, 224

Ф

Фаза затмения.
87

Фазы Луны
— различные формы видимой части Луны. Различают четыре основные фазы: новолуние — Луна невидима; первая четверть — видна половина лунного диска; полнолуние — диск Луны освещен полностью; последняя четверть — видна опять половина диска Луны.
66, 220

Факелы
— более яркие, чем окружающая фотосфера, участки на Солнце.
83

Фалес
(конец VII — начало VI в. до н. э.) — древнегреческий ученый; сделал ряд открытий в арифметике, геометрии и астрономии; впервые предсказал солнечное затмение — 585 г. до н. э.
11

Фесенков, Василий Григорьевич
(1889—1972) — советский астроном, академик, автор важных исследований по разным вопросам астрофизики, в том числе и по проблемам происхождения и эволюции небесных тел.
54, 154

Фобос
— спутник Марса.
100, 224

Фогель, Герман Карл
(1841—1907) — немецкий астроном; известен исследованиями спектров звезд, разработкой спектральной классификации и применением фотографии в астрономии.
188

Фотосфера Солнца
— видимая поверхность Солнца.
79, 83, 173, 174

Х

Хаббл, Эдвин
(1889—1953) — американский астроном; впервые в 1924 г. установил, что далекие туманности, в частности туманность в Андромеде, являются звездными системами, равноправными с нашей Галактикой. Тем самым было доказано, что наша звездная система не единственная во Вселенной.
190—191

Хайям, Омар
(ок. 1040—1123) — среднеазиатский поэт, математик и философ, автор интересной системы календаря.
17, 18

Харадзе, Евгений Кириллович
(р. 1907) — советский астроном, академик АН Грузинской ССР, директор Абастуманской астрономической обсерватории.
52

Хвосты комет.
108, 110—115, 179, 187

Хеггинс, Вильям
(1824—1910) — английский астрофизик; один из первых изучал спектры звезд.
188

Хондры
— округлые зерна, встречающиеся в каменных метеоритах (от греческого «хондрос» — зерно).
123

ал-Хорезми, Мухаммед бен-Муса
(ок. 780 — ок. 850) — среднеазиатский математик и астроном. Астрономические работы его посвящены солнечным часам, измерительным приборам, астрономическим таблицам.
18

Хромосфера
— нижние слои атмосферы Солнца, непосредственно примыкающие к фотосфере (см.); простираются до высоты 15 тыс. км над фотосферой.
79, 80, 86, 90, 174, 207

Ц

Цераский, Витольд Карлович
(1849—1925) — русский астрофизик.
188, 195

Церера
— первая по времени открытия и самая крупная из малых планет; открыта итальянским астрономом Пиацци в 1801 г.
105

Цесевич, Владимир Платонович
(р. 1907) — советский астрофизик, исследователь переменных звезд.
54

Цефеиды
— разновидность переменных звезд. Все цефеиды являются звездами-гигантами и сверхгигантами. Изменение блеска у них происходит строго периодически. Открытие зависимости между периодом изменения блеска у цефеид и их светимостью дало возможность определить расстояние до очень да-

леких звездных систем, если в них имеются цефеиды.
136, 189

Циолковский, Константин Эдуардович
(1857—1935) — русский ученый, основоположник космонавтики; сделал ряд крупных открытий в области ракетной техники и теории межпланетных сообщений.
168, 169, 172

Ч

Часы
— прибор для хранения и измерения времени. Часы бывают солнечные, маятниковые, механические, кварцевые, атомные и др.
47, 156

Число Вольфа
— одна из характеристик солнечной активности; число Вольфа равно удесятеренному числу групп пятен, наблюдающихся в данное время на диске Солнца, плюс общее число пятен.
207

Ш

Шайн, Григорий Абрамович
(1892—1956) — советский астрофизик, академик. Его основные труды посвящены изучению спектров звезд и структуры диффузных туманностей. Установил совместно с американским астрономом О. Л. Струве (см.) вращательное движение звезд.
51, 192—193

Шварцшильд, Карл
(1873—1916) — немецкий астроном; провел важные исследования в области звездной астрономии и теоретической астрофизики, разработал теорию звездных атмосфер.
191, 192

Шварцшильд, Мартин
— американский астроном, сын Карла Шварцшильда. Основные его работы посвящены теории внутреннего строения звезд.
192

Шкловский, Иосиф Самуилович
(р. 1916) — советский астрофизик; провел важные радиоастрономические исследования, исследования солнечной короны, межзвездной среды и др.
51

Шмидт, Отто Юльевич
(1891—1956) — советский ученый, академик; разработал гипотезу образования Земли и планет из холодных пылинок и газов, окружавших в свое время Солнце.
152—153

Шретер, Иоганн
(1745—1816) — немецкий любитель астрономии, ставший одним из крупных астрономов своего времени. Основные исследования посвящены Меркурию, Венере, Марсу.
183

Штернберг, Павел Карлович
(1865—1920) — советский астроном и революционный деятель; работал во многих областях астрономии, активный участник Великой Октябрьской социалистической революции и гражданской войны.
194—195

Э

Эддингтон, Артур Стэнли
(1882—1944) — английский астроном; его исследования посвящены главным образом изучению движения звезд, их внутреннего строения, теории относительности.
191, 192

Эйлер, Леонард
(1707—1783) — математик, механик и физик, работавший более 30 лет в Петербургской Академии наук. Многие его труды посвящены исследованию движения тел Солнечной системы.
181

Эйнштейн, Альберт
(1879—1955) — физик, создатель теории относительности.
35

Экватор небесный
— воображаемая линия на небесной сфере, образованная пересечением с небесной сферой плоскости, перпендикулярной к оси мира.
63

Экваториальная установка телескопа
— установка, позволяющая осуществлять вращение телескопа вокруг двух осей: оси, параллельной оси мира (полярная ось), и оси, параллельной плоскости небесного экватора (ось склонения).
198

Эклиптика
— большой круг небесной сферы, по которому происходит движение Солнца среди звезд.
64, 96

Эратосфен
(ок. 276—194 до н. э.) — древнегреческий ученый; первым определил размеры земного шара, заложил основы математической географии; в математике изучал простые числа.
12

Ю

Юлианский календарь
(старый стиль) — солнечный календарь, введенный римским императором Юлием Цезарем в 46 г. до н. э. и разработанный александрийскими астрономами во главе с Созигеном; в большинстве стран применялся до конца XVI в.
163—165

Юпитер
— самая большая планета Солнечной системы, пятая по расстоянию от Солнца. Имеет 12 спутников.
8, 48, 100—102, 153, 209, 223, 224

Я

Ядро Галактики.
148

Ядро кометы.
108, 112

Числа и фигуры

А. И. Маркушевич
243 Несколько слов о математике

Числа

И. Г. Башмакова
245 Как люди считали в старину и как писали цифры
247 Счет двойками, тройками и дюжинами
248 Задача о взвешивании
248 Наш устный счет
250 Счет у первобытных народов
252 Первые нумерации
253 Алфавитные нумерации. «Псаммит»
256 Позиционные системы

В. И. Нечаев
259 Простейшие неопределенные уравнения
259 Пифагоровы треугольники
260 Взвешивание груза на чашечных весах
260 Раскрой фанеры
261 Неопределенные уравнения
261 Рациональные и целые решения неопределенных уравнений первой степени. Метод рассеивания
263 Решение задачи о взвешивании
264 Неопределенные системы уравнений первой степени
264 Решение задачи о раскрое фанеры
266 Целые решения неопределенных уравнений степени выше первой

Фигуры и тела

М. В. Потоцкий
270 Геометрия вокруг нас

И. Г. Башмакова
280 Как возникла геометрия
280 Возникновение геометрии как науки
281 Построение дедуктивной системы
283 Постулат о параллельных и неевклидовы геометрии

И. М. Яглом
285 Геометрические преобразования
285 Что такое геометрия
287 Движения
288 Преобразования подобия
290 Линейные преобразования
293 Преобразования как основа классификации теорем

Н. И. Польский
294 О различных геометриях
294 С чего начинается изучение геометрии
295 Как применяется геометрическая теория
297 Аксиома о параллельных
300 Равна ли сумма углов треугольника 180°
302 Нужны ли другие геометрии
305 Чем отличаются различные геометрии

Функции

В. А. Ефремович
306 Что такое координаты и для чего они служат
308 Декартовы координаты точки
308 Простейшие задачи
309 Задание фигуры, состоящей из бесчисленного множества точек
311 Прямая
312 Основные задачи на прямую
313 Окружность
314 Аналитическое решение геометрических задач
315 Неразрешимые задачи на построение
316 Полярные координаты
317 Координаты на сфере
318 Криволинейные координаты на любой поверхности. Общая идея координат

Н. Я. Виленкин
319 Функции в природе и технике
320 Жесткость балки
320 Прогиб балки
321 Сосредоточенная нагрузка
322 Число *e*. Натуральные логарифмы
322 Один человек может удержать корабль
323 Радиоактивный распад вещества
323 Остывание чайника
324 Почему парашютист падает равномерно
324 Как измеряют высоту при помощи барометра
325 Сколько топлива должна взять ракета
325 Гармонические колебания
326 Колебания маятника
326 Разряд конденсатора
326 Как соединить две трубы
326 Изгиб колонны
327 Затухающие колебания
327 Вынужденные колебания
328 Сложение колебаний
328 Биения
330 Приливы и отливы
330 Спектральный анализ
330 Как машина открыла теорему
330 Почему не работал трансатлантический кабель
331 Радиоприемник и камертон
331 Заключение

В. Г. Болтянский и Н. Я. Виленкин
332 Интеграл и производная
332 Задача Кеплера
332 Математика за чайным столом
332 Объем тела
334 Промер реки
335 В автомобиле
335 Интеграл
336 Геометрическое вычисление интегралов
338 Применение интегралов
339 Чудесная формула
340 Как измерить скорость полета пули
340 Скорость радиоактивного распада
341 Умеете ли вы проводить касательную?
342 Производная
343 Производные многочленов
343 Пчелы-математики
344 Как сделать самую большую коробку.
345 Балка наибольшей прочности
345 Формула Ньютона — Лейбница
346 Производные синуса и косинуса
347 Производная показательной функции
347 Радиоактивный распад
348 Показательная функция в природе и технике
348 Леверье и Адамс открывают новую планету
350 Уравнение гармонических колебаний
350 Моделирование

Множества и операции

П. С. Александров
351 Понятие множества
351 Множества конечные и бесконечные
352 Взаимно однозначное соответствие между двумя множествами
355 Счетные множества
355 Множество всех рациональных чисел счетно
356 Множество всех действительных чисел несчетно
357 Мощность множества

И. М. Яглом
360 Алгебра множеств и алгебра логики
360 Алгебра чисел
361 Алгебра множеств
362 «Нуль» и «единица»
364 Удивительная алгебра
366 Дополнение множества. Аналогия между сложением и умножением множеств
368 Два способа задания множества. Множества и высказывания
368 Алгебра множеств и алгебра высказываний
370 Отрицание. Отношение следствия
371 Законы мысли
372 Правила вывода
В. Г. Болтянский и Н. Я. Виленкин
374 Чем занимается алгебра
374 Числа и действия
374 Необычная конференция
375 Фундамент алгебры
376 Сила букв
377 Кольца
378 Поля
378 Разложение на множители и решение уравнений
378 Разложение чисел на множители
379 Разложение многочленов на множители
379 Удивительное разложение
380 Разложение многочленов на множители и решение уравнений
380 Основная теорема алгебры многочленов
381 Решение уравнений в радикалах
382 Циркуль и линейка
383 Группы
383 Умножение геометрических преобразований
384 Что такое равные фигуры
385 Группы геометрических преобразований
386 Разные геометрии
386 Группы симметрий
387 Симметрия в природе
387 Группы алгебраических преобразований
389 Абстрактная теория групп
390 Заключение

Математика учит предсказывать и управлять
Ю. И. Соколовский
391 Электронные вычислительные машины
391 Создать электронный арифмометр!
392 Двоичная нумерация
393 Считают лампы
394 Обязанности вычислителя
395 Возможен ли такой автомат?
396 Главные части машины
398 Инструкция для машины
399 Исполнение программы
399 Программа с преобразованиями
400 Универсальность машины
401 Автоматический перевод
В. М. Глушков
404 Что такое кибернетика
404 Управляющие системы
405 Информация и кодирование
406 Теория автоматов
407 Вычислительная техника в народном хозяйстве
409 Разумная машина — верный помощник человека
В. М. Монахов
413 Чем занимается теория линейного программирования
Е. С. Вентцель
417 Исследование операций
Б. В. Гнеденко
420 Наука о случайном
420 Обыденные представления
421 Примеры случайных событий
422 Зачем нужно изучать случайные явления
423 Зарождение науки о случае
425 Теоремы сложения и умножения вероятностей
426 Дополнительные исторические сведения
427 Закон больших чисел
428 Некоторые современные направления развития теории вероятностей
Е. С. Вентцель
429 Теория игр
429 Чем занимается теория игр
429 Парная игра с нулевой суммой. Цена игры
430 Игра в нормальной форме. Матрица игры
432 Примеры конечных игр. Принцип минимакса
434 Седловая точка. Чистая цена игры
435 Решение игры в смешанных стратегиях. Основная теорема теории игр

Выдающиеся математики
И. Г. Башмакова
436 Архимед
А. П. Юшкевич
438 Омар Хайям
М. В. Чириков
439 Франсуа Виет
М. В. Чириков
441 Рене Декарт
И. Г. Башмакова
443 Пьер Ферма
И. Г. Башмакова
444 Исаак Ньютон
М. В. Чириков
447 Готфрид Вильгельм Лейбниц
А. П. Юшкевич
449 Леонард Эйлер
С. С. Демидов
451 Жозеф Луи Лагранж
И. Г. Башмакова
453 Карл Фридрих Гаусс
И. Г. Башмакова
455 Николай Иванович Лобачевский
И. Г. Башмакова
457 Эварист Галуа
И. Г. Башмакова
458 Пафнутий Львович Чебышёв
М. В. Чириков
460 Софья Васильевна Ковалевская
С. С. Демидов
461 Норберт Винер

Справочный отдел
И. Г. Башмакова и А. П. Юшкевич
464 Летопись знаменательных дат развития математики
В. И. Битюцков
468 Что читать по математике
В. И. Битюцков
471 Словарь-указатель
Б. А. Кордемский
Занимательные задачи и вопросы
268, 292, 302, 323, 329, 336, 349, 354, 359, 381, 402, 416.

Несколько слов о математике

Если спросить всех школьников, какой предмет нравится им больше других, то вряд ли большинство из них назовут математику. Обычно ее скорее уважают, чем любят. У нас в стране научные знания пользуются большим почетом, но, конечно, и среди наших школьников есть такие, которые тяготятся изучением математики. По-видимому, дело объясняется не только тем, что ее изучение многим нелегко дается и требует упорства и труда, но также и тем, что некоторые вопросы школьной математики иногда кажутся недостаточно интересными и даже порой скучными. Однако азбука и грамматика какого-либо языка часто также не очень интересны, а между тем только через их изучение лежит путь ко всей литературе с ее увлекательными сказками, рассказами, повестями, романами и стихами. Подобно этому через те простейшие, азбучные положения математики, которые изучаются в школе, лежит столбовая дорога к современной математике — огромной, почти необозримой по своему богатству области человеческого знания, которая находит с каждым годом все большее применение.

Иногда приходится слышать мнение, что в математике в основном все уже известно, что времена открытий в этой науке давно прошли, а теперь остается только изучать теоремы, названные именами ученых прошлых веков, и применять их к решению разных задач. Но в действительности это далеко не так. Более того, именно сейчас математика переживает период чрезвычайно бурного развития, несмотря на то что родилась она много тысячелетий назад. Новые математические открытия в наши дни делаются буквально ежедневно во всех частях света. Чтобы получить представление о количестве этих открытий, достаточно знать следующее. В Советском Союзе издается ежемесячный реферативный журнал «Математика», в котором убористым шрифтом печатаются самые краткие сообщения (рефераты) о различных математических открытиях, сделанных в самое последнее время во всем мире. Так вот, комплект этого журнала за 1970 г. представляет собой огромный том (свыше 3000 страниц большого формата!), содержащий более 25 000 рефератов. Так велико число математических открытий, сделанных всего за один год: в среднем по 70 открытий в день! Конечно, не все они одинаково значительны, но почти каждое из них означает продвижение науки вперед, пусть иногда даже на совсем маленький шажок.

Такое бурное развитие математики тесно связано с тем, что теория и практика выдвигают все новые и новые задачи, которые математики должны решать. И вот когда старых знаний не хватает, приходится изобретать новые пути, находить новые методы. Ныне математика применяется не только в астрономии, механике, физике, химии и технике, где она применялась и раньше, но также в биологии, некоторых отраслях общественных наук и даже в языкознании. Особенно большое поле для ее применений открылось в связи с созданием быстродействующих электронных вычислительных машин. Они предсказывают погоду, вычисляют орбиты искусственных спутников, космических кораблей, переводят научные тексты с одного языка на другой.

В ближайшее время новые типы вычислительных универсальных и специализированных машин еще более широко будут применяться в самых разнообразных областях человеческой деятельности, в том числе для управления производственными процессами, для статистического и бухгалтерского учета, плановых и проектных расчетов.

Коротко математику можно охарактеризовать как науку о числах и фигурах. Трудно назвать такую отрасль человеческой деятельности, где не приходилось бы ставить и решать вопросы о количестве предметов, об их размерах и форме. С глубокой древности, по мере развития человеческого общества, накапливалось все больше сведений о числах, о размерах и формах различных предметов. Появилась необходимость приводить эти сведения в порядок, чтобы их легче было передавать от одного поколения другому. Так постепенно зарождалась математика.

Начатки математических знаний обнаруживаются уже примерно за 2 тыс. лет до н. э. Об этом свидетельствуют дошедшие до нас египетские папирусы, клинописные вавилонские таблички, где встречаются решения арифметических, геометрических и алгебраических задач.

Большого расцвета математика достигла в Древней Греции. Более чем за 300 лет до н. э. здесь появились «Начала» Евклида — сочинение, в котором систематически излагалась геометрия в том примерно объеме, в каком она доныне изучается в средней школе, а также давались сведения о делимости чисел и о решении квадратных уравнений (в геометрической форме). В III в. до н. э. Архимед нашел способ определения площадей, объемов и центров тяжести простых фигур. В кон-

це III в. до н. э. Аполлоний написал книгу о свойствах некоторых замечательных кривых — эллипса, гиперболы и параболы. Если к этому добавить еще, что во II в. н. э. Птолемей в астрономическом сочинении, известном под арабским названием «Альмагест», изложил основы тригонометрии, дал таблицы синусов (вернее, длин хорд окружности) и способы решения сферических треугольников (т. е. треугольников, сторонами которых являются дуги больших кругов, проведенных на шаре), то станет ясно, какой большой вклад в развитие математических знаний внесли древние греки за много столетий до нашего времени. Можно смело утверждать, что нынешние школьники изучают за все время пребывания в школе лишь небольшую часть этих знаний (правда, они получают также и ряд сведений, которые древним грекам были неизвестны).

Много сделали для развития математики ученые народов Востока (особенно больших успехов добились индийцы и арабы в развитии алгебры и тригонометрии). Ученым Западной Европы, после длительного застоя в развитии науки во времена средневековья, пришлось затратить немало усилий, чтобы усвоить труды их предшественников. Лишь после этого они смогли двигаться вперед самостоятельно. Расцвет математики в Европе начинается к XVII в. В это время зарождаются новые отрасли математики, которые относятся к так называемой высшей математике и изучаются ныне в высших учебных заведениях. Особенно глубоко высшая математика изучается на физико-математических факультетах университетов и педагогических институтов, некоторые ее разделы изучаются в высших технических учебных заведениях.

Основу высшей математики составляют аналитическая геометрия и дифференциальное и интегральное исчисления. Их создание, связанное с именами великих ученых XVII в. — Р. Декарта, П. Ферма, И. Ньютона и Г. Лейбница, позволило математически изучать движение, процессы изменения величин и геометрических фигур. Вместе с этим в математику вошли координаты, переменные величины и понятие функции. С координатами, переменными величинами и функциями школьники знакомились при изучении алгебры и тригонометрии. Новые программы помогают им перешагнуть порог той высшей математики, которая в течение последних трехсот лет проявила себя как незаменимый инструмент исключительной силы и тонкости, позволивший сменяющим друг друга поколениям астрономов, физиков, механиков и представителям других областей науки решать труднейшие проблемы естествознания и техники.

Невозможно проследить здесь, хотя бы и бегло, успехи математики за последние столетия. Отметим большой вклад, внесенный русскими учеными Н. И. Лобачевским, П. Л. Чебышёвым и советскими математиками. Можно сказать, что современная математика достигла такой ступени развития и так богата содержанием, что одному человеку, даже большому ученому, нельзя охватить ее всю и приходится специализироваться в какой-либо определенной ее области.

Надо заметить, что современная математика состоит не только из алгебры, геометрии и анализа, как школьный курс; сейчас насчитываются десятки различных областей математики, каждая из которых имеет свое особое содержание, свои методы и области применения.

В разделе тома, посвященном математике и названном «Числа и фигуры», мы поместили несколько статей, тесно связанных со школьным курсом математики, дополняющих и углубляющих те знания, которые читатель уже имеет. Мы считали необходимым шире представить содержание школьного курса математики, как части большой и развивающейся математической науки.

Мы понимаем, что некоторые из наших статей нельзя назвать простыми и легкодоступными. Мы советуем при чтении таких статей вооружиться терпением, а также бумагой и карандашом и одолевать их шаг за шагом. Если читатель и тут потерпит неудачу — отчаиваться не следует. Можно вспомнить слова, с которыми знаменитый французский математик Ж. Лагранж обращался к молодым математикам: «Читайте, понимание придет потом».

Во всяком случае, мы надеемся, что каждый любитель математики найдет здесь такие статьи, которые будут для него сразу же доступны. Что касается остальных, то к ним можно обратиться позже, когда читатель продвинется вперед в школьном курсе. Словом, понимание придет!

Числа

Как люди считали в старину и как писали цифры

Все числа мы привыкли записывать с помощью десяти знаков — цифр: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Например, число, состоящее из четырех сотен, четырех десятков и четырех единиц, мы записываем так: 444. При этом один и тот же знак «4» обозначает число единиц, если он стоит на последнем месте, число десятков — если на предпоследнем, и число десятков десятков, т. е. сотен, если он стоит на третьем месте от конца. Такой принцип записи чисел называется *позиционным,* или *поместным,* потому что каждая цифра получает числовое значение не только в зависимости от своего начертания, но и от того, на каком месте она стоит при записи числа. Позиционный принцип позволяет с помощью десяти знаков — цифр записать любое сколь угодно большое число. Действительно, пусть нам дано натуральное число N. Для того чтобы записать его в нашей системе, находим сначала остаток от деления N на 10, затем остаток от деления частного на 10 и т. д. — до тех пор, пока в качестве частного не получим число, меньшее 10. Например:

$$\begin{aligned} N = 523 &= 10 \cdot 52 + 3, \\ 52 &= 10 \cdot 5 + 2, \\ 5 &= 10 \cdot 0 + 5. \end{aligned}$$

Полученные остатки и являются последовательными цифрами нашего числа, записанного в позиционной десятичной системе:

$$N = 523,$$

или, более подробно:

$$523 = 5 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10 + 3.$$

Для тех, кто знаком с алгеброй, скажем, что каждое натуральное число M можно представить в таком же виде.

Если

$$10^n \leqslant M < 10^{n+1},$$

то

$$M = a_n 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} + \quad + a_1 10 + a_0,$$

где каждый из коэффициентов a_0, a_1, ..., a_n меньше 10 (это просто остатки от последовательного деления числа M на 10). Следовательно, каждый из коэффициентов выразится одной из десяти цифр. Следуя десятичному позиционному принципу, записываем число M так:

$$M = \overline{a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0},$$

где a_0 означает число обычных единиц, или единиц первого разряда, содержащихся в M; a_1 — число единиц второго разряда, т. е. десятков; a_2 — число единиц третьего разряда, т. е. сотен, и т. д. (Чтобы за-

PVS A·
RITH
ME
TICAE·
BOETIVS
RAS
TAGO
PY

Аллегорическое изображение математики. Гравюра на дереве из энциклопедии научных знаний начала XVI века.

пись не воспринималась как произведение $a_n \quad a_{n-1} \times \times \ldots \cdot a_1 \cdot a_0$, сверху ставится черта.)

Число 10 называется *основанием* нашей системы.

Итак, для записи чисел мы пользуемся *десятичной позиционной системой счисления.*

Счет двойками, тройками и дюжинами

Однако вовсе не обязательно считать десятками. Можно, например, вести счет двойками или тройками. Для этого за основание системы счисления примем число 2 или 3, а в остальном будем поступать точно так же, как это делали, когда основание равнялось десяти. Для записи по двоичной системе понадобятся всего две цифры: 0 и 1. Число «два» в этой системе запишется как 10, так как $2=1\cdot2+0$. А чтобы не спутать нашу запись с обычной, будем справа внизу ставить маленькую цифру 2 — это будет означать, что основанием системы служит число «два». Итак, 10_2 будет записью числа 2, 11_2 — записью числа 3, так как $3=1\cdot2+1$.

Число $4=1\cdot2^2+0\cdot2+0\cdot1$, поэтому оно запишется в виде 100_2. Записью числа 5 будет 101_2, число 7 будет выглядеть так: 111_2.

Чтобы найти запись любого натурального числа N, нужно определить остатки от последовательного деления этого числа на 2. Мы предоставляем читателям проверить, что записью числа 35 в двоичной системе будет $100\,011_2$.

Если число N таково, что

$$2^n \leqslant N < 2^{n+1}$$

то его можно представить в виде:

$$N = a_n 2^n + a_{n-1} 2^{n-1} + \quad . + a_1 2 + a_0,$$

т. е. это число в двоичной системе запишется так:

$$N = \overline{a_n a_{n-1} \quad . a_1 a_0},$$

но здесь уже каждый из коэффициентов a_i может принимать только одно из двух значений: 0 или 1.

Более подробно о двоичной системе, которая сейчас приобрела большое значение в связи с ее применением в быстродействующих вычислительных машинах, узнаете, если прочтете статью «Электронные вычислительные машины», помещенную в этом томе.

Для записи числа в троичной системе нужны три цифры, например 0, 1, 2. Число 3 здесь будет записываться как 10_3, а 4 — как 11_3. Записью числа 35 в этой системе является 1022_3.

Чайный сервиз обычно составляют из 12 чашек. Мы до сих пор год делим на 12 месяцев, отсчитываем часы в течение суток от 0 до 12 дважды.

Но можно считать и дюжинами, т. е. пользоваться системой счисления с основанием двенадцать. Еще не так давно в нашей стране и в Западной Европе некоторые предметы, например перья и карандаши, принято было считать дюжинами. Сервизы тоже обычно составляют из 12 чашек, 12 блюдец, 12 тарелок, а комплекты мебели — из 12 стульев или кресел. Существовало даже специальное название для дюжины дюжин — *гросс.*

О широком распространении двенадцатеричной системы свидетельствуют такие факты: мы до сих пор делим год на 12 месяцев, а сутки на 24 часа, причем в повседневной жизни часы считаем только до 12, а затем начинаем счет сначала («час дня», «два часа дня» и т. д.). Число 12 часто встречается также в сказках и легендах (двенадцатиглавый змей, двенадцать братьев-разбойников), что свидетельствует о древнем происхождении двенадцатеричной системы счисления.

Посмотрим, как будут изображаться числа в этой системе.

Во-первых, в ней должно быть двенадцать цифр. Значит, к нашим десяти цифрам надо прибавить еще две, например А для обозначения десяти и Б — для одиннадцати. Во-вторых, запись чисел в ней будет короче, чем в нашей системе, а таблица умножения длиннее. Число 12 запишется как 10_{12} (снова ставим значок 12 для того, чтобы знать, в какой системе сделана запись), число 13 — как 11_{12}, число $35=2\cdot12+11$ — как $2Б_{12}$, а число $133=11\cdot12+1$ — как $Б1_{12}$, т. е. оно станет двузначным.

Ниже мы расскажем о том, что когда-то существовали нумерации с основанием 20 и даже 60.

А теперь сделаем некоторые общие выводы: 1) всякое натуральное число, отличное от единицы, может служить основанием позиционной системы счисления; 2) в системе счисления должно быть столько цифр, сколько единиц содержится в основании системы.

Несмотря на то что принципиально все позиционные системы счисления равноправны, некоторыми из них в определенных случаях пользоваться особенно удобно. Например, как мы уже говорили, при счете на электронных вычислительных машинах в основном пользуются двоичной системой.

Приведем несколько задач, для решения которых удобнее воспользоваться не десятичной, а другими системами счисления.

Задача о взвешивании

Вот одна из классических задач, решить которую можно сразу же, если выбрать систему счисления с подходящим основанием. Эта задача приведена в математической книге знаменитого математика XIII в. Леонардо Пизанского. Ею интересовался также в XVIII в. и Л. Эйлер.

Требуется выбрать 5 гирь так, чтобы с их помощью можно было взвесить (с точностью до 1 кг) любой груз до 30 кг при условии, что гири ставятся только на *одну* чашу весов и масса гирь различна.

Какие же гири нужно выбрать?

Сумма масс всех гирь должна быть не меньше 30 кг. Но, конечно, этого недостаточно. Если мы выберем, например, гири в 1, 2, 3, 10 и 15 кг, то с их помощью нельзя будет взвесить грузы в 7, 8, 9, 22, 23 и 24 кг.

Разберем математический смысл задачи. Чтобы взвесить некоторый груз, помещая гири только на одну чашу весов, надо представить его массу в виде суммы масс имеющихся гирь, причем так, чтобы каждая гиря бралась не более одного раза. Если выбранные нами гири имеют массу m_1, m_2, m_3, m_4, m_5, то груз массой $M \leqslant 30$ кг должен представляться так:

$$M = a_1m_1 + a_2m_2 + a_3m_3 + a_4m_4 + a_5m_5,$$

где каждый коэффициент равен единице, если кладем соответствующую гирю на чашу весов, и нулю, если не пользуемся ею при взвешивании.

При такой постановке вопроса видно сходство с представлением числа M в двоичной системе счисления. Нужно только в качестве m_1, m_2, m_3, m_4, m_5 взять гири массой: $m_1=1$ кг, $m_2=2$ кг, $m_3=4$ кг, $m_4=8$ кг, $m_5=16$ кг. Сумма их масс $1+2+4+8+16=31$ кг. Кроме того, каждое число M, не большее 31, можно представить в виде:

$$M = b_4 2^4 + b_3 2^3 + b_2 2^2 + b_1 2^1 + b_0,$$

где каждый из коэффициентов b_0, b_1, b_2, b_3, b_4 будет, как нам и нужно, либо нулем, либо единицей.

Пусть, например, надо взвесить груз в 22 кг. Запишем число 22 по двоичной системе:

$$22 = 10\,110_2.$$

Значит, нужно взять гири $m_2=2$ кг, $m_3=4$ кг и $m_5=16$ кг.

Теперь несколько видоизменим задачу: пусть требуется выбрать 4 гири, с помощью которых можно было бы взвесить любой груз до 40 кг, при условии, что гири можно класть и на левую и на правую чашу весов.

Нетрудно убедиться, что для решения этой задачи можно воспользоваться троичной системой счисления, выбрав следующие 4 гири: $m_1=1$ кг, $m_2=3$ кг, $m_3=9$ кг, $m_4=27$ кг. Нужно только заметить, что двойной вес гирь m_1, m_2, m_3 можно заменять разностью двух разных гирь, например: $2m_2=m_3-m_2$, $2m_3=m_4-m_3$ и т. п.

Следует помнить, что, хотя в различных системах счисления числа записываются по-разному, основные свойства их от этого не меняются: так, число 20 будет делиться на 2, в какой бы системе мы его ни записали, а 27 не разделится на 2, но будет делиться на 3. Числа 3, 5, 7 останутся простыми в любых системах счисления. Однако признаки делимости, которые устанавливаются исходя из записи числа в определенной системе счисления, будут меняться вместе с основанием системы. Так, число делится на 5, если его запись в десятичной позиционной системе оканчивается нулем или пятеркой. Но число не всегда делится на 5, если на 0 оканчивается его запись в троичной системе, например, числа 10_3 (т. е. 3), 100_3 (т. е. 9), 1000_3 (т. е. 27) не делятся на 5, а число 120_3 (т. е. 15) будет делиться на 5.

Наш устный счет

Теперь, естественно, возникает вопрос: почему мы все-таки пользуемся десятичной системой, а не системой с другим основанием? И еще: всегда ли люди записывали числа, пользуясь позиционным принципом? На эти вопросы мы и постараемся дать ответ.

Цифры в древнем Риме. Внизу крупными цифрами записано число 444.

Чтобы лучше понять, как люди считали в старину, обратимся сначала к нашей речи, к нашему устному счету. Прежде всего заметим, что наш устный счет очень отличается от письменного.

Как мы называем число 444? Мы говорим: «Четыреста сорок четыре», т. е. произносим три разных слова. В то же время это число записываем тремя одинаковыми знаками. Если то же самое число нужно будет записать немцу или французу, то они напишут такие же три знака, а произнесет каждый из них различные слова: один — по-немецки, другой — по-французски.

Итак, наша письменная нумерация носит международный характер, тогда как названия числительных и способы их образования у разных народов различны. Но дело не только в этом. Давайте рассмотрим более подробно, как мы называем числа.

Для нуля и первых девяти чисел мы употребляем специальные названия : «нуль», «один», «два», ..., «девять». Для следующего числа у нас есть новое слово — «десять»; мы не говорим «один, нуль», хотя и записываем его с помощью единицы и нуля: 10.

Все числа от 11 до 99, как правило, составляются из названий первых чисел: «одиннадцать» (т. е. один-на-десять), «тридцать один» (т. е. три-десять-один) и т. д. Для 100 мы употребляем новое слово — «сто». Все наименования чисел от 101 до 999 опять составные, а для 1000 вводится новое слово — «тысяча». Далее появляются новые слова: «миллион», «миллиард», «триллион» и т. д. Как видим, по мере роста самих чисел возрастает и количество названий для них. Из этого явствует, что способ наименования чисел не является позиционным. Наш устный счет сохранил следы каких-то более старых нумераций, одной из которых мы и сейчас пользуемся при записи чисел по римской системе.

В римской системе есть специальные знаки для единицы (I), пяти (V), десяти (X), пятидесяти (L), ста (C), пятисот (D) и тысячи (M). Остальные числа записываются при помощи этих символов с применением сложения и вычитания: III, например, есть запись числа 3 (I+I+I), IV — числа 4 (V−I), VI — числа 6 (V+I) и т. д. Наше число 444 запишется в римской системе так: CDXLIV.

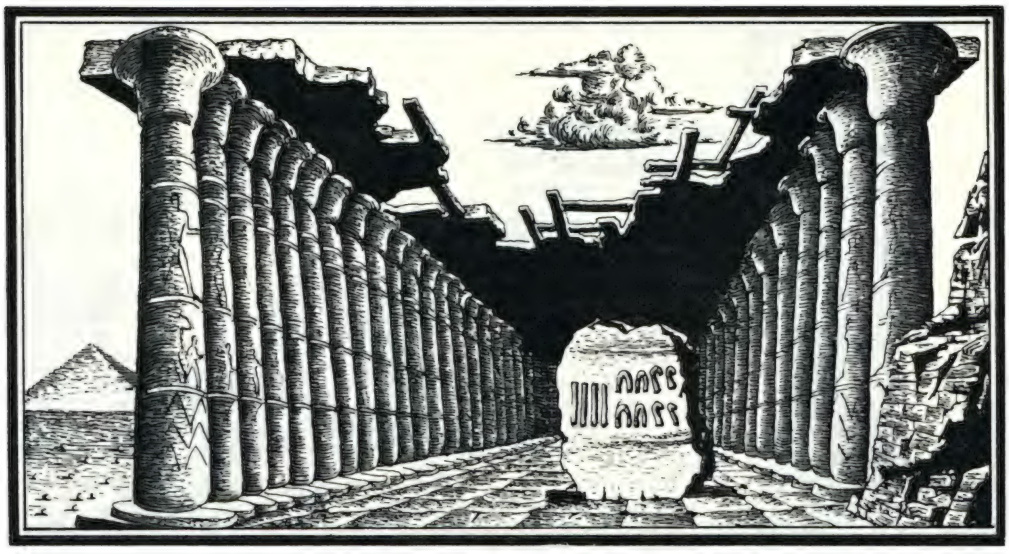
Эта форма записи менее удобна, чем та, которой мы теперь пользуемся. Здесь четыре единицы записываются одними символами (IV), четыре десятка — другими (XL), четыре сотни — третьими (CD). Запись чисел получается намного длиннее. С числами, записанными в римской нумерации, очень трудно производить арифметические действия. Попробуйте, например, умножить 444 на 36, если оба числа обозначены римскими цифрами, и вы сразу же убедитесь в трудности задачи. Сами римляне пользовались для производства арифметических операций специальной счетной доской — абаком.

В римской системе есть и еще один существенный недостаток: она не дает способа для записи сколь угодно больших чисел. Например, чтобы написать по этой системе 1 000 000, надо либо 1000 раз повторить знак M, либо ввести новый символ.

Таким образом, для записи чисел по мере их роста надо будет вводить все новые и новые знаки. Это происходит потому, что римская нумерация не является позиционной. Знак V, например, означает в ней только пять единиц и не может обозначать пяти десятков или пяти сотен. Римская нумерация не является и строго десятичной. В ней сохранились следы другого основания — пяти. Действительно, здесь есть специальные знаки для пяти, пятидесяти и пятисот.

В нашем устном счете имеются некоторые черты, напоминающие эту систему. Так, мы тоже прибегаем к операции сложения, образуя числительные от 11 до 19: «одиннадцать» (один-на-десять) и т. д. Но начиная с 20 мы пользуемся для образования числительных еще и умножением, чего нет в римской

Так написали бы число 444 древние египтяне.



системе: «двадцать» означает «два-десять», т. е. два × десять, «тридцать» — три × десять.

В нашем языке сохранились также следы нумерации с основанием 40, которой пользовались наши предки. Действительно, для этого числа употребляется новое, несоставное название — «сорок». Нам известны такие выражения: «сорок сороков церквей», «сорок сороков черных соболей». О том, что число 40 когда-то играло особую роль при счете, говорят и некоторые связанные с ним поверья. Так, сорок первый медведь считался роковым для охотника. Аналогично этому широко распространен у европейских народов предрассудок, будто число 13 является несчастливым. (Это связано с тем, что некогда была распространена двенадцатеричная система счисления.)

Во французском языке сохранились следы нумерации с основанием 20; число 80 читается: quatre-vingts — «четыре-двадцать», число 90 — quatre-vingts-dix — «четыре-двадцать-десять», число 120 — «шесть-двадцать»; в старофранцузском языке и другие названия чисел составлялись аналогичным образом.

Следы двадцатеричной системы сохранились также в английском и голландском языках, следы пятеричной — в скандинавских языках.

Итак, устная речь показывает, что наши предки пользовались непозиционной нумерацией, причем в качестве оснований кроме десяти были и другие числа.

На основании каких же источников можно ответить на вопрос: как люди считали в старину?

Во-первых, на земном шаре сохранились народы, которые еще недавно стояли во многих отношениях на таком же низком уровне развития, как и наши далекие предки. Многие путешественники описали немало способов счета, применявшихся у таких народов. Это один источник, с которым мы познакомимся.

Вторым источником являются письменные документы древних народов: египтян, вавилонян, древних греков, индейцев племени майя и др. Наконец, русские рукописи XI—XII вв. помогут нам узнать, как считали раньше на Руси. Итак, начнем по порядку.

Счет у первобытных народов

Еще недавно существовали племена, в языке которых были названия только двух чисел: «один» и «два». Но это не значит, конечно, что представители этих племен не могли сосчитать большее количество предметов.

У туземцев островов, расположенных в Торресовом проливе (отделяющим Новую Гвинею от Австралии), единственными числительными являлись «урапун» (один) и «окоза» (два). Островитяне считали так: «окоза-урапун» (три), «окоза-окоза» (четыре), «окоза-окоза-урапун» (пять) и «окоза-окоза-окоза» (шесть). О числах начиная с семи туземцы говорили «много», «множество». Таким образом, люди здесь освоили только небольшое количество целых чисел. Кстати, многие русские пословицы говорят о том, что именно так дело обстояло и у наших предков. Мы говорим: «У семи нянек дитя без глаза», «Семь бед — один ответ», «Семеро одного не ждут», «Семь раз отмерь, один раз отрежь». Здесь, очевидно, число «семь» употребляется в смысле «много»: у большого числа нянек дитя без глаза, много бед — один ответ и т. д.

Но вернемся к нашему рассказу.

Очень рано у людей появилась необходимость сообщать друг другу о том, что такое-то число предметов должно быть доставлено через столько-то дней или что каждое племя должно выставить такое-

то число воинов. И даже те народы, у которых имелось только два числительных, умели в известном смысле «сосчитывать» довольно большое количество предметов. Вот как, по рассказу замечательного русского путешественника Н. Н. Миклухо-Маклая, поступали туземцы Новой Гвинеи: «Излюбленный способ счета состоит в том, что папуас загибает один за другим пальцы руки, причем издает определенный звук, например «бе-бе-бе...». Досчитав до пяти, он говорит «ибон-бе» (рука). Затем он загибает пальцы другой руки, снова повторяет «бе-бе...», пока не доходит до «ибон-али» (две руки). Затем он идет дальше, приговаривая «бе-бе», пока не доходит до «самба-бе» и «самба-али» (одна нога, две ноги). Если нужно считать дальше, папуас пользуется пальцами рук и ног кого-нибудь другого».

Итак, предметы при счете сопоставлялись обычно с пальцами рук и ног. При переговорах туземцу достаточно было сказать, например, что он дошел в своем счете до третьего пальца правой ноги. Чтобы отсчитать нужное количество предметов, счет начинали сначала, от первого пальца правой руки. При этом, отсчитывая каждый палец, одновременно отмечали и предметы. Островитяне Торресова пролива для такого пересчета употребляли не только пальцы, а и другие части тела (запястье, локоть, плечо), но всегда в определенном порядке. Так они могли пересчитывать до 33 предметов.

Суть этого способа заключается в том, что равночисленность некоторых совокупностей предметов устанавливалась при помощи сопоставления их с частями тела, а иногда и просто палочками. Разумеется, наиболее удобным «инструментом» пересчета являются пальцы, вследствие чего предметы при пересчете чаще всего группировали по пяти, по десяти и по двадцати. Этим и объясняется то, что основанием большинства сложившихся систем счисления является 10 (по числу пальцев на обеих руках), а иногда 5 или 20.

Со временем хозяйство племен становилось все более сложным и обширным, так что простое установление равночисленности при помощи счета на пальцах перестало удовлетворять людей.

Люди постепенно привыкали при счете располагать предметы устойчивыми группами по два, по десять или двенадцать. Появились специальные слова для обозначения таких устойчивых совокупностей предметов. Так, у туземцев Флориды слово «на-куа» означало 10 яиц, «на-банара» — 10 корзин. Но слово «на», которое, казалось бы, соответствует числу 10, отдельно не употреблялось. То же можно было наблюдать на островах Фиджи и Соломоновых, где имелись специальные названия для 100 челноков, 100 кокосовых орехов, 1000 кокосовых орехов и в то же время отвлеченных чисел не было. Числа являлись по существу именованными, это еще «числа-совокупности» конкретных предметов.

Но с течением времени такими устойчивыми «числами-совокупностями» начали обозначать не только данные предметы, а и другие, похожие на них. Например, «числа-совокупности», обозначающие определенное количество орехов, могли впоследствии употребляться для счета любых круглых предметов. Это привело к тому, что во многих языках первобытных народов образовалось несколько рядов числительных: одни употреблялись только для счета людей, другие — для подсчета круглых предметов, третьи — продолговатых и т. д. Например, у чишмиенов (Британская Колумбия) имелось семь видов числительных, каждый из них употреблялся для счета предметов определенного вида.

У большинства народов числа, которыми считали «деньги», постепенно вытеснили все остальные. По-видимому, это произошло тогда, когда в качестве денег в основном служил скот: приходилось сосчитывать стада, обменивать на них другие предметы. Естественно, что числа, служившие для подсчета скота, получили наибольшее распространение: их все хорошо знали. Они-то и стали теми универсальными числами, которые позволили считать любые предметы.

Однако так образовались только те числа, которым соответствовали «числа-совокупности»: если счет велся десятками, то появились названия для десяти, десяти десятков (т. е. ста), десяти сотен (т. е. тысячи). Кроме того, особые названия получили, как правило, все числа, меньшие десяти. Что касается чисел 11, 12, ..., 19, 21 и т. д., то они составлялись из основных при помощи тех операций, которые первоначально фактически производились над пересчитываемыми предметами. Так, на языке кламатов (Северная Америка), а также племен Британской Колумбии для обозначения составных чисел употреблялись специальные глаголы. Например, индеец говорил: «На дважды десять плодов я кладу сверху шесть» — и это обозначало 26 плодов. Такая фраза полностью соответствует фактическому пересчету: индейцы располагали 10 предметов в ряд, с 11-го начинался новый ряд и т. д. А постепенно эти двигательные операции перешли в арифметические.

Хорошей иллюстрацией к такому способу счета служат обозначения чисел, принятые в XI—XVI вв. индейцами племени ацтеков (Мексика): единицу они обозначали точкой, двойку — двумя точками (см. рисунок на стр. 252) и т. д. до пяти. В запись

Обозначение чисел индейцами племени ацтеков в XI—XVI вв.

числа «шесть» входила вертикальная черта, отделявшая пять первых точек от шестой. Ясно, что здесь счет велся группами по пять предметов. Черта отделяла одну такую группу от другой, причем сама черта никакого числа не обозначала.

Основной операцией для образования составных чисел было сложение, но наряду с этим применялось и вычитание, а иногда даже умножение. Например, в русском языке, как мы уже говорили, для образования числительных употребляются и сложение и умножение (двадцать семь — два×десять+семь). В угро-финских языках применяется и вычитание: число 8 там произносится как «два-десять» (т. е. десять без двух), 80 — как «два-сто», 800 — «два-десять-сто» («десять-сто», т. е. тысяча, — принцип умножения). Так происходило освоение натурального ряда чисел.

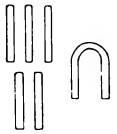
Посмотрим теперь, какими были первые записи чисел и как люди оперировали числами.

Первые нумерации

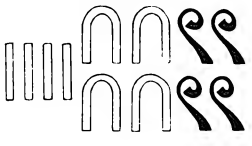
Одна из древнейших нумераций египетская. До нас дошли надписи, сохранившиеся внутри пирамид, на плитах и обелисках. Они состоят из картинок-иероглифов, которые изображают птиц, зверей, людей, части человеческого тела (глаза, ноги) и различные неодушевленные предметы. Такой способ письма вообще характерен для ранних ступеней культуры. Подобные письмена были у обитателей Центральной Америки — индейцев племени майя, в Перу. Расшифровка их представляет огромные трудности, так как часто неизвестны ни язык древних народов, ни значение отдельных иероглифов. Казалось бы, задача является неразрешимой. И все-таки многие надписи уже прочитаны! Сначала были разгаданы письмена древних египтян, затем вавилонская клинопись. В 30-х годах нашего века были прочитаны долго не поддававшиеся расшифровке хеттские надписи. И наконец, совсем недавно найден ключ к разгадке письмен индейцев племени майя и надписей с острова Пасхи.

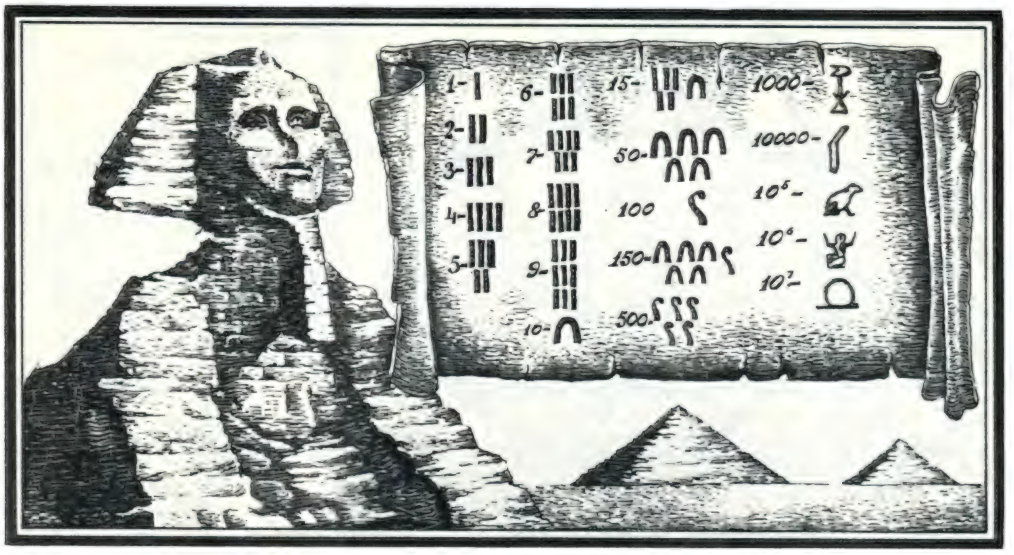
Сохранились два математических папируса, позволяющих судить о том, как считали древние египтяне. Один из них хранится в Британском музее в Лондоне, а другой — в Музее изобразительных искусств им. А. С. Пушкина в Москве. Для записи чисел древние египтяне употребляли иероглифы, означающие (последовательно): единицу, десять, сто, тысячу, десять тысяч, сто тысяч (лягушка), миллион (человек с поднятыми руками), десять миллионов:

Полагают, что иероглиф для сотни изображает измерительную веревку, для тысячи — цветок лотоса, для десяти тысяч — поднятый кверху палец, а для десяти миллионов — всю Вселенную. Все остальные числа составлялись из основных с помощью только одной операции — сложения. При этом запись производилась не слева направо, как у нас, а справа налево. Число 15, например, записывалось так:



А число 444 писали так:





Цифры в древнем Египте.

Мы видим, что древнеегипетская нумерация похожа на римскую, только при записи чисел не употребляется вычитание. Знакомясь с римской нумерацией, мы убедились, что умножать числа, записанные в непозиционной системе, очень неудобно. Как же считали древние египтяне? Оказывается, умножение и деление они производили путем последовательного удвоения чисел. Пусть, например, надо умножить 19 на 37. Египтяне последовательно удваивали число 37, причем в правом столбце записывали результаты удвоения, а в левом — соответствующие степени двойки:

1	37
2	74
4	148
8	296
16	592

Удвоение продолжалось до тех пор, пока не оказывалось, что из чисел левого столбца можно составить множитель (в нашем примере: $19=1+2+16$). Египтяне отмечали соответствующие строки вертикальными черточками и складывали те числа, которые стоят в этих же строках справа. В данном случае надо сложить $37+74+592=703$. Так получали произведение.

Если теперь число 703 нужно было разделить на 19, то египтяне начинали последовательно удваивать делитель и продолжали это до тех пор, пока числа правого столбца оставались меньше 703. Затем из чисел правого столбца они пытались составить делимое, и тогда сумма чисел в левом столбце давала частное:

1	19
2	38
4	76
8	152
16	304
32	608

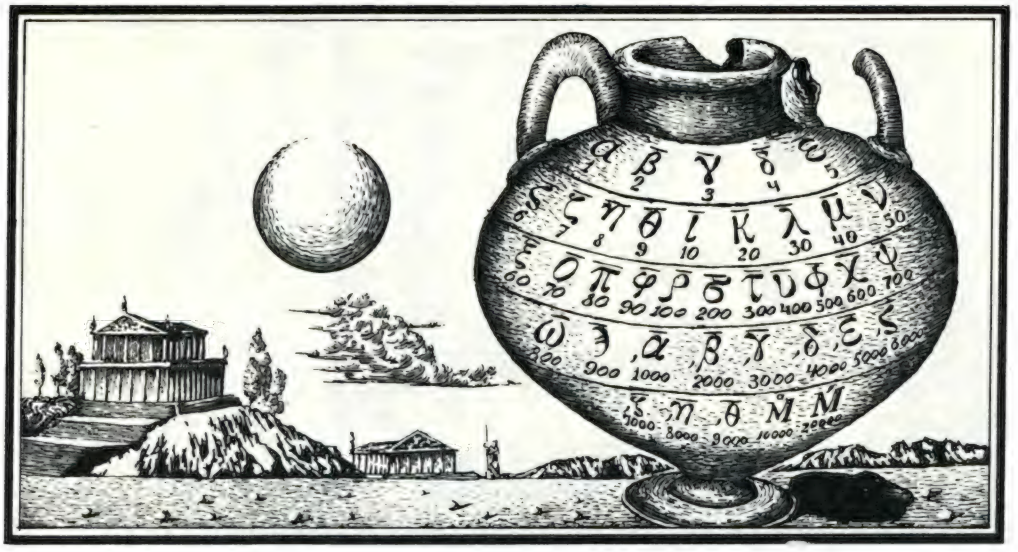
В данном случае $703=608+76+19$, т. е. частное будет $1+4+32=37$. Если бы делимое не делилось без остатка на делитель, то его не удалось бы составить из чисел правого столбца. У нас получились бы и частное и остаток.

Египетский способ умножения не труден, но требует очень большого количества операций, даже при умножении двузначных чисел. Если бы пришлось перемножать таким способом трехзначные или четырехзначные числа, мы не могли бы обойтись без помощи счетной машины. Заметим также, что для умножения и деления египтяне пользовались фактически представлением числа по двоичной системе.

Алфавитные нумерации. «Псаммит»

Мы видели, что непозиционные нумерации малоудобны: запись чисел в них очень длинна, арифметические операции производить трудно. По мере развития торговли и ремесла эти неудобства становились все чувствительнее, и вот в Малой Азии, где были древнегреческие колонии, которые вели оживленную торговлю, в середине V в. до н. э. появилась система счисления нового типа — так называемая алфавитная нумерация. Ее обычно называют *ионийской*. В этой системе числа обозначались при помощи букв алфавита, над которыми ставились черточки: первые девять букв обозначали числа от 1 до 9, следующие девять — числа 10, 20, 30, ..., 90, и следующие девять — числа 100, 200, ..., 900. Таким образом можно было обозначать любое число до 999.

Для обозначения чисел 1000, 2000, ..., 9000 греки употребляли те же буквы, что и для чисел 1, 2, ..., 9, но только при их записи ставили косую черточку слева внизу. Как это делалось, видно из прилагае-



Алфавитное изображение чисел в Древней Греции.

мого здесь рисунка. Далее, для числа 10 000 употреблялся знак $\overset{\alpha}{M}$ — это число называлось мириадой; две мириады, т. е. 20 000, обозначались так: $\overset{\beta}{M}$. Этим способом можно было обозначить все числа до мириады мириад, т. е. до 10^8. Более высокие десятичные разряды уже не могли быть записаны в ионийской нумерации и не имели названия в древнегреческом языке.

Великий математик, механик и инженер древности Архимед (III в. до н. э.) посвятил целое сочинение тому, чтобы дать общий прием наименования сколь угодно больших чисел. Издавна у греков, как, впрочем, и у других народов, наглядным образом для представления об очень большом и даже неисчислимом количестве служило число песчинок. В народных сказках, например, встречается «неразрешимая» задача: сосчитать звезды на небе, капли в море или песчинки на земле. Архимед показал, что такие задачи можно решить. Свое сочинение он так и назвал «Исчисление песка» («Псаммит»). В нем он построил систему счета, в которой имелись числа, не только превосходящие количество песчинок в его родной Сицилии, но и такие, которые больше числа песчинок во Вселенной, если даже считать, что Вселенная сплошь заполнена песком. Но что же понимали греки времен Архимеда под всей Вселенной? В своем сочинении Архимед, следуя за греческим астрономом Аристархом Самосским, полагал, что в центре Вселенной находится Солнце, а Земля и другие планеты вращаются вокруг него. Вселенная имеет форму сферы, на поверхности которой расположены неподвижные звезды. Это была первая гелиоцентрическая система мира.

Для подсчета количества песчинок Архимед должен был, хотя бы приблизительно, определить размеры диаметров Вселенной и песчинки, а затем найти отношение их объемов. Архимед сделал это, опираясь на данные астрономии своего времени и на собственные исследования в этой области. Число песчинок, которое должно было у него при этом получиться, в нашей нумерации записывается так: 10^{63}. Это очень большое число, и до Архимеда не было средств ни для записи, ни для наименования чисел такого порядка.

Чтобы решить поставленную задачу, Архимед поступает следующим образом: все числа, меньшие мириады мириад, т. е. все числа от 1 до 10^8-1, он объединяет в первую октаду (т. е. восьмерицу) и называет их первыми числами. Число 10^8 служит единицей второй октады, в которую входят все числа от 10^8 до $10^{2\cdot 8}-1$. Это «вторые числа». Аналогично этому число $10^{2\cdot 8}$ является единицей третьей октады, а числа от $10^{2\ 8}$ до $10^{3\cdot 8}-1$ являются «третьими». Продолжая это построение, можно дойти до мириадо-мириадной октады, которая содержит числа от $10^{(10^8-1)\cdot 8}$ до $10^{8\cdot 10^8}-1$. Все эти октады Архимед объединяет в первый период. Число $10^{8\cdot 10^8}$ служит единицей первой октады второго периода и т. д. Этим способом можно дойти до последнего числа последней октады мириадо-мириадного периода. Здесь Архимед останавливается, но ясно, что можно идти дальше, объединив все периоды в новый разряд.

Но и тех чисел, которые построил Архимед, вполне достаточно для подсчета числа песчинок во Вселенной. Необходимое число содержится уже в восьмой октаде первого периода. Архимед продолжил свое построение дальше для того, чтобы разъяснить метод наименования сколь угодно больших чисел.

Для построения своих чисел Архимед формулирует правило, равносильное нашей формуле

$$a^m \quad a^n = a^{m+n}$$

Способ Архимеда близок к позиционному, но понадобилось еще около тысячи лет, прежде чем человечеству удалось создать десятичную позиционную систему счисления.

Так записывались числа в славянской нумерации.

Алфавитные системы были кроме ионийцев у древних евреев, финикийцев, армян, грузин и других народов. Алфавитная нумерация была принята и в Древней Руси. Над буквами, обозначающими числа, ставился специальный знак — титло. Это делалось для того, чтобы отличать их от обычных слов.

Интересно отметить, что хотя в славянской нумерации, как и в греческой, запись числа шла слева направо, от высших единиц к низшим, но для чисел от 11 до 19 делалось исключение: сначала писали единицы, а затем знак для 10.

Удобны ли алфавитные системы?

Запишем в славянской нумерации число 444:

Мы видим, что запись получилась не длиннее нашей. Это объясняется тем, что в алфавитных нумерациях имелось 27 цифр, тогда как в египетской, например, для обозначения всех чисел до 1000 было всего лишь три цифры.

Но алфавитные нумерации имели и крупный недостаток: с их помощью нельзя обозначать сколь угодно большие числа. Они были удобны только для записи чисел до 1000.

Правда, славяне, как и греки, умели записывать и большие числа, но для этого к алфавитной системе добавляли новые обозначения. Числа 1000, 2000 и т. д. они записывали теми же буквами, что 1, 2 и т. д., только слева внизу ставился специальный знак ⁎ например 1000 обозначали
Аналогично:

2 = 2000 =

3 = 3000 =

9 = 9000 =

Число 10 000 опять обозначалось той же буквой, что и 1, только без титла, но его уже обводили кружком:

10 000 = . Называлось это число «тьмой».

Отсюда, между прочим, произошло выражение «тьма народу».

Итак, для обозначения тем первые 9 цифр обводились кружками:

20 000 = 30 000 = 40 000 =

50 000 = 90 000 =

10 тем, или 100 000, было единицей высшего разряда. Ее называли «легион». В записи вокруг первых 9 цифр ставился кружок из точек:

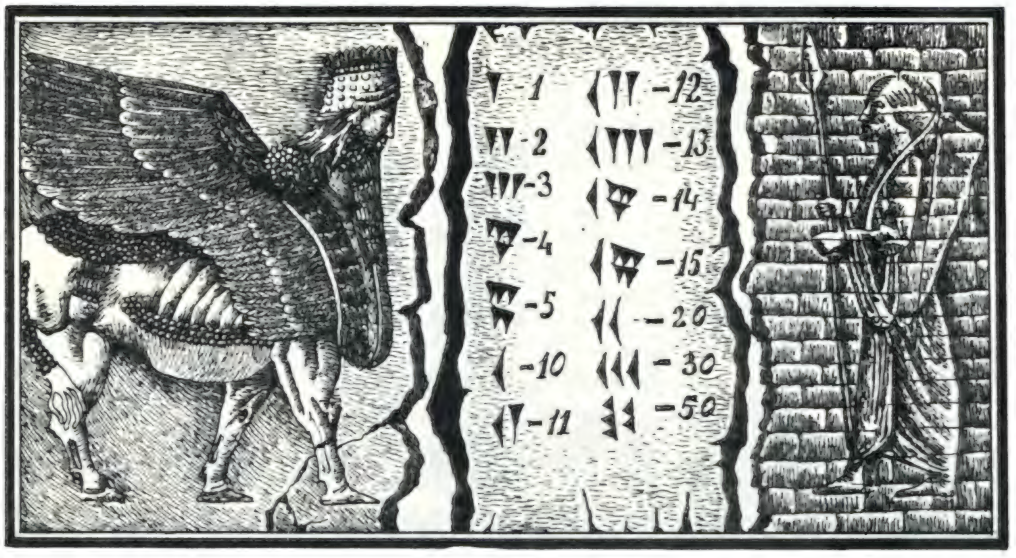
100 000 = 200 000 = и т. д.

10 легионов составляли новую единицу, которая называлась «леодр». Для обозначения леодров соответствующие числа заключали в кружок из черточек:

1 000 000 = 2 000 000 = и т. д.

Эти обозначения можно рассматривать как зачатки позиционной системы, так как в ней для обозначения единиц разных разрядов применялись одни и те же символы, к которым добавлялись знаки для определения разряда. Такая система называлась малым числом. В ней обозначения не шли дальше миллионов.

Но наряду с этим имелось и «большое», или «великое», число, в котором словом «тьма» обозначался уже миллион. Тьма тем (т. е. 10^{12}) называлась легионом, легион легионов (т. е. 10^{24}) — леодром, леодр леодров (т. е. 10^{48}) — «вороном», и, наконец, число 10^{49} называлось «колодой». В рукописи XVII в. гово-



Клинописная запись чисел в древнем Вавилоне.

рится: «И более сего несть человеческому уму разумевати», т. е. для бóльших чисел уже нет названий. Для обозначения воронов буквы ставили в кружок из крестиков: , а колоду обозначали так:

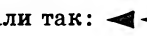
Алфавитные нумерации, как мы говорили, были мало пригодны для оперирования с большими числами, встречавшимися уже в древности (например, при астрономических расчетах). В ходе развития человеческого общества эти системы уступили место позиционным. Но остатки алфавитных нумераций сохранились в нашем обиходе и по сей день. Так, мы часто нумеруем пункты при помощи букв алфавита. Правда, буквы служат только для обозначения последовательного порядка, а не количества. Никаких арифметических операций над такими буквами мы уже не производим.

Позиционные системы

Первой известной нам позиционной системой счисления была шестидесятеричная система вавилонян, возникшая примерно за 2500—2000 лет до н. э. Основанием ее служило число 60. Следовательно, в ней должно было бы быть 60 цифр. А таблица умножения должна была состоять из $\frac{60 \cdot 60}{2} = 1800$ строк.

Как же вавилоняне записывали свои цифры и как запоминали такую чудовищную таблицу умножения?

Вавилоняне поступали так: записывали все числа от 1 до 59 по десятичной системе, применяя принцип сложения. При этом они пользовались всегда двумя знаками: прямым клином для обозначения 1 и лежачим клином для 10. Число 32, например, писали так:

Эти знаки и служили цифрами в их системе. Число 60 снова обозначалось тем же знаком, что и 1, т. е. Так же обозначались и числа 3600, 60^3 и все другие степени 60. Например, число 92 записывали так: 

Таким образом, «цифры», т. е. все числа от 1 до 59, вавилоняне записывали по десятичной непозиционной системе, а число в целом — по позиционной системе с основанием 60. Поэтому-то мы называем их систему шестидесятеричной (а не шестидесятичной, как нужно называть, учитывая только одно основание 60).

Но нумерация вавилонян имела и еще одну важную особенность: в ней не было знака для нуля. И если был изображен прямой клин , то без дополнительных пояснений нельзя было определить, какое число записано: 1, 60, 3600 или какая-нибудь другая степень 60. Запись числа 92, приведенная выше, могла обозначать не только $92=60+32$, но и $3600+32=3632$. Она могла также означать $1\frac{32}{60}$ или $1\frac{32}{3600}$ и т. д.

Таким образом, запись в вавилонской нумерации не носила абсолютного характера — для определения абсолютного значения числа нужны были еще дополнительные сведения. Впоследствии вавилоняне ввели специальный символ для обозначения пропущенного шестидесятичного разряда. Например, число 3632 нужно было бы записать так:

Но в конце числа этот символ обычно не ставился.

Цифры индейцев племени майя.

Таблицу умножения вавилоняне никогда не запоминали — это было почти невозможно. Они пользовались при своих вычислениях готовыми таблицами умножения, так же как мы теперь пользуемся, например, таблицами логарифмов.

Шестидесятеричная система вавилонян сыграла большую роль в развитии математики и астрономии. Следы ее сохранились до наших дней. Так, мы до сих пор делим час на 60 минут, а минуту на 60 секунд. Точно так же, следуя примеру вавилонян, окружность мы делим на 360 равных частей (градусов).

В начале нашей эры индейцы племени майя, которые жили на полуострове Юкатан в Центральной Америке, пользовались другой позиционной системой — с основанием 20. Свои цифры индейцы майя, как и вавилоняне, записывали, пользуясь принципом сложения. Единицу они обозначали точкой, а пять — горизонтальной чертой (см. рис.), но в этой системе уже был знак для нуля. Он напоминал по своей форме полузакрытый глаз. Например, число 20 индейцы майя записывали при помощи знака для единицы и внизу знака для нуля (числа писали не в строчку, а столбцами).

Десятичная позиционная система впервые сложилась в Индии не позднее VI в. н. э. Здесь же был введен наш символ для нуля.

Итак, позиционные системы счисления возникли независимо одна от другой в древнем Двуречье, у племени майя и, наконец, в Индии. Все это говорит о том, что возникновение позиционного принципа не было случайностью.

Каковы же были предпосылки для его создания? Что привело людей к этому замечательному открытию?

Чтобы ответить на эти вопросы, мы снова обратимся к истории. В древнем Китае, Индии и в некоторых других странах существовали системы записи, построенные на *мультипликативном* принципе.

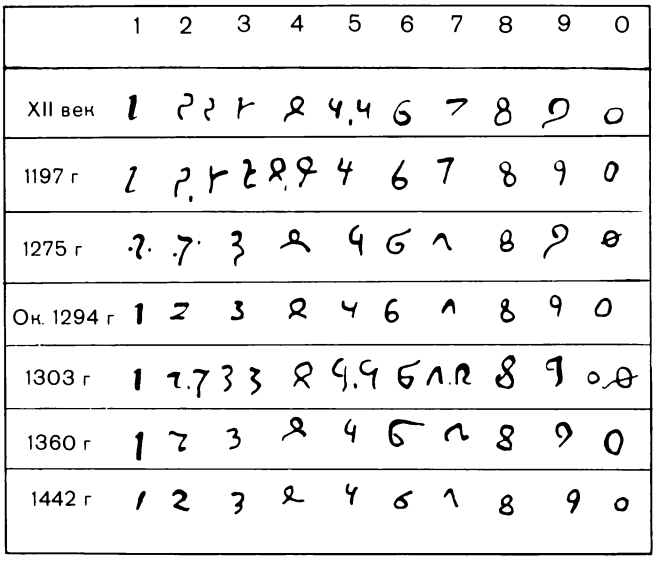
Пусть, например, десятки обозначаются символом X, а сотни — C. Тогда запись числа 323 схематично будет выглядеть так:

3C2X3.

В таких системах для записи одинакового числа единиц, десятков, сотен или тысяч применяются одни и те же символы, но после каждого символа пишется название соответствующего разряда. На аналогичном принципе основаны наши счеты: одно и то же количество косточек означает число десятков, сотен, тысяч и т. д., в зависимости от того, в каком ряду расположены эти косточки.

Но именно такой способ счета применялся при счете «числами-совокупностями». Так, йорубы (одно из африканских племен), считая раковины-каури (игравшие у них роль денег), раскладывали их в кучки по 20 раковин в каждой, затем 20 таких кучек они объединяли в одну большую кучу и т. д. При таком способе счета подчеркивается то обстоятельство, что с кучами можно поступать так же, как и с отдельными раковинами. Н. Н. Миклухо-Маклай рассказывал о способе счета у папуасов, который уже очень близок к построению чисел по принципу умножения. Чтобы сосчитать число дней до возвращения корвета «Витязь», папуасы поступали следующим образом: «Первый, раскладывая кусочки бумаги на колене, при каждом обрезке повторял «каре-каре» (один), другой повторял слово «каре» и загибал при этом палец прежде на одной, затем на другой руке. Сосчитав до десяти и согнув пальцы обеих рук, он опустил оба кулака на колени, повторив «две руки», причем третий папуас загнул один палец руки. Со вторым десятком было сделано то же, причем третий папуас загнул второй палец; то же самое было сделано для третьего десятка».

Рассказывают, что так же считали стада в Южной Африке: один из африканцев считал каждую голову, второй — число десятков, сосчитанных пер-



Постепенно изменяясь, цифры «губар» (вторая строка) приняли форму, близкую к современной.

вым, а третий — число десятков, сосчитанных вторым, т. е. число сотен. Если бы мы теперь обозначили палец первого через I, палец второго через X и палец третьего через C, то результат по мультипликативной системе записали бы, например, так: 3C2X3I. В Китае и Индии с древнейших времен существовал именно такой способ записи чисел. Кроме того, индийцы издавна проявляли глубокий интерес к большим числам и способам их записи. В одной из индийских книг — «Лалитавистаре» говорится о состязании между женихами прекрасной Гопы. Предметом состязания были письменность, арифметика, борьба и стрельба из лука. Почти половина книги посвящена описанию состязаний по арифметике. Победитель Гаутама придумал шкалу чисел, идущих в геометрической прогрессии со знаменателем 100, последним членом ее было $10^{7+9\cdot46}$

Следующей ступенью к позиционному принципу было опускание названий разрядов при письме (подобно тому как мы говорим «три двадцать», а не «три рубля двадцать копеек»). Но при записи больших чисел по системе с основанием 10 очень часто бывал необходим символ для обозначения нуля.

Как же появился нуль?

Мы видели, что уже вавилоняне употребляли межразрядовый знак. Начиная со II в. до н. э. греческие ученые познакомились с многовековыми астрономическими наблюдениями вавилонян. Вместе с их вычислительными таблицами они переняли и вавилонскую шестидесятеричную систему счисления, но только числа от 1 до 59 записывали не с помощью клиньев, а в своей, алфавитной нумерации. Но самое замечательное было то, что для обозначения пропущенного шестидесятеричного разряда греческие астрономы начали употреблять символ O (первая буква греческого слова οὐδέν — ничто). Этот знак, по-видимому, и был прообразом нашего нуля.

Действительно, индийцы, владевшие уже мультипликативным принципом записи чисел, как раз между II и VI вв. н. э. познакомились с греческой астрономией. Это видно из того, что они переняли и общие теоретические положения этой астрономии, и многие греческие термины.

Одновременно они должны были познакомиться с шестидесятеричной нумерацией и греческим круглым нулем. Индийцы и соединили принципы нумерации греческих астрономов со своей десятичной мультипликативной системой. Это и был завершающий шаг в создании нашей нумерации.

Из Индии новая система распространилась по всему миру. При этом одни народы переняли у индийцев только принцип обозначения чисел, другие заимствовали и написание цифр.

Из приведенной таблицы видно, как постепенно видоизменялись цифры «губар», употреблявшиеся в мавританских государствах. Откуда произошли сами цифры «губар», до сих пор остается неясным.

В страны Европы новая индийская нумерация была занесена арабами в X—XIII вв. (отсюда и название «арабские цифры»), однако вплоть до XVIII в. в официальных бумагах разрешалось применять только римские цифры. Но преимущества позиционного принципа счисления были настолько велики, что еще в XIII в. он стал применяться итальянскими купцами. Тогда же Леонардо Пизанский выступил убежденным сторонником новой системы. В Германии, Франции и Англии до конца XV в. новая нумерация почти не употреблялась. Но к концу XVI — началу XVII в. позиционная система одержала решительную победу — ее приняли не только купцы, но и все ученые. Ее стали применять повсеместно.

В России, как мы уже знаем, в старину употреблялась алфавитная система, которая имеет много преимуществ по сравнению с римской. Но и здесь новая нумерация быстро вошла в употребление: во всех без исключения математических рукописях XVII в. применялась десятичная позиционная система счисления. При Петре I индийские цифры уже вытесняют на монетах славянские, а позднее славянские цифры вообще быстро исчезают из обихода.

Приведем в заключение слова знаменитого французского математика и физика XVIII—XIX вв. П. Лапласа: «Мысль выражать все числа девятью знаками, придавая им, кроме значения по форме, еще значение по месту, настолько проста, что именно из-за этой простоты трудно понять, насколько она удивительна. Как нелегко было прийти к этому методу, мы видим на примере величайших гениев греческой учености Архимеда и Аполлония, от которых эта мысль осталась скрытой».

Простейшие неопределенные уравнения

Пифагоровы треугольники

Футбольное поле — это прямоугольная площадка длиной примерно 90 м и шириной 60 м. Как разметить такую площадку? Прямоугольник на листе бумаги строят при помощи линейки и циркуля или линейки и угольника. Эти приборы слишком малы для работы на местности. Они не обеспечат нужной точности в построении прямых углов такой площадки, как футбольное поле. Если же сделать циркуль и угольник достаточно больших размеров, то ими будет невозможно пользоваться.

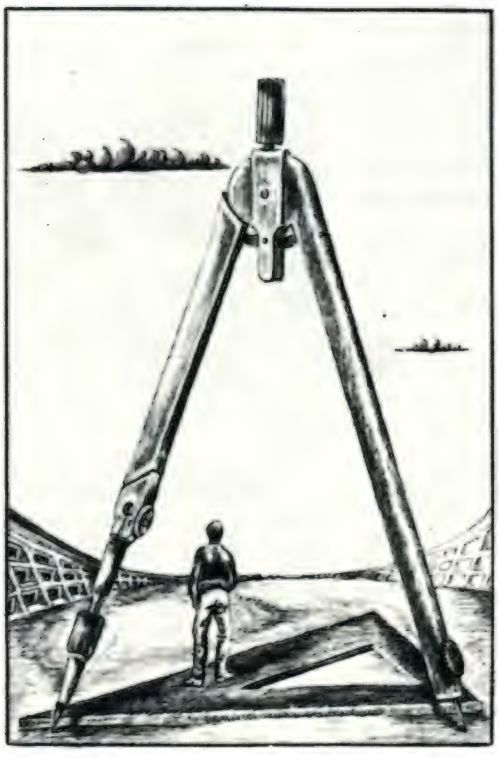
С давних времен известен очень простой способ построения на местности прямых углов. Выполним такое построение. Возьмем шнур и три колышка. На шнуре отметим 12 равных долей. Затем узлами выделим три части шнура MB, BC, CN так, чтобы первая часть состояла из пяти, вторая из четырех и последняя из трех таких долей. Узлы M и N свяжем вместе и обозначим вновь полученный узел через A.

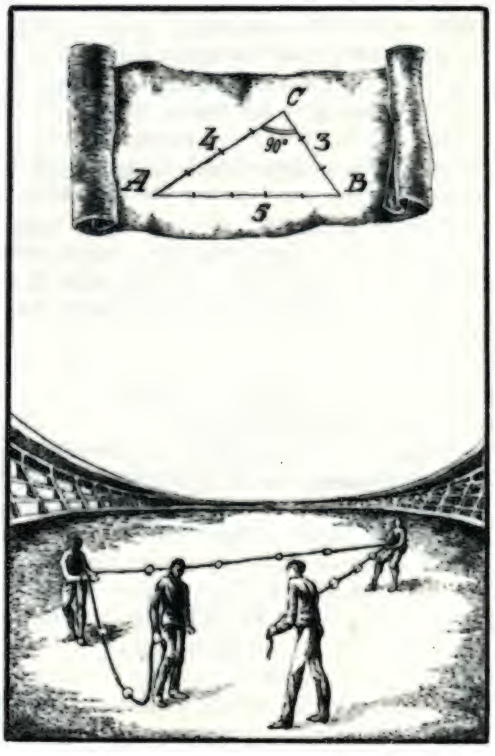
С помощью колышков натянем часть шнура BC вдоль данной прямой так, чтобы точка C совпала с точкой, через которую должен быть проведен перпендикуляр к данной прямой. Потом оттянем шнур за узел A так, чтобы участки AB и AC стали прямолинейными, и вобьем в точке, где будет находиться узел A, колышек. Задача построения на местности прямого угла нами решена, так как угол ACB прямой.

Чтобы убедиться в этом, докажем, что прямоугольным будет всякий треугольник, стороны которого, измеренные какой-нибудь единицей измерения, выражаются числами 3, 4 и 5. Для доказательства возьмем прямоугольный треугольник с катетами, равными двум меньшим сторонам данного треугольника, и найдем его гипотенузу x. По теореме Пифагора $x^2=3^2+4^2$. Поэтому $x=5$. Таким образом, три стороны данного треугольника соответственно равны трем сторонам прямоугольного треугольника. А отсюда следует, что и данный треугольник прямоугольный.

Доказанное свойство треугольника со сторонами 3, 4 и 5 было, по-видимому, известно еще древнеегипетским землемерам: такой треугольник называют *египетским*. Всякий целочисленный треугольник (т. е. такой, длины сторон которого выражаются целыми числами), подобный египетскому, также является прямоугольным.

Существуют ли другие целочисленные прямоугольные треугольники?





Циркулем и угольником таких размеров невозможно было бы пользоваться (левый рисунок).

Построение прямого угла на местности (правый рисунок).

Если катеты и гипотенузу какого-нибудь целочисленного прямоугольного треугольника обозначить буквами x, y и z, то по теореме Пифагора получим:

$$x^2+y^2=z^2. \qquad (1)$$

Можно доказать, что верно и обратное, т. е. если x, y и z — натуральные числа, удовлетворяющие уравнению (1), то треугольник со сторонами x, y и z прямоугольный.

Целочисленный прямоугольный треугольник для краткости иногда называют *пифагоровым*.

Наше рассуждение показывает, что задача отыскания всех пифагоровых треугольников сводится к решению уравнения (1) в натуральных числах.

Рассмотрим несколько других задач.

Взвешивание груза на чашечных весах

Можно ли 28 г некоторого вещества отвесить на чашечных весах, имея гири только в 3 и 5 г?

Оказывается, это можно сделать, даже несколькими способами.

Попытаемся найти все способы взвешивания. Для этого поместим груз в 28 г на правую чашу весов и уравновесим его гирями в 3 и 5 г. Возможны такие случаи: а) все гири находятся на левой чаше весов; б) гири по 3 г находятся на левой чаше весов, а гири по 5 г вместе с грузом находятся на правой чаше весов; в) гири по 5 г находятся на левой чаше весов, а гири по 3 г вместе с грузом находятся на правой чаше весов.

Если через x обозначим число использованных гирь в 3 г, а через y — число использованных гирь в 5 г, то в соответствии с отмеченными выше случаями получим:

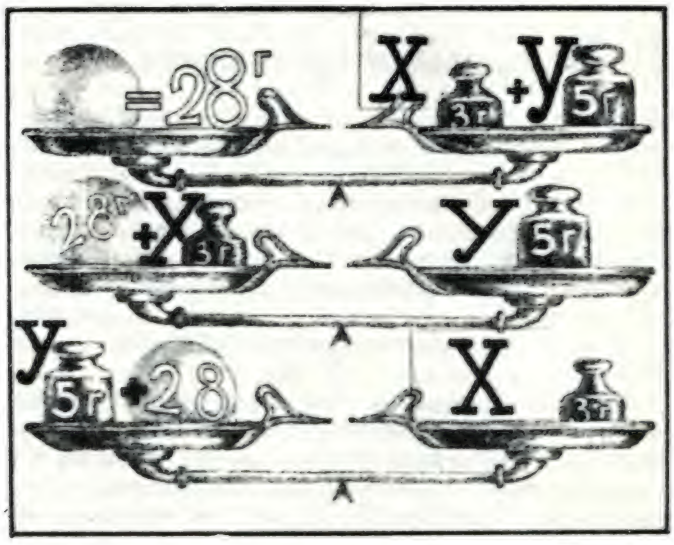
а) $3x+5y=28$, (2)

б) $3x=28+5y$, или $3x-5y=28$,

в) $5y=28+3x$, или $5y-3x=28$.

Чтобы найти все способы взвешивания, нужно решить каждое из полученных уравнений в неотрицательных целых числах. Можно решить лишь одно уравнение (2) в *целых* числах, но при этом нужно иметь в виду, что значения неизвестных x и y указывают не только на число использованных гирь, но и на их место на чашках весов. Так, если значение неизвестного x положительно, то число гирь в 3 г равно x и все они находятся на левой чаше весов; если значение x отрицательно, то число гирь в 3 г равно $|x|$ и все они находятся на правой чаше весов.

Сколько нужно взять гирь?



Раскрой фанеры

В деревообделочный цех одного завода поступил заказ вырезать из фанеры заготовки двух видов для 1000 изделий. Известно, что на одно изделие идет две заготовки первого вида и три второго. На складе имеется 800 листов фанеры одного образца. Были предложены три способа раскроя этих листов. При первом способе из листа фанеры получается пять заготовок первого вида и две второго, при втором — одна заготовка первого вида и пять второго и, наконец, при третьем — три заготовки первого вида и четыре второго.

Достаточно ли для выполнения заказа листов фанеры, имеющихся на складе? Сколько листов фанеры нужно кроить по первому, сколько по второму и по третьему способам, чтобы выполнить этот заказ?

Обозначим буквами x_1, x_2, x_3 соответственно число листов фанеры, раскроенных по первому, второму и третьему способам. Тогда $5x_1+x_2+3x_3$ — количество полученных заготовок первого вида и $2x_1+5x_2+4x_3$ — количество полученных заготовок второго вида. Так как для выполнения заказа требуется не менее чем 2000 заготовок первого и 3000 заготовок второго вида, то должны выполняться неравенства:

$$5x_1+x_2+3x_3\geqslant 2000,$$
$$2x_1+5x_2+4x_3\geqslant 3000.$$

Чтобы заменить неравенства строгими равенствами, обозначим через x_4 количество заготовок первого вида, которых придется изготовить сверх 2000, а через x_5 — количество «лишних» заготовок второго вида. Тогда, учитывая, что $x_1+x_2+x_3=800$, получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} 5x_1+x_2+3x_3-x_4=2000, \\ 2x_1+5x_2+4x_3-x_5=3000, \\ x_1+x_2+x_3=800. \end{cases} \quad (3)$$

Конечно, x_4 и x_5, так же как и x_1, x_2, x_3, должны быть целыми неотрицательными числами.

Каждому варианту (x_1, x_2, x_3) распределения 800 листов фанеры по способам раскроя соответствует решение $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ системы уравнений (3) в целых неотрицательных числах. Наоборот, каждому решению $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ системы (3) в целых неотрицательных числах соответствует определенный вариант распределения 800 листов фанеры по способам раскроя. Поэтому задача о раскрое фанеры приводит к отысканию решений системы (3) в целых неотрицательных числах.

Неопределенные уравнения

Каждая из рассмотренных задач сводится, как мы убедились, к решению в целых числах некоторых уравнений или систем уравнений. При этом число неизвестных всякий раз превосходит число уравнений. Такие уравнения и системы называют *неопределенными.*

При решении неопределенных уравнений или систем уравнений обычно ищут значения неизвестных, удовлетворяющие тем или иным арифметическим условиям. Например, их решают в целых или рациональных числах.

Еще александрийский математик Диофант (III в. н. э.) занимался решением алгебраических уравнений в рациональных (вообще говоря, дробных) числах.

Решением неопределенных уравнений в целых числах впервые начали заниматься ученые Индии (V—XII вв.). Они предложили общий метод для решения в целых числах неопределенных уравнений первой степени с целыми коэффициентами, а также нашли решение в целых числах некоторых неопределенных уравнений второй степени с двумя неизвестными.

Рациональные и целые решения неопределенных уравнений первой степени. Метод рассеивания

Решить неопределенное уравнение первой степени с целыми или дробными коэффициентами в рациональных числах нетрудно. Возьмем, например, уравнение

$$29x-13y=17 \quad (4)$$

Чтобы найти все решения этого уравнения, узнаем, при каких рациональных значениях одного неизвестного соответствующее значение второго неизвестного рационально. Каждому значению неизвестного x соответствует единственное значение неизвестного y, определяемое из формулы:

$$y=\frac{29x-17}{13}. \quad (5)$$

Если значение неизвестного x рационально, то и значение неизвестного y, получаемое из формулы (5), рационально.

В формуле (5) роли неизвестных x и y различны. Неизвестному x мы даем произвольное значение, а значение неизвестного y находится в зависимости от выбранного значения неизвестного x. В соответствии с этим называют неизвестное x *свободным,* а неизвестное y *зависимым.* Уравнение (4) можно разрешить не только относительно неизвестного y, но и относительно неизвестного x. В таком случае неизвестное y станет свободным, а неизвестное x зависимым.

Для отыскания целых решений уравнения (4) мы не можем непосредственно воспользоваться формулой (5), так как при целых значениях одного неизвестного второе неизвестное не обязательно принимает целые значения. Чтобы найти все целые решения уравнения (4), найдем такие целые значения неизвестного x, для которых соответствующее значение неизвестного y является целым числом.

Это незначительное на первый взгляд изменение постановки задачи открывает путь для ее решения.

Замечая, что

$$\frac{29}{13}=2+\frac{3}{13}, \quad \text{а} \quad \frac{17}{13}=1+\frac{4}{13},$$

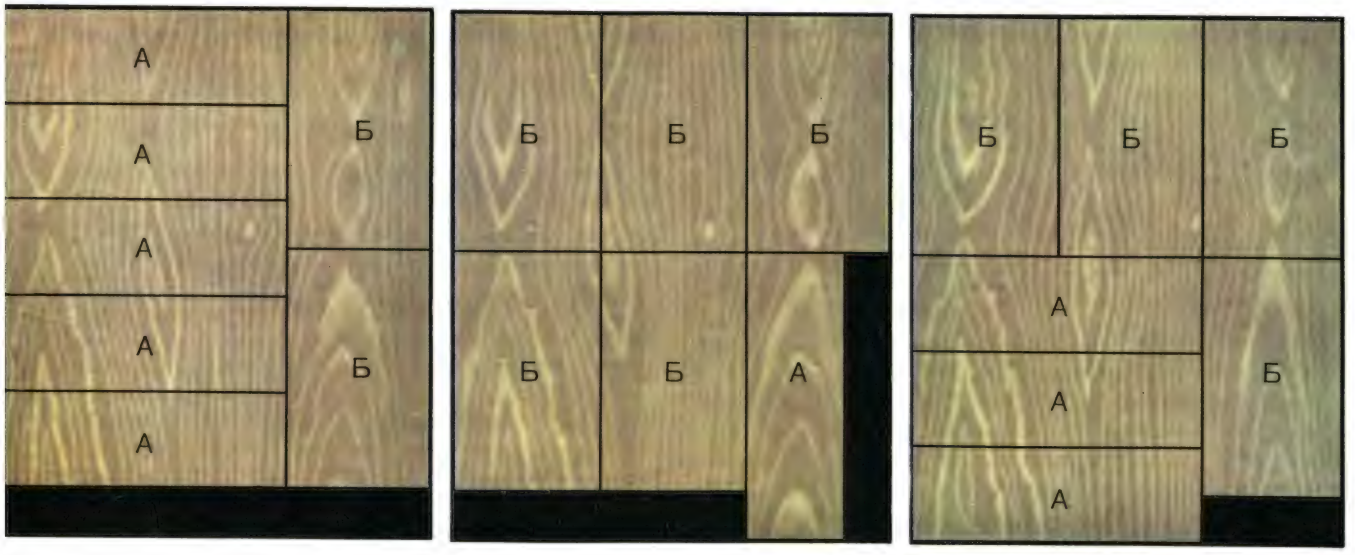
и пользуясь формулой (5), получим:

$$y=2x-1+\frac{3x-4}{13}. \quad (6)$$

Мы должны узнать, при каких целых значениях неизвестного x неизвестное y принимает целые значе-

Задача о раскрое фанеры — одна из задач бурно развивающейся в настоящее время теории линейного программирования (см. стр. 413).

На нижнем рисунке: «метод рассеивания» глазами художника.



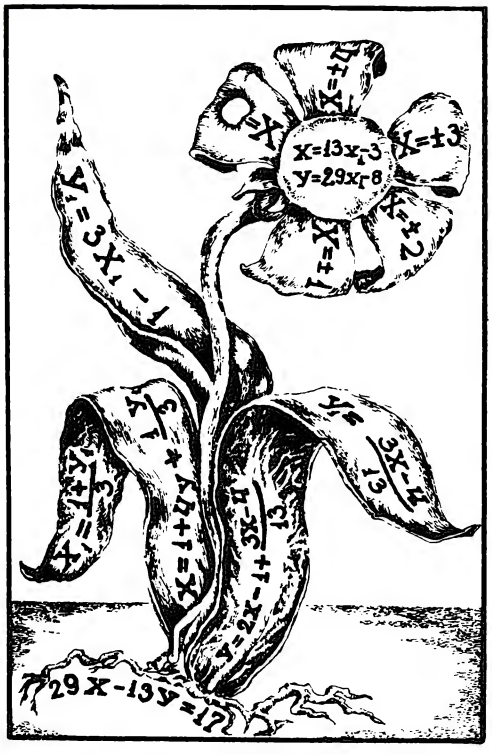
ния. Так как при целом x число $2x-1$ является целым, то из формулы (6) следует, что неизвестное y при целом x только в том случае принимает целое значение, если выражение $\frac{3x-4}{13}$ есть целое число. Задача еще не решена, но мы близки к цели.

В самом деле, полагая $\frac{3x-4}{13}=y_1$, замечаем, что вопрос, при каких целых значениях неизвестного x неизвестное y принимает целые значения, равносилен вопросу о целых решениях уравнения

$$3x-13y_1=4. \qquad (7)$$

Таким образом, решение в целых числах уравнения (4) удалось свести к решению в целых числах уравнения (7). Чем же второе уравнение предпочтительнее первого?

Самым простым из неопределенных уравнений первой степени естественно считать такое, у которого хотя бы один из коэффициентов при неизвестных равен 1 или -1. В этом случае неизвестное с таким коэффициентом при любых целых значениях остальных неизвестных принимает целые значения. Поэтому чем *меньше* наименьшая из абсолютных величин коэффициентов при неизвестных, тем уравнение предпочтительнее. В уравнении (4) наименьшая из абсолютных величин коэффициентов при неизвестных равна 13, а в уравнении (7) равна 3. Как удалось достичь этого? Коэффициент при неизвестном x и свободный член уравнения были заменены остатками от деления этих чисел на 13. Но остаток от деления целого числа на натуральное число всегда меньше этого натурального числа. Понятно, почему



с самого начала неизвестное y было выражено через неизвестное x: мы выбрали неизвестное с наименьшим по абсолютной величине коэффициентом. Теперь ясно, как поступать с уравнением (7).

При каких целых значениях неизвестного y_1 неизвестное x принимает целые значения?

Из условия

$$x=\frac{4+13y_1}{3}=1+4y_1+\frac{1+y_1}{3} \qquad (8)$$

находим, что неизвестное x при целых значениях неизвестного y_1 только в том случае принимает целые значения, если $\frac{1+y_1}{3}$ есть целое число. Обозначая через x_1 это выражение, получим $1+y_1=3x_1$, или

$$3x_1-y_1=1. \qquad (9)$$

Таким образом, задача сведена к решению в целых числах уравнения (9). Решить в целых числах уравнение (9) — значит узнать, при каких целых значениях неизвестного x_1 неизвестное y_1 принимает целые значения. Но $y_1=3x_1-1$, поэтому y_1 принимает целые значения при любых целых значениях неизвестного x_1. Из равенств (8) и (6) последовательно найдем выражения для неизвестных x и y.

$$x=1+4\,(3x_1-1)+x_1=13x_1-3,$$
$$y=2\,(13x_1-3)-1+3x_1-1=29x_1-8.$$

Из приведенных рассуждений следует, что формулы

$$\begin{cases} x=13x_1-3, \\ y=29x_1-8 \end{cases} \qquad (10)$$

при $x_1=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \pm3,\ \ldots$ дают все целые решения уравнения (4).

Аналогично решается уравнение с тремя и более неизвестными. Показанный на примере метод решения неопределенных уравнений в целых числах несущественно отличается от метода, предложенного индийцами. В связи с тем что при решении неопределенного уравнения по этому методу оно сводится к цепи уравнений с уменьшающимися коэффициентами, индийские математики назвали этот метод *методом рассеивания*.

Решение задачи о взвешивании

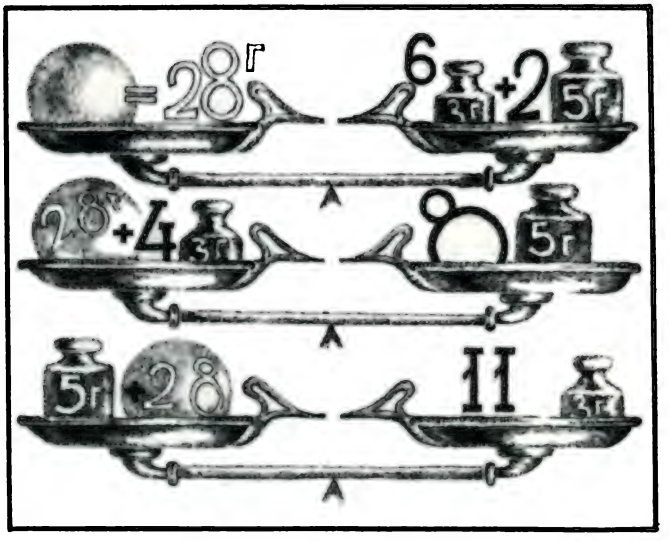
Итак, нам нужно решить в целых числах уравнение (2). Определяем неизвестное x:

$$x=\frac{28-5y}{3}=9-y+\frac{1-2y}{3}.$$

Верно и такое равенство:

$$x=9-2y+\frac{1+y}{3}.$$

Задача о взвешивании решена.



Им-то мы и воспользуемся. Ведь наша цель — уменьшить коэффициент при неизвестном. Введем обозначение: $x_1=\frac{1+y}{3}$. Задача сведена к решению в целых числах уравнения $3x_1-y=1$. Решая это уравнение, получим $y=3x_1-1$, где x_1 — любое целое число. А тогда

$$x=9-2\cdot(3x_1-1)+x_1=11-5x_1.$$

Таким образом, общее решение уравнения (2) можно записать так:

$$\begin{cases} x=11-5x_1, \\ y=3x_1-1, \end{cases}$$

где $x_1=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots$.

Найдем несколько решений этого уравнения:

x_1	0	1	−1	2	−2	3	−3
x	11	6	16	1	21	−4	26
y	−1	2	−4	5	−7	8	−10

Уравнение (2) имеет бесконечное множество решений, но мы сможем воспользоваться только некоторыми. Это зависит от числа гирь в нашем распоряжении да и размеров чаш.

Мы рассмотрели два уравнения первой степени. Каждое из них, как удалось установить, имеет целочисленные решения. Однако наряду с ними можно указать уравнения, которые решений в целых числах не имеют. Таково, например, уравнение

$$3x-6y=5. \qquad (11)$$

В самом деле, допустив, что при некоторых целых x и y равенство (11) верно, мы получим, что 5 делится на 3.

Какие неопределенные уравнения разрешимы в целых числах? Можно ли для всякого разрешимого в целых числах неопределенного уравнения первой степени найти его решение методом рассеивания?

На первый вопрос отвечает теорема:

Уравнение с целыми коэффициентами a_1, a_2, a_n, b

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b \qquad (12)$$

разрешимо в целых числах только в том случае, если свободный член b *делится на наибольший общий делитель чисел* $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Ответим на другой вопрос: всегда ли предложенный метод решения в целых числах неопределенных уравнений первой степени приводит к цели?

Если a_1 — наименьший по абсолютной величине коэффициент при неизвестном в уравнении (12), то мы заменяем это уравнение другим, в котором все коэффициенты, кроме коэффициента a_1, заменены остатками от деления этих чисел на a_1. Если хотя бы один из коэффициентов $a_2, a_3, \ldots, a_n$ не делится на a_1, то получим уравнение, коэффициенты которого по абсолютной величине меньше, чем у данного. С этим уравнением поступаем так же, как с данным. Если все числа $a_2, a_3, \ldots, a_n$ делятся на a_1, а b не делится, то данное уравнение неразрешимо. Если все числа $a_2, a_3, \ldots, a_n$ и b делятся на a_1, то, деля обе части уравнения на a_1, получим уравнение, целые решения которого находятся без труда.

Из этого рассуждения следует, что описанный метод позволяет найти целые решения всякого разрешимого в целых числах неопределенного уравнения с целыми коэффициентами.

Неопределенные системы уравнений первой степени

При решении в рациональных числах неопределенных систем уравнений первой степени с рациональными коэффициентами обычно пользуются методом последовательного исключения неизвестных. Решим, например, в рациональных числах такую систему уравнений:

$$\begin{cases} 3x + 5y - 7z = 15, \\ 2x - 3y + 9z = 12. \end{cases}$$

Из первого уравнения находим:

$$x = \frac{15 - 5y + 7z}{3}. \qquad (13)$$

Подставляя значение неизвестного x во второе уравнение, получим:

$$2 \cdot \frac{15 - 5y + 7z}{3} - 3y + 9z = 12,$$

или

$$-\frac{19}{3}y + \frac{41}{3}z = 2. \qquad (14)$$

Давая в уравнении (14) неизвестному z какое-нибудь рациональное значение, т. е. принимая z за свободное неизвестное, а x и y за зависимые неизвестные, мы, пользуясь равенствами (14) и (13), сможем найти все решения в рациональных числах данной системы уравнений.

В целых числах такую систему можно решить сходным способом. Сначала рассматривают одно из уравнений системы и решают его в целых числах. Найденные выражения для неизвестных этого уравнения через некоторые вспомогательные целочисленные неизвестные подставляют во второе уравнение. Решив в целых числах полученное уравнение с новыми неизвестными, можно найти все решения в целых числах и данной системы уравнений.

Решение задачи о раскрое фанеры

Теперь приступим к решению системы уравнений (3). Мы имеем три уравнения с пятью неизвестными. Поэтому два неизвестных будут свободными, а остальные три — зависимыми. Конечно, в качестве зависимых неизвестных нужно брать те неизвестные, у которых абсолютная величина коэффициентов минимальна.

Поэтому выберем в качестве свободных неизвестных x_1 и x_2 и выразим x_3, x_4, x_5 через x_1 и x_2. Для этого значение $x_3 = 800 - x_1 - x_2$ подставим в первые два уравнения, получим:

$$x_3 = 800 - x_1 - x_2,$$
$$x_4 = 400 + 2x_1 - 2x_2,$$
$$x_5 = 200 - 2x_1 + x_2.$$

Теперь, давая x_1 и x_2 целые значения, получим всевозможные решения системы уравнений (3) в целых числах.

Исследуйте самостоятельно, какие целые неотрицательные значения следует давать x_1 и x_2, чтобы x_3, x_4 и x_5 также были неотрицательными.

Ниже приведена таблица некоторых решений системы (3).

Из таблицы видно, что листов фанеры достаточно и что самый выгодный способ раскроя будет при $x_1=0$, $x_2=100$, $x_3=700$. В этом случае образуются «лишние» заготовки еще для 100 изделий. В других случаях «лишние» заготовки будут некомплектными. Но нужно ли раскраивать все 800 листов? Ведь нужны заготовки для 1000 изделий, а не для 1100.

Поэтому практический интерес представляет следующий дополнительный вопрос к этой задаче: какое наименьшее число f листов фанеры следует взять со склада и какими из указанных способов следует кроить взятые листы, чтобы выполнить заказ? Для ответа на этот вопрос из всех решений в целых неотрицательных числах системы уравнений

$$\begin{cases} 5x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 = 2000, \\ 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 - x_5 = 3000 \end{cases} \qquad (15)$$

нужно выбрать такое решение $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$, для которого $f=x_1+x_2+x_3$ принимает наименьшее значение, или, как мы будем говорить дальше, удовлетворяет *условию минимальности*.

Чтобы облегчить поиски, откажемся временно от требования, чтобы значения неизвестных были целыми. Попытаемся решить нашу задачу удачным выбором свободных неизвестных. Удобнее всего такими выбрать x_4, x_5 и какое-нибудь из неизвестных x_1, x_2, x_3. Определяя из уравнений (15) сначала, например, x_1, а затем x_2 и опуская промежуточные выкладки, будем иметь:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{23}(7000 - 11x_3 + 5x_4 - x_5), \\ x_2 = \frac{1}{23}(11000 - 14x_3 - 2x_4 + 5x_5), \\ f = \frac{1}{23}(18000 - 2x_3 + 3x_4 + 4x_5). \end{cases} \qquad (16)$$

При данном значении x_3 наименьшее значение f мы получим, если неизвестным x_4 и x_5 дадим нулевое значение (это и понятно, ведь x_4 и x_5 — количество «лишних» заготовок!). Пусть $x_4=x_5=0$. Легко видеть, что при возрастании значений неизвестного x_3 значение f будет убывать. Но рост x_3 сдерживается требованием, чтобы значения неизвестных x_1 и x_2 были неотрицательными. Так как $\frac{7000}{11} < \frac{11000}{14}$, то из равенств (16) (при $x_4=x_5=0$)

$$x_1 = \frac{11}{23}\left(\frac{7000}{11} - x_3\right),$$

$$x_2 = \frac{14}{23}\left(\frac{11000}{14} - x_3\right)$$

видно, что при возрастании x_3 отрицательные значения прежде всего будет принимать неизвестное x_1. Поэтому естественно неизвестное x_1 сделать свободным, а неизвестное x_3 — зависимым.

Определяя из уравнений (15) неизвестные x_2 и x_3, найдем:

$$x_2 = \frac{1}{11}(1000 + 14x_1 - 4x_4 + 3x_5),$$

$$x_3 = \frac{1}{11}(7000 - 23x_1 + 5x_4 - x_5),$$

$$f = \frac{1}{11}(8000 + 2x_1 + x_4 + 2x_5).$$

Легко видеть, что наименьшее значение f получим, если свободным неизвестным x_1, x_4 и x_5 дадим нулевые значения. При этом для зависимых неизвестных получим положительные значения:

$$x_2 = \frac{1000}{11}, \quad x_3 = \frac{7000}{11}.$$

Следовательно, решение

$$x_1 = 0; \quad x_2 = \frac{1000}{11} = 90{,}9. \qquad x_3 = \frac{7000}{11} = 636{,}3\ldots$$

$$x_4 = 0; \quad x_5 = 0$$

системы (15) удовлетворяет условию минимальности. Но нам требуется найти целочисленное решение в неотрицательных числах, удовлетворяющее условию минимальности. Из приведенных рассуждений следует, что для такого решения $f \geqslant \frac{8000}{11} = 727{,}2\ldots$ или даже $f \geqslant 728$, так как число f должно быть целым. Можно ожидать, что искомое решение мы полу-

x_1	0	0	0	100	100	100	100	200	200	200	300	300
x_2	0	100	200	0	100	200	300	200	300	400	400	500
x_3	800	700	600	700	600	500	400	400	300	200	100	0
x_4	400	200	0	600	400	200	0	400	200	0	200	0
x_5	200	300	400	0	100	200	300	0	100	200	0	100

чим, если немного изменим значения неизвестных. Положим, например, $x_1=0$, $x_2=91$, $x_3=637$. Тогда

$$f = x_1 + x_2 + x_3 = 728,$$
$$5\cdot 0 + 91 + 3\cdot 637 = 2002 > 2000,$$
$$2\cdot 0 + 5\cdot 91 + 4\cdot 637 = 3003 > 3000.$$

А это убеждает нас, что целочисленное решение с условием минимальности найдено. Итак, со склада достаточно взять лишь 728 листов фанеры и 91 из них кроить по второму, а остальные по третьему способу.

Решенная нами задача о раскрое фанеры относится к числу задач, составляющих предмет *теории линейного программирования* (см. стр. 413). В этой теории рассматривают задачи следующего типа: из всех решений в неотрицательных числах некоторой системы уравнений первой степени найти решение, удовлетворяющее условию минимальности. Иногда, как в задаче о раскрое фанеры, выдвигают дополнительное требование, чтобы значения неизвестных были целыми числами.

Весьма многие проблемы экономики, в частности вопросы планирования производства и перевозок, приводят к этим задачам.

Целые решения неопределенных уравнений степени выше первой

Решение в целых числах неопределенных уравнений степени выше первой с целыми коэффициентами — во многих случаях задача более сложная, чем решение в целых числах неопределенных уравнений первой степени.

Индийские математики (V—XII вв.) нашли решение в целых числах некоторых уравнений второй степени с двумя неизвестными. С исчерпывающей полнотой задачу нахождения в целых числах неопределенных уравнений второй степени с двумя неизвестными решил в 1766 г. французский математик Ж. Лагранж.

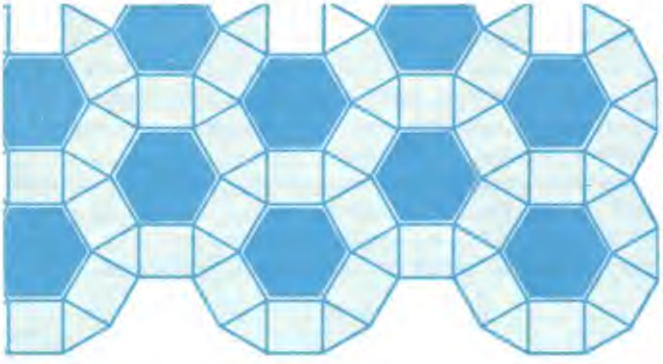
Уравнения третьей степени с двумя неизвестными до сих пор до конца не исследованы. С некоторыми типами таких уравнений удалось справиться советскому математику Б. Н. Делоне. Заметим, что даже установить число решений таких уравнений третьей и более высоких степеней исключительно трудно.

В начале нашего столетия норвежский математик А. Туэ доказал интересную теорему:

Если во всем искать математику, то можно построить интересную полезную математическую теорию, рассматривая, например, затейливые узоры на древнегреческой вазе или прихотливо повторяющиеся рисунки мозаик и паркета в старинных дворцах. Простейшая математическая теория ряда мозаик получится, если на плоскости рассматривать мозаики, состоящие из правильных многоугольников (см. стр. 267). Чтобы особо подчеркнуть важность того, что мозаики получаются повторением рисунка, введем следующее определение. Назовем преобразованием рисунка всякое его перемещение, которое надо совершить, чтобы совместить его с другим таким же рисунком. Оказывается, что для таких преобразований существует очень простая и красивая алгебра и такие преобразования образуют группу (более подробно о такой алгебре и теории групп см. в статье «Чем занимается алгебра?»).

Эти преобразования можем подразделить на несколько видов: параллельный перенос рисунка, поворот его на какой-то угол и зеркальное отражение. При этом оказывается, что на плоскости для любых мозаик из правильных многоугольников может быть только 17 различных групп таких преобразований. Этот замечательный факт установил в 1891 г. знаменитый русский кристаллограф Е. С. Федоров.

Изучение мозаик дает богатую пищу не только для математических исследований, но и для воображения художника. На прилагаемом рисунке можно видеть как «портреты» некоторых абстрактных групп, так и мозаики другого типа. Эти остроумные рисунки сделал датский художник Мориц К. Ешер. Первое впечатление, что утки летят, а всадники скачут только слева направо. Но тут же глаз замечает, что такая же процессия с занимательной точностью движется в противоположном направлении. Художник предлагает каждому попробовать свои силы в составлении таких мозаик. Однако он предупреждает, что такая работа требует усидчивости! Интересно отметить, что для таких произвольных мозаик теория групп уже не является таким же удобным и плодотворным математическим аппаратом, как для правильных мозаик. Но здесь начинается применение другой любопытной математической теории, именно теории о покрытии плоскости без пропусков и наложений фигурами сложных очертаний. И эта математическая теория дает много интересных и полезных сведений всякому, кто познакомится с ней поближе.



Неопределенное уравнение с целыми коэффициентами:

$$a_0x^n + a_1x^{n-1}y + a_2x^{n-2}y^2 + \ldots + a_ny^n = b,$$

где n — целое число, большее 2, имеет только конечное множество решений (в частности, может не иметь решений) в целых числах, за исключением случаев, когда левая часть этого уравнения есть степень однородного двучлена первой степени или трехчлена второй степени.

Еще более трудным является вопрос о решении в целых числах неопределенных уравнений выше первой степени с тремя и более неизвестными. До сих пор неизвестен общий метод решения таких уравнений. Уравнение (1) является простейшим из них. Древние греки и даже вавилоняне знали тождество:

$$(2mn)^2 + (m^2 - n^2)^2 = (m^2 + n^2)^2.$$

Пользуясь таким тождеством, нетрудно находить натуральные решения уравнения (1). Для этой цели нужно в формулах

$$\begin{cases} x = 2mn, \\ y = m^2 - n^2, \\ z = m^2 + n^2 \end{cases} \qquad (17)$$

переменным m и n давать натуральные значения с условием, что $m > n$. При помощи простых соображений доказывается, что из формул (17) можно получить все решения уравнения (1) в натуральных и взаимно простых числах, если параметрам m и n давать натуральные, взаимно простые и разной четности значения с условием $m > n$.

Занимаясь неопределенными уравнениями, известный французский математик П. Ферма высказал в середине XVII в. предположение, что для любого натурального числа n, большего 2, уравнение

$$x^n + y^n = z^n$$

не имеет решений в натуральных числах. Для $n = 3$ и $n = 4$ это было доказано Л. Эйлером.

В дальнейшем предпринимались многочисленные попытки доказать это утверждение (так называемую великую теорему Ферма) полностью, но они не имели успеха. (В настоящее время теорема доказана для всех $n < 10\,000$.)

Однако такие попытки не были безрезультатными, они содействовали возникновению и развитию нового отдела математики — алгебраической теории чисел.

В 1770 г. шотландский математик Э. Варинг высказал предположение, что для всякого натураль-

Лист Мебиуса

Поверхность кольца, надеваемого на палец, имеет две стороны. Одной стороной она соприкасается с пальцем, вторая сторона наружная. У этих сторон две границы (два края), каждая имеет форму окружности. Если какая-нибудь букашка захочет переползти с наружной стороны кольца на внутреннюю, то она при этом непременно должна пересечь ту или другую границу.

Немецкий математик А. Мебиус указал простую модель поверхности совсем другого фасона — односторонней поверхности. Ее легко приготовить, перекрутив на пол-оборота один конец прямоугольной бумажной полоски и приклеив его к другому концу той же полоски. Эту модель с той поры так и называют: лист Мебиуса.

Чтобы наглядно удостовериться в том, что у поверхности листа Мебиуса только одна сторона, возьмите карандаш и начните последовательно закрашивать лист, не отрывая карандаш от поверхности листа и не пересекая края листа. Когда вернетесь к тому месту, с которого начали, вы увидите, что окажется окрашенной вся поверхность листа, хотя его край вы и не пересекали ни разу.

ного k, не равного 1, существует такое натуральное число r, что при любом натуральном N уравнение

$$x_1^k + x_2^k + \quad . + x_r^k = N \qquad (18)$$

разрешимо в целых числах. Доказательство частного случая этого утверждения принадлежит французскому математику Ж. Лагранжу. Он установил, что всякое число можно представить в виде суммы четырех квадратов целых неотрицательных чисел, например:

$$23 = 3^2 + 3^2 + 2^2 + 1^2,$$
$$26 = 4^2 + 3^2 + 1^2 + 0^2.$$

Полностью эту теорему доказал в 1909 г. немецкий математик Д. Гильберт. Но ему не удалось дать оценку минимального числа r, для которого уравнение (18) разрешимо в целых неотрицательных числах. Значительный успех в определении $g(k)$ (так обозначают наименьшее r, для которого при любом натуральном N уравнение (18) разрешимо в целых неотрицательных числах) стал возможен только после создания советским математиком И. М. Виноградовым особого метода для решения этой и сходных с ней задач.

Любые достижения при решении неопределенных уравнений степени выше первой с тремя и более неизвестными обычно получаются с большим трудом. Это не случайно. Оказывается, *не существует* общего метода — алгоритма, который бы позволил распознавать, разрешимо или нет в целых числах каждое из таких уравнений. Эту теорему удалось доказать в 1970 г. двадцатитрехлетнему ленинградскому математику Ю. В. Матиясевичу.

Сравнительно недавно стали изучаться показательные неопределенные уравнения. К этой области относится интересная теорема советского математика А. О. Гельфонда:

Уравнение $a^x + b^y = c^z$ ***где*** a, b ***и*** c ***— целые, каждое из которых не равно ни нулю, ни степени двойки, может иметь не более чем конечное число решений в целых числах*** x, y ***и*** z.

Наиболее трудны неопределенные уравнения, связанные каким-либо способом с простыми числами.

Опыты с листом Мебиуса

Возьмите несколько листов плотной бумаги (например, обложки старых журналов большого формата), клей, ножницы и исследуйте «поведение» листа Мебиуса и других моделей, изготовляемых из прямоугольных полосок бумаги, если разрезать их по линиям вдоль края.

1. Что получится, если обыкновенное (неперекрученное) бумажное колечко разрезать вдоль его средней линии? Очевидно, два колечка, причем длина окружности каждого будет такой же, как длина окружности первоначально взятого колечка. А вот если лист Мебиуса мы также разрежем вдоль его средней линии, то образуется...

Проделайте и посмотрите, что получится.

2. Приготовьте второй лист Мебиуса из достаточно широкой полоски и разрезайте его ножницами так, чтобы линия разреза все время шла вдвое ближе к левому краю первоначальной полоски, чем к правому (линия разреза обойдет лист Мебиуса дважды). Теперь образуются два кольца, но они окажутся сцепленными. Проделайте!

А что получится, если вновь взять бумажную полоску, один ее конец перекрутить на полный оборот (на 360°), приклеить к другому концу и разрезать получившуюся модель по средней линии?

3. Надрежьте концы бумажной полоски поглубже. Склейте концы A и D. Пропустите конец B под A и приклейте его к E. Пропустите конец C между B и A, а конец F между D и E, после чего склейте концы C и F. Все склеивания концов производите прямо, т. е. без предварительного перекручивания.

Теперь каждый начатый разрез продолжайте вдоль всей модели; получится интересное переплетение трех колец: любые два будут сцеплены друг с другом и оба с третьим кольцом.

Если вы ошибетесь и конец C приклеете к концу F, не пропустив C между B и A, то после указанного разрезания получится обычная цепь из трех колец.

Фигуры и тела

Геометрия вокруг нас

Кое-кто, возможно, считает, что различные замысловатые линии и поверхности можно встретить только в книгах ученых-математиков. Однако стоит внимательно осмотреться, и мы сразу обнаружим вокруг нас всевозможные геометрические фигуры. Оказывается, их очень много. Просто мы их раньше не замечали.

Вот комната. Все ее стены, пол и потолок являются *прямоугольниками* (не будем обращать внимания на проемы окон и дверей), а сама комната имеет форму *параллелепипеда*. Посмотрим на паркетный пол. Планки паркета — прямоугольники или *квадраты*.

Пройдем в ванную комнату. Плитки пола там часто бывают правильными *шестиугольниками* или *восьмиугольниками*, между которыми уложены небольшие квадратики (рис. 1). Ведро с крышкой представляет собой *усеченный конус*, у которого верхнее основание больше нижнего. Впрочем, ведро бывает и *цилиндрической* формы. Вообще цилиндров и конусов в доме очень много. Все прямые трубы (водо-

Рис. 1 (внизу).

Рис. 2 (см. стр. 271). Изображены предметы самых разнообразных геометрических форм, с которыми приходится иметь дело в различных областях науки, искусства, техники.

Рис. 3.

провод, паровое отопление, газопровод) имеют *цилиндрическую поверхность*. А там, где трубы изогнуты, образуются так называемые *каналовые*, или *трубчатые, поверхности*.

Но вернемся в комнату и посмотрим на мебель. Шкаф в своей основе параллелепипед. Письменный стол не что иное, как очень плоский параллелепипед, лежащий на двух других параллелепипедах — тумбочках, в которых размещаются ящики. На столике лампа с абажуром. Этот абажур — конус. В буфете стоит посуда. Вот граненый стакан с боковой поверхностью правильной многогранной *призмы* или *усеченной пирамиды*. Боковая поверхность чайного блюдечка представляет собой боковую поверхность усеченного конуса. Воронка состоит из двух усеченных конусов, которые переходят один в другой. Нальем в стакан воду. Ее поверхность имеет форму *круга*. Наклоним стакан так, чтобы вода не выливалась, тогда край водной поверхности станет *эллипсом* (см. рис. 1).

Выйдем на улицу. Перед нами дома. Если не обращать внимания на особенности их архитектурной отделки, можно сказать, что стены — части *плоскостей*. Две стены, встречаясь под углом, пересекаются по *прямой линии*. Дом в целом, с этой точки зрения, тело, ограниченное пересекающимися друг с другом плоскостями, т. е. *многогранник*. На рис. 3 изображен такой дом-многогранник.

Многие жилые дома, общественные здания украшены колоннами. Колонны в большинстве случаев — цилиндры, но могут иметь и более сложную форму.

Кто был в Москве, знает, как красив Московский Кремль. Прекрасны его башни! Сколько интересных геометрических фигур положено в их основу! Вот, например, Набатная башня (рис. 4). На высоком параллелепипеде стоит параллелепипед поменьше, с проемами для окон, а еще выше воздвигнута четырехугольная усеченная пирамида. На ней расположены четыре арки, увенчанные восьмиугольной пирамидой. Назовите геометрические тела, которые вы видите на рис. 5.

По улице движутся автомобили, трамваи, троллейбусы. Их колеса с геометрической точки зрения — круги. Мы настолько привыкли к этому, что даже не думаем об *окружности* как о кривой, которая помогла людям во много раз облегчить их труд. А ведь было время, когда люди еще не знали колеса́.

Посмотрим на автомобильные фары. Их внутренняя поверхность зеркальная. Конструкторы автомобилей знают, что свет должен выходить из фар пучком параллельных лучей, тогда свет будет меньше всего рассеиваться с увеличением расстояния. А чтобы зеркало фар отражало лучи параллельным пучком, зеркалу нужно придать форму *параболоида вращения*, внутри которого в определенной точке (в фокусе) находится лампочка. Параболоид вращения — это поверхность, которая образуется при вращении параболы вокруг ее оси.

Параболоид вращения служит отражающим зеркалом и у прожекторов, которые посылают в небо мощные лучи. Форму параболоида вращения имеет купол Московского планетария (см. рис. на стр. 213).

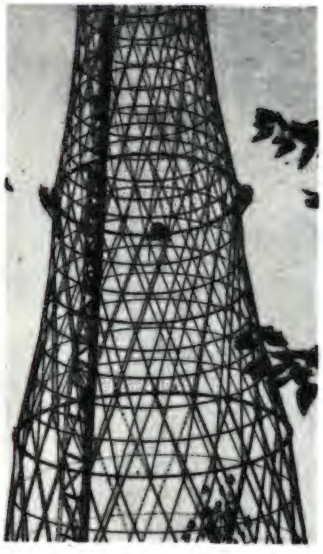
Мы подходим к радиостанции. Здесь возвышаются радиомачты с излучателями электромагнитных колебаний на верхушках. Но какой странной формы эти мачты! Они состоят из отдельных частей (секций), поставленных одна на другую. А каждая секция похожа на круглую сетку, образованную прямолинейными стержнями (см. рис. на стр. 273). Рассмотрим любую из секций (они отличаются только размерами). Представим себе, что стержни расположены вплотную друг к другу. В таком случае они будут образовывать замечательную кривую поверхность, которая называется *однополостным гиперболоидом*. Те прямолинейные стержни, которые мы видим, не что иное, как прямолинейные образующие этой поверхности.

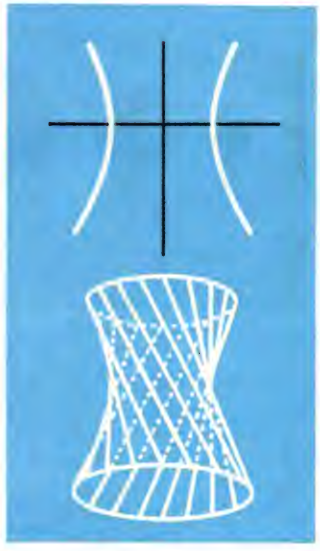
Рис. 4.

Рис. 5 (верхний).

Рис. 6 (нижний левый).
Радиомачта В. Г. Шухова.

Рис. 7 (нижний правый).





Посмотрите на однополостный гиперболоид (рис. 7). Трудно поверить, что он состоит из прямых линий. Однако это именно так. Эта конструкция очень легка и отличается исключительной прочностью. Из однополостных гиперболоидов составлена известная радиомачта в Москве на Шаболовке, сконструированная советским инженером академиком В. Г. Шуховым. Своим названием однополостный гиперболоид обязан *гиперболе* (рис. 7). Эта поверхность образована вращением гиперболы вокруг той из ее осей, которая ее не пересекает. В таком случае при вращении образуется единая поверхность (одна полость).

Перед нами мост. Арки мостов бывают разной формы (рис. 8—10): одни из них эллиптические, другие параболические. На парапете моста часто укрепляют спасательные круги. Они по форме очень близки к *тору*. Тор — это поверхность, образующаяся при вращении окружности вокруг оси, когда ось не пересекается с окружностью, но лежит с ней в одной плоскости (см. рис. на стр. 277).

А теперь сядем в поезд. Город остался далеко позади. Бегут телеграфные столбы. Но и здесь геометрия не покидает нас. Вдоль дороги на столбах натянуты провода. Вот проходит линия высоковольтной

Рис. 8.

Рис. 9.

Рис. 10.

передачи. Провода от собственной тяжести слегка провисают (рис. 12). Какая же линия образуется при этом? Такой вопрос имеет большое практическое значение. Когда требуется определить длину провода, необходимого для передачи электроэнергии на большие расстояния, приходится учитывать, что его длина (благодаря провисанию) будет большей, чем расстояние между конечными пунктами линии электропередачи. И чтобы точно подсчитать длину проводов, необходимо определить, какая именно линия образуется при провисании провода между двумя столбами. Оказывается, что между каждыми двумя столбами провод провисает по так называемой *цепной линии*. Точно так же провисает и шнур, укрепленный на двух гвоздиках, вбитых в стену. Цепная линия очень похожа на параболу, но это не парабола; свойства цепной линии и параболы различны.

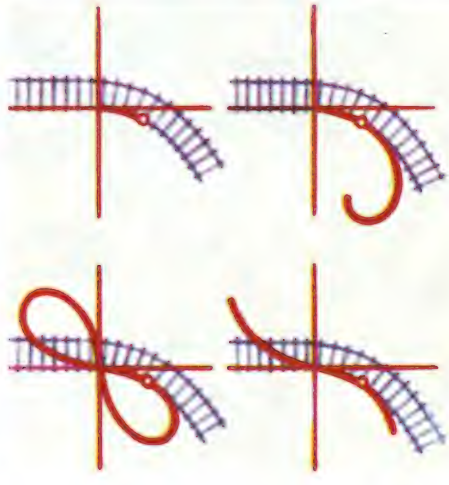
Наш поезд идет по прямолинейному железнодорожному пути и время от времени плавно проходит закругления рельсов (рис. 11). Плавное движение поезда на изгибах железнодорожного полотна обусловлено тем, что железнодорожный путь на закруглениях искривлен не просто по окружности, а по некоторым довольно замысловатым кривым. Лишь иногда, на очень крутых поворотах, мы ощущаем, что нас слегка отталкивает к одной из стенок вагона. Мы знаем, что в местах закруглений пути на вагоны действует сила, которую называют центробежной. Она стремится опрокинуть вагоны и отклоняет все тела, находящиеся в поезде, к внешней стороне закругления.

Чтобы вагоны не опрокинулись, внешний рельс железнодорожного полотна на повороте слегка поднимают по сравнению с внутренним, и этот подъем тем больше, чем круче поворот. Но если заставить поезд сразу переходить с прямолинейного участка пути на круговой, то надо круто приподнять один из рельсов; вагоны будут испытывать при переходе сильные толчки. Чтобы этого избежать, переход на закругление делают постепенным. После прямолинейного

Рис. 11 (левый).

Рис. 12 (верхний правый).

Рис. 13 (нижний).



учаётка пути рельсы сначала укладывают по так называемой *переходной кривой* (вдоль которой искривленность возрастает постепенно) и лишь потом эту кривую переводят в дугу окружности. Так поступают и в конце поворота. В качестве переходных используются разные линии (в зависимости от кривизны поворота, скорости поезда на повороте и т. д.). Обычно применяют либо дугу *кубической параболы*, либо дугу *лемнискаты*, либо дугу *спирали Корню* (рис. 13).

Заглянем на завод. Заводская труба — пример усеченного конуса: широкая снизу, она постепенно суживается кверху. На заводе работают станки. Какое множество самых разнообразных линий описывают различные движущиеся части станков! На любом винте имеются винтовые нарезки. Мы увидим станки с эллиптическими колесами, зубчатые колеса с самыми разнообразными формами зубцов, выточенных по дуге *циклоиды*, эллипса, *эвольвенты* круга (рис. 14, 15). Свойства этих кривых, имеющих важное применение в технике, изучаются средствами высшей математики.

Кажется, мы не упомянули еще о *шаровой поверхности*. А ведь она встречается часто. Вспомним хотя бы шариковые подшипники; форму шара придают иногда и газгольдерам, т. е. резервуарам для хранения газа (рис. 16). Это объясняется одним замечательным свойством шаровой поверхности: на изготовление шара расходуется значительно меньше материала, чем на сосуд любой другой формы того же объема.

А сколько еще встречается различных поверхностей, сложных по форме, не имеющих специальных названий!

Вот паровой котел, напоминающий цилиндр. В нем находится пар под высоким давлением. Поэтому стенки цилиндра слегка (пусть незаметно для глаза) изгибаются, образуя поверхность очень сложной и неправильной формы, которую, однако, инженеры обязаны хорошо знать, чтобы суметь рассчитать ко-

Рис. 14 (верхний).

Рис. 15 (средний)

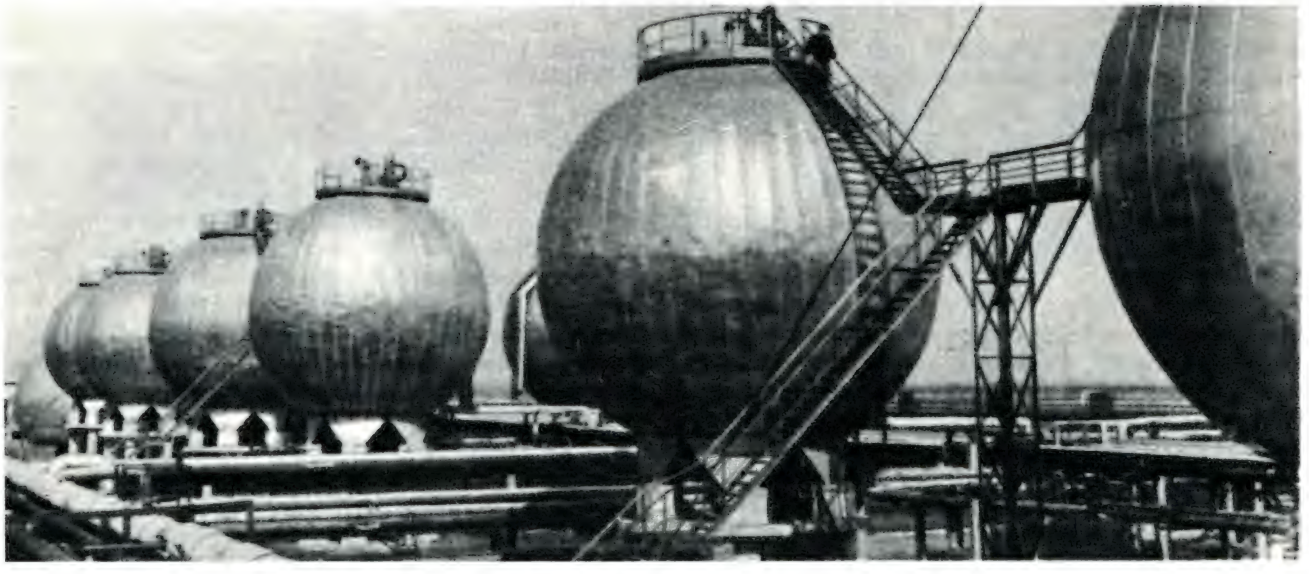
Рис. 16 (нижний).

Рис. 17 (см. стр. 277). Внизу слева спасательный круг. Это тор. В глубине цилиндрическая колонна с плитой формы прямоугольного параллелепипеда. Корпусы корабля и автомобиля — сложной геометрической формы. Причал вымощен квадратными и восьмиугольными плитами. Справа изображены параболический прожектор, схема газгольдера, шарикоподшипник.

тел на прочность. Сложную форму имеет и корпус подводной лодки. Он должен быть хорошо обтекаемым, прочным и вместительным. От формы корабельного корпуса зависит и прочность корабля, и его устойчивость, и скорость. Высокие скорости движения заставили инженеров обратить серьезное внимание на форму современных поездов, самолетов, автомобилей. Именно от нее зависит встречное сопротивление воздуха, которое быстро возрастает с увеличением скорости. А если форма будет удачной, обтекаемой, сопротивление воздуха можно значительно уменьшить. Например, гоночный автомобиль; его кузову придают такую форму, чтобы встречные потоки воздуха плавно обтекали машину и, плотнее прижимали ее к земле. Двигатель автомобиля заключен в обтекаемый капот, ветровое стекло отклонено назад, крыша кузова плавно переходит в наклонную заднюю стенку. И капот, и крыша, и задняя стенка не плоские. Они представляют собой сложные поверхности, с которыми школьная математика не имеет дела. Но ими очень интересуются инженеры, которые тщательно их рассчитывают в своих конструкторских бюро.

Мы живем в эпоху завоевания космоса. Наши ракеты запускают космические корабли. Какие геометрические формы мы здесь используем? В основе корпус ракеты состоит из цилиндра, заключающего внутри себя двигатели и горючее. В конической головной части помещается кабина с приборами или с космонавтом.

Итак, мы познакомились с множеством различных линий, поверхностей и тел, которые нас окру-



жают. Теперь вы и сами, несомненно, заметите много геометрических форм, о которых мы здесь не упоминали. Впрочем, об одной линии, которая всегда находится около нас, мы расскажем, ибо заметить ее самому, ничего не зная о ней заранее, невозможно. Пол и потолок в нашей комнате поддерживаются балками, концы которых вмурованы в стены. Балки под влиянием большой нагрузки слегка прогибаются (этот прогиб незаметен для глаза), и, чтобы рассчитать допустимую нагрузку на балки, архитектор должен знать линию ее прогиба. Оказывается, балка, поддерживающая пол или потолок, прогибается по кривой, которая называется *параболой 4-й степени*. Не будет преувеличением сказать, что эта линия всегда находится у нас под ногами и всегда висит над нашей головой.

Мы видим, сколько самых разнообразных геометрических линий и поверхностей использует человек в своей деятельности — при строительстве жилищ, фабрик, заводов, мостов, машин, в транспорте. Пользуется же он ими не из простой любви к интересным геометрическим фигурам, а потому, что свойства этих геометрических линий и поверхностей позволяют с наибольшей простотой решать разнообразные технические задачи.

До сих пор мы, в основном, упоминали о геометрических формах, созданных руками человека. Однако и в самой природе очень много замечательных геометрических форм. Так, мы живем на планете, имеющей своеобразную поверхность, которая хотя и именуется земным шаром, но на самом деле по форме близка к *эллипсоиду вращения*. Этот эллипсоид образован вращением эллипса вокруг его малой оси. Правда, он мало отличается от шара (полуоси эллипса, вращением которого образован эллипсоид, относятся как $\frac{299}{300}$). Но все-таки это различие приходится принимать во внимание при составлении географических карт.

Во многих случаях наблюдения над явлениями природы помогают человеку в решении технических задач. Достаточно сказать, что на заре развития авиации наши знаменитые ученые Н. Е. Жуковский, которого В. И. Ленин назвал «отцом русской авиации», и С. А. Чаплыгин исследовали полет птиц, чтобы сделать выводы относительно наивыгоднейшей формы крыла самолета и условий его полета.

Из всего сказанного видно, что геометрия играет в нашей жизни очень большую роль.

Полуправильные выпуклые многогранники

(см. стр. 279).

Их грани — правильные многоугольники разных наименований, а все многогранные углы равны между собой.

Всего существует тринадцать вполне определенных полуправильных многогранников (они были известны Архимеду, поэтому их также называют телами Архимеда) и еще две бесконечные серии так называемых призм и антипризм Архимеда.

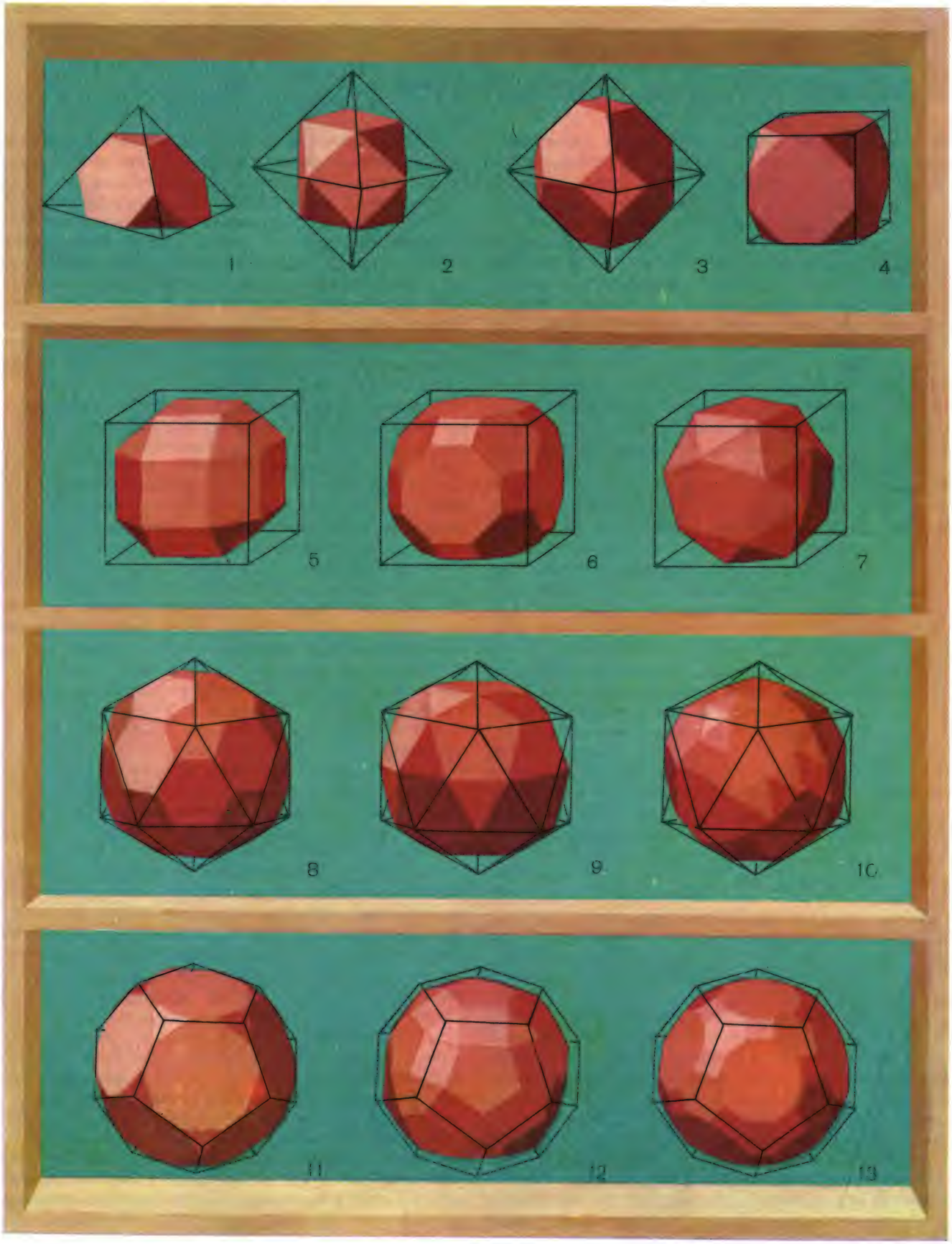
На рисунке изображены все тринадцать типов полуправильных многогранников: 1) усеченный тетраэдр (грани — правильные треугольники и шестиугольники), 2) кубооктаэдр (грани — правильные треугольники и квадраты), 3) усеченный октаэдр (грани — квадраты и правильные шестиугольники), 4) усеченный куб (грани — правильные треугольники и восьмиугольники), 5) ромбокубооктаэдр (грани — правильные треугольники и квадраты), 6) усеченный кубооктаэдр (грани — квадраты, правильные шестиугольники и восьмиугольники), 7) плосконосый куб (грани — правильные треугольники и квадраты), 8) усеченный икосаэдр (грани — правильные пятиугольники и шестиугольники), 9) плосконосый додекаэдр (грани — правильные треугольники и пятиугольники), 10) икосододекаэдр (грани — правильные треугольники и пятиугольники), 11) усеченный додекаэдр (грани — правильные треугольники и десятиугольники), 12) ромбоикосододекаэдр (грани — правильные треугольники, пятиугольники и квадраты), 13) усеченный икосододекаэдр (грани — квадраты, правильные шестиугольники и десятиугольники).

На всех чертежах показаны также правильные многогранники, из которых усечением получаются полуправильные.

Подсчитайте, сколько каких граней имеет каждое из тел Архимеда, сколько вершин, сколько ребер. Правильность этого подсчета можно проверить по формуле Эйлера, верной для всякого выпуклого многогранника,

$$Г+В-Р=2,$$

где Г — количество граней, В — количество вершин, Р — количество ребер.


1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13

Как возникла геометрия

Истоки геометрии, как и арифметики, теряются во тьме веков. Ко времени появления письменности люди имели уже некоторый запас геометрических знаний, полученных в результате практической деятельности и первых теоретических обобщений. По дошедшим до нас египетским папирусам и древневавилонским текстам видно, что уже за 2 тыс. лет до н. э. люди умели определять площади треугольника, прямоугольника, трапеции, знали хорошее приближение для площади круга. Они знали также формулы для определения объемов куба, цилиндра, конуса, пирамиды и усеченной пирамиды. При этом точные формулы применялись наряду с приближенными и различия между ними не делалось.

В древнем Вавилоне были известны частные случаи теоремы Пифагора. А именно, было известно, что если длины сторон прямоугольного треугольника выражаются в рациональных числах, то квадрат длины гипотенузы равен сумме квадратов длин катетов. Знали уже и обратную теорему: если a, b и c такие рациональные числа, что $c^2=a^2+b^2$ (например, $a=3$, $b=4$, $c=5$), то треугольник со сторонами a, b, c будет прямоугольным. Наконец, люди знали уже основные предложения о подобии треугольников и умели ими пользоваться.

И все же, несмотря на то что человечество накопило такие обширные знания, геометрия как наука еще не существовала. Дело в том, что в странах Древнего Востока, о которых шла речь, геометрические знания напоминали сборник мало связанных между собой полезных рецептов, их даже и излагали так, как в наши дни кулинарные рецепты или советы по домоводству. Для решения задачи приводился рецепт, в правильности которого можно было убедиться на конкретных примерах. Общие предложения не доказывались.

Возникновение геометрии как науки

Примерно такой же характер имели геометрические знания и в Древней Греции в VII—VI вв. до н. э. Греческая культура была более молодой, и поэтому многие сведения греки заимствовали у египтян и вавилонян. Именно здесь, в Греции, в VI в. до н. э. и произошло коренное преобразование способа изучения геометрии, здесь и возникла она как наука. Это было время установления демократии в большинстве греческих городов-государств, время бурного развития общественно-политической жизни Греции и появления научно-философских школ. В этих школах ученые впервые в истории человечества пытались понять и объяснить устройство мира с естественнонаучной и философской точек зрения. До этого в странах Древнего Востока господствовали догматы религии, в которые надо было верить, обсуждать их было нельзя. В Греции же каждая из школ старалась доказать правильность своей теории и опровергнуть противников, показав, что их доводы логически противоречивы. Логические рассуждения получили в это время широкое применение не только в естественных науках и философии, но и в судах, и в народных собраниях.

Особенно большую роль сыграли логические рассуждения в геометрии — они-то и сделали из собрания геометрических фактов стройную науку. Сами греки связывали рождение геометрии с деятельностью Пифагора и его школы. О Пифагоре мы почти ничего не знаем; уже в древности его имя было окружено фантастическими легендами. Известно только, что Пифагор переселился около середины VI в. до н. э. с острова Самос в Южную Италию (так называемую Великую Грецию), где находились богатые греческие города-колонии, и основал там союз, имевший и политические и научные цели. Мы знаем выдающихся математиков V в. до н. э., которые называли себя пифагорейцами. Поэтому у нас есть все основания говорить о пифагорейской математической школе, хотя мы и не знаем в точности, какие открытия были сделаны самим Пифагором, а какие принадлежат его последователям.

Что же сделали пифагорейцы в геометрии? Прежде всего они начали строить геометрию как абстрактную науку, изучающую общие свойства неких идеальных фигур, которые «в чистом виде» в природе не встречаются. Так в геометрию были введены линии, имеющие только длину, но не имеющие ширины; точки, не имеющие ни длины, ни ширины; фигуры, составленные из таких линий, и т. д. Эти новые геометрические объекты являются отвлечениями, абстракциями от формы реальных физических тел. Например, прямая линия могла возникнуть как абстракция от туго натянутой веревки, струны, луча света. Но ясно, что мы никогда не сможем построить идеальный отрезок: как бы точно мы его ни вычертили, стоит только посмотреть на рисунок в сильную лупу, чтобы убедиться, что это вовсе не отрезок прямой, а неровная палочка (из туши, мела и т. п.).

Создание отвлеченных геометрических понятий было вовсе не легким делом. Далеко не все мыслители древности понимали их пользу. Так, например, Протагор (481—411 гг. до н. э.) не признавал геометрических абстракций. Он говорил, что никто не

видел линий без ширины, не видел, чтобы круг касался линейки только в одной точке — касание всегда будет происходить по маленькому отрезочку, поэтому таких вещей и не существует.

Однако новая точка зрения на геометрию позволила в короткий срок добиться таких удивительных результатов, что большинство ученых признали эти абстракции и начали с ними оперировать. Как же они это делали? Как можно изучать свойства тех идеальных фигур, с которыми имеет дело геометрия?

Величайшим достижением древних греков было то, что они создали метод для изучения геометрических абстракций, введя в математику логические доказательства.

Рассмотрим, например, как можно установить, что сумма углов треугольника точно равна $2d$. Непосредственным измерением это сделать нельзя, во-первых, потому, что на практике мы никогда не имеем дела с идеальными треугольниками, и, во-вторых, потому, что измерение углов на практике всегда производится с определенной степенью точности, например с точностью до $1'$ или $1''$. Но если бы даже мы и могли измерять идеальные треугольники (с помощью идеальных инструментов!), то и тогда мы не могли бы установить теорему о сумме углов любого треугольника, потому что различных треугольников бесконечно много, невозможно перебрать их все!

Все сказанное можно дословно повторить и о любой другой теореме: она относится не к одной заданной геометрической фигуре (например, к треугольнику со сторонами 3, 4, 5), а к целому классу фигур (например, ко всем треугольникам, или ко всем прямоугольным треугольникам, или ко всем равнобедренным треугольникам), причем каждый такой класс состоит из бесконечного множества отдельных фигур.

Древнегреческие ученые понимали, что установить правильность какого-либо свойства для всех фигур некоторого класса можно только с помощью логического доказательства. Но как (и можно ли) построить такую систему геометрии, в которой все правильные предложения можно было бы доказать?

Построение дедуктивной системы

Прежде всего, ясно: все правильные предложения доказать нельзя. Действительно, вспомним, как доказывают геометрические предложения. Обычно опираются на другие предложения, которые были доказаны раньше. Эти предложения в свою очередь доказывают ссылками на какие-то третьи теоремы и т. д. Ссылки мы могли бы продолжать до бесконечности, и процесс доказательства никогда бы не закончился. Как же быть? Это обстоятельство заметили еще в древности, о нем говорил, например, Аристотель (IV в. до н. э.). И вот геометры пришли к удивительно смелой мысли, что все геометрические свойства тел можно вывести из небольшого числа основных предложений — *аксиом*. Такие предложения принимались без доказательств, их справедливость подкреплялась многовековым опытом. Усилия многих геометров были направлены на то, чтобы отыскать все аксиомы, необходимые для построения геометрии. Система, в которой каждое предложение выводится на основании логических правил из конечного числа предложений, принятых без доказательства, и получила название *дедуктивной*.

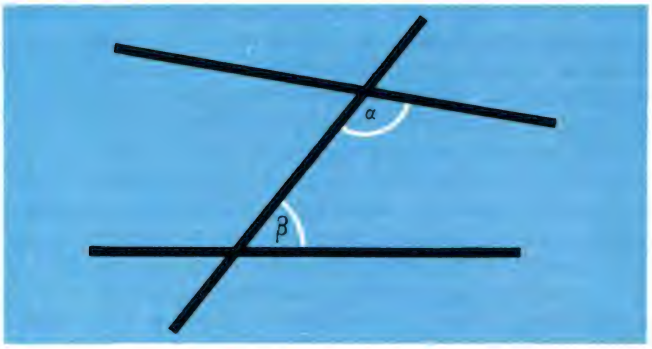
Первую такую систему геометрии — «Начала» — пытался построить еще в V в. до н. э. Гиппократ Хиосский. Было еще несколько попыток такого рода, но наиболее совершенная из них — знаменитые «Начала» Евклида, которые были написаны около 300 г. до н. э. и служили в течение более 2 тыс. лет образцом математической строгости.

Евклид разделил предложения, принятые без доказательства, на аксиомы и постулаты. В качестве постулатов он выбрал предложения, в которых утверждалась возможность выполнения некоторых простейших геометрических построений, например: 1) через две точки всегда можно провести прямую линию, 2) из данной точки данным радиусом можно описать окружность. Как нетрудно видеть, это именно те построения, которые можно сделать с помощью циркуля и линейки. Всякое построение в геометрии Евклида осуществляется с помощью последовательного выполнения простейших построений: проведения прямых, окружностей и отыскания их точек пересечения, поэтому геометрия Евклида есть геометрия циркуля и линейки.

Среди постулатов Евклида особое место занимает так называемый V постулат — о параллельности. В «Началах» он формулируется так: если две прямые, лежащие в одной плоскости, пересечены третьей и если сумма внутренних односторонних углов α и β меньше $2d$, то при продолжении прямые пересекутся с той стороны, где эта сумма меньше $2d$ (рис. 1, стр. 282). Этот постулат сыграл огромную роль в развитии геометрии, о чем мы будем говорить дальше.

Кроме постулатов Евклид принял также некоторые общие предложения, верные не только для геометрических величин, но и для чисел,— аксиомы: 1) две величины, порознь равные третьей, равны между собой; 2) если к равным величинам приба-

Рис. 1.



вить равные, то и суммы будут равны; 3) целое больше части и др.

На основе своих постулатов и аксиом Евклид развил всю планиметрию, а с ее помощью построил элементы алгебры и учение о квадратных уравнениях. В его сочинении содержатся также общая теория отношений, которая применяется в учении о подобии, теория чисел, метод определения площадей и объемов и основы стереометрии. Венчает «Начала» учение о правильных выпуклых многогранниках, т. е. таких, все грани которых являются равными правильными многоугольниками и все многогранные углы при вершинах тоже правильные и равные. Евклид доказал, что существует пять типов правильных многогранников (рис. 2): тетраэдр (4-гранник), гексаэдр, или куб (6-гранник), октаэдр (8-гранник), додекаэдр (12-гранник), икосаэдр (20-гранник) — и никаких других правильных многогранников не существует.

Рис. 2. Правильные многогранники.

Можно сказать, что в «Началах» Евклида были заложены основы не только геометрии, но и всей античной математики.

На новую, более высокую ступень исследования основ геометрии ученые поднялись только в XIX в. Тогда было выяснено, что Евклид перечислил не все аксиомы, которые на самом деле нужны для построения геометрии. В действительности при доказательствах он ими пользовался, хотя и не формулировал их. Однако все это нисколько не умаляет роли Евклида, который первым показал, как можно и как нужно строить математическую теорию. Созданный им дедуктивный метод прочно вошел в математику. В этом смысле все последующие математики, вплоть до наших современников, являются учениками Евклида.

При построении дедуктивной системы геометрии выяснилось, что доказательства служат не только для того, чтобы установить истинность некоторого предложения, но и для выявления взаимосвязей между предложениями. Так, при анализе доказательства предложения о том, что сумма углов треугольника равна $2d$, оказалось, что оно зависит от V постулата Евклида, тогда как, например, теорема о том, что внешний угол треугольника больше каждого внутреннего, с ним не смежного, от этого постулата не зависит.

Таким образом, доказательства помогают уяснить существо, смысл математических предложений. В частности, можно в евклидовой геометрии выделить все те предложения, которые доказываются без постулата о параллельности, — они составляют так называемую *абсолютную* геометрию.

Постулат о параллельных и неевклидовы геометрии

Математики все время испытывали некоторую неудовлетворенность, связанную с постулатом о параллельности, который, как мы видели, формулировался довольно сложно. Казалось, что его можно доказать, вывести из других постулатов и аксиом. Начиная с глубокой древности и до конца XVIII в. многие геометры пытались доказать этот постулат как теорему.

Однако все доказательства V постулата, которые были придуманы, либо содержали прямую ошибку, либо опирались на новое предложение, которого не было среди постулатов и аксиом Евклида. При более тщательном анализе всегда оказывалось, что это новое предложение равносильно постулату о параллельности, т. е. из него можно вывести этот постулат и, наоборот, из V постулата можно получить это новое предложение. К началу XIX в. вопрос о V постулате казался безнадежно запутанным. Но как раз в 20-х годах прошлого века было получено совершенно неожиданное решение этого многовекового вопроса. Это решение было связано с совершенно новым взглядом на геометрию, к которому пришли независимо друг от друга три великих геометра: Н. И. Лобачевский, К. Ф. Гаусс и Я. Больяй.

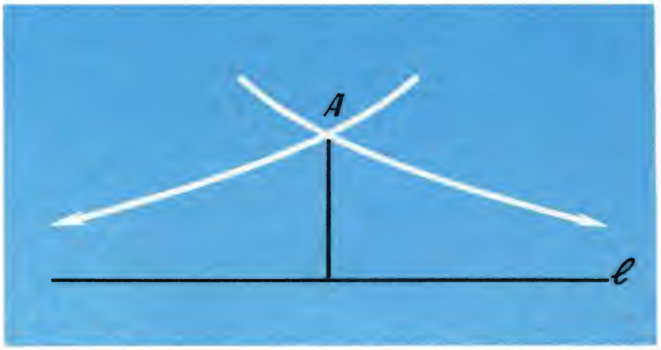
Впервые в печати решение вопроса появилось в работе Н. И. Лобачевского в 1829—1830 гг. (эта работа была доложена Лобачевским в Казанском университете еще в 1826 г.), и несколько позже — в 1832 г.— было опубликовано исследование Больяй. Гаусс вообще не опубликовал те смелые выводы, к которым пришел.

Новая идея, которая легла в основу решения, состояла в следующем: геометрия Евклида не является единственной возможной геометрией, можно построить и другие системы геометрии, столь же стройные и непротиворечивые, как евклидова. При этом и Н. И. Лобачевский и К. Ф. Гаусс были глубоко убеждены, что новая геометрия получит применение для описания и изучения геометрических свойств нашего пространства.

Такой взгляд противоречил двухтысячелетней традиции, благодаря которой сложилось убеждение, что геометрия Евклида столь же естественна, как смена дня и ночи, и что только она описывает пространственные отношения между реальными телами.

Как же строить новые геометрические системы? В XVIII в. геометры придумали новый способ доказательства V постулата. Они предполагали, что V постулат неверен, и старались прийти к противоречию, как это делается при доказательствах от противного. Действительно, если V постулат можно вывести из других постулатов и аксиом геометрии Евклида, т. е. он является теоремой, то предположение, что он неверен, должно было бы привести нас к противоречию. Однако, как ни пытались геометры получить противоречие, им этого сделать не удавалось. Они получали все новые и новые следствия; некоторые из них выглядели парадоксально, например: сумма углов треугольника у различных треугольников различна, но всегда меньше $2d$; линия, равноотстоящая от некоторой прямой (эквидистанта), сама не является прямой; не существует подобных треугольников и вообще подобных фигур. Однако ни одно из следствий не противоречило другому следствию и остальным аксиомам евклидовой геометрии.

Рис. 3.



Лобачевский, Гаусс и Больяй пришли к убеждению, что противоречия и не получится, потому что V постулат не является теоремой в евклидовой геометрии. Что же в таком случае представляют полученные следствия? Оказывается — теоремы новой геометрии! Таким образом, для построения новой геометрии нужно было заменить V постулат другим и вывести из новой системы постулатов и аксиом возможные следствия. Они-то и будут теоремами новой геометрии.

V постулату Евклида часто придают такую форму: через точку вне прямой в плоскости, определяемой этой точкой и этой прямой, можно провести только одну прямую, не пересекающую данную.

Если этот постулат не имеет места, то это означает, что: 1) либо можно провести по крайней мере две прямые, не пересекающие данную (рис. 3), 2) либо таких прямых не существует вовсе (т. е. вообще нет параллельных прямых).

Второе из этих предложений легко приводится к противоречию с другими аксиомами и постулатами Евклида. Первое же Н. И. Лобачевский выбрал в качестве постулата о параллельности. Он построил новую систему геометрии, которую называют теперь геометрией Лобачевского. При этом Н. И. Лобачевский показал, что геометрия Евклида может быть получена из этой новой геометрии.

Исследования Н. И. Лобачевского открыли новую эру в истории геометрии. Если до этого казалось, что в основном в геометрии все сделано уже самим Евклидом, то после создания неевклидовой геометрии открылись широкие возможности для новых геометрических изысканий.

В 60-х годах прошлого века немецкий математик Б. Риман предложил новый метод построения всех неевклидовых геометрий, в которых можно мерить длины, площади, углы, объемы (так называемых метрических геометрий). При этом он не ограничился случаем трехмерного пространства, а строил геометрии пространств любого числа измерений. Интересно отметить, что, в частности, он построил такую геометрию, в которой нет параллельных прямых. Конечно, для построения такой геометрии пришлось отказаться от некоторых других аксиом евклидовой геометрии.

Эту геометрию называют геометрией Римана (в узком смысле слова, в отличие от общих римановых геометрий). В этой геометрии, так же как в геометрии Лобачевского, нет подобных фигур, но сумма углов треугольника в ней всегда больше $2d$, а длины прямых линий ограниченны.

Были предложены и другие методы построения новых геометрий.

Но в связи с новыми геометриями встали и другие вопросы: геометрия Лобачевского отличается от евклидовой постулатом о параллельности. Что будет, если заменять и другие постулаты? Всегда ли при этом будут получаться новые системы геометрии? В каких случаях новые системы будут непротиворечивыми, т. е. в них нельзя доказать некоторую теорему и одновременно доказать, что эта теорема неверна?

Для ответа на эти вопросы ученые прежде всего вновь обратились к исследованию геометрии Евклида с тем, чтобы найти все аксиомы, нужные для ее построения, а затем уже изучить связи между этими аксиомами, посмотреть, что будет, если отбросить одну или несколько из них и заменить другими. Многие математики конца прошлого века занимались этой проблемой, но впервые ее удалось решить немецкому математику Д. Гильберту в 1899 г. В его книге «Основания геометрии» была изучена первая полная система аксиом геометрии Евклида и исследованы вопросы, о которых мы говорили выше. Это направление исследований способствовало развитию современного аксиоматического метода, значение которого трудно переоценить.

Неевклидовы геометрии открыли новую эру не только в математике, но и в физике. Как и предвидели их создатели, эти геометрии сделались незаменимым математическим аппаратом многих важнейших частей современной физики, особенно теории относительности.

Более подробно о новых геометриях вы можете узнать из статьи «О различных геометриях».

Итак, мы видим, что возникновение геометрии как науки далеко не закончилось построением системы евклидовой геометрии. Это было только начало, блестящее продолжение которого осуществилось в XIX в. В настоящее время геометрия представляет собой большую, широко разветвленную науку, тесно связанную со всеми остальными разделами математики.

Геометрические преобразования

Что такое геометрия

Прежде чем завести разговор о геометрических преобразованиях, остановимся на вопросе о самом содержании предмета геометрии. Впоследствии мы увидим, что к понятию геометрического преобразования этот вопрос имеет самое непосредственное отношение.

Геометрия изучает свойства плоских фигур и пространственных тел. Однако в геометрии рассматриваются вовсе не все свойства фигур или тел. Ясно, например, что цвет или вес тела для геометра безразличен — геометрические свойства куба останутся одними и теми же независимо от того, идет ли речь о металлическом кубе или о кубе, сделанном из фанеры и окрашенном в красный цвет. (Заметим, что *физические* свойства этих двух кубов во многом будут различны.) Так же и расстояние от вершины изображенного на доске треугольника до края доски не интересует геометра. Один из двух равных между собой треугольников (рис. 1) расположен заметно ближе к краю MN доски, чем второй; однако все *геометрические* свойства этих треугольников — длины их соответственных сторон, величины углов, высóты, медианы, площади, радиусы вписанной и описанной окружностей, расстояние от центра описанной окружности до точки пересечения медиан и т. д.— будут одинаковыми. Как же охарактеризовать тот круг свойств фигур и тел, который интересует геометра?

Все свойства тел, которые рассматриваются в геометрии, полностью определяются *формой* и *размерами* тела и никак не зависят от его расположения. Другими словами, это означает, что каждые две *равные* фигуры или два *равных* тела обладают в точности теми же самыми геометрическими свойствами; поэтому геометр не может иметь никаких оснований для того, чтобы как-либо различать эти фигуры или тела. Это обстоятельство подразумевается и в самом названии «равные тела». Так, например, говорят, что *задача построения треугольника ABC по двум сторонам $BC=a$ и $AC=b$ и углу $ACB=\gamma$ имеет единственное решение* (рис. 2). На самом деле существует, конечно, очень много (даже бесконечно много!) треугольников, имеющих две стороны длин a и b и заключенный между ними угол величины γ (рис. 3). Однако все эти треугольники *равны* между собой, поэтому мы их принимаем за *один* треугольник.

Вспомним теперь, какие фигуры или тела считаются в геометрии равными. Две фигуры F и F' (рис. 4)

Рис. 1 (верхний). Рис. 3 (второй снизу).

Рис. 2 (второй сверху). Рис. 4 (нижний).

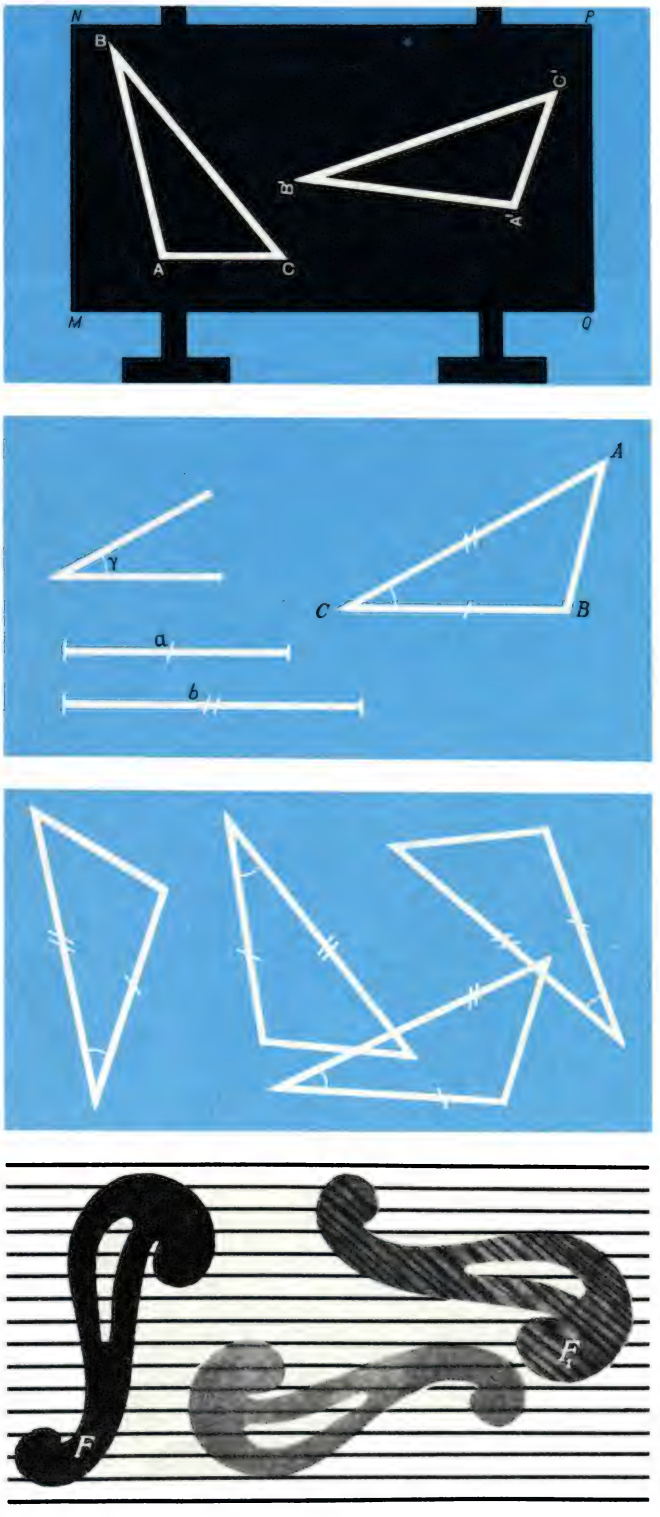


Рис. 5 (левый). Параллельный перенос.

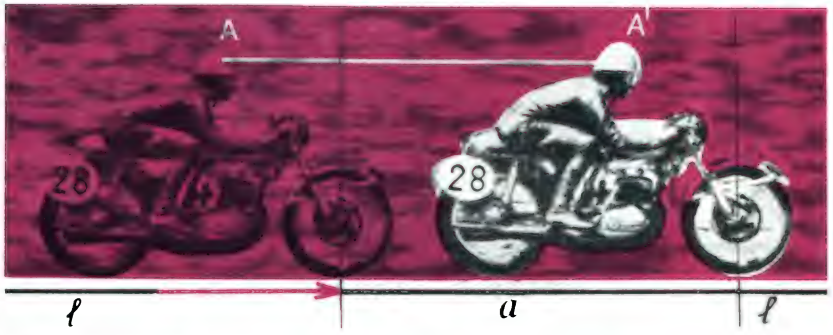
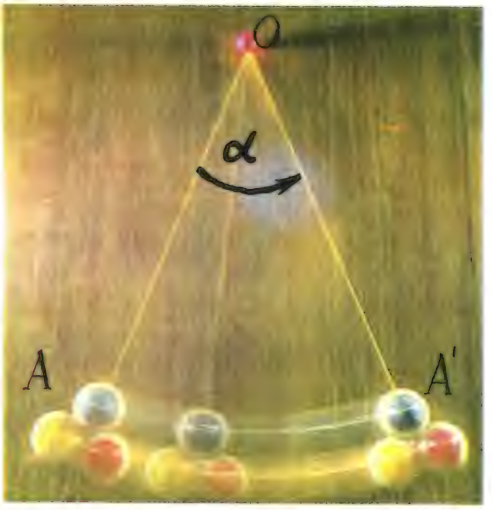


Рис. 6 (правый). Поворот вокруг точки O на угол α.

Рис. 7 (нижний). Симметрия относительно точки O.



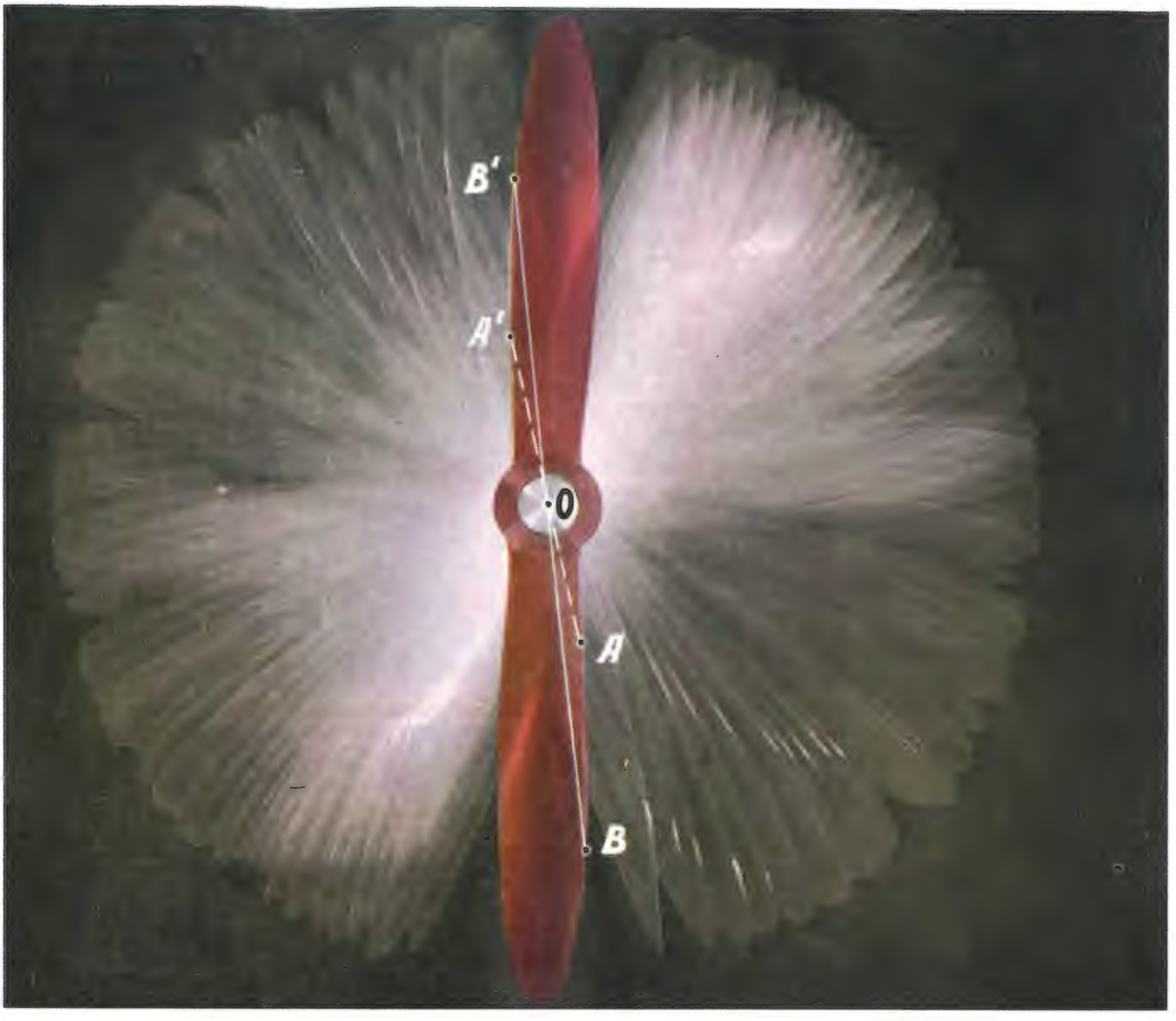


Рис. 8 (верхний). Симметрия относительно прямой l.

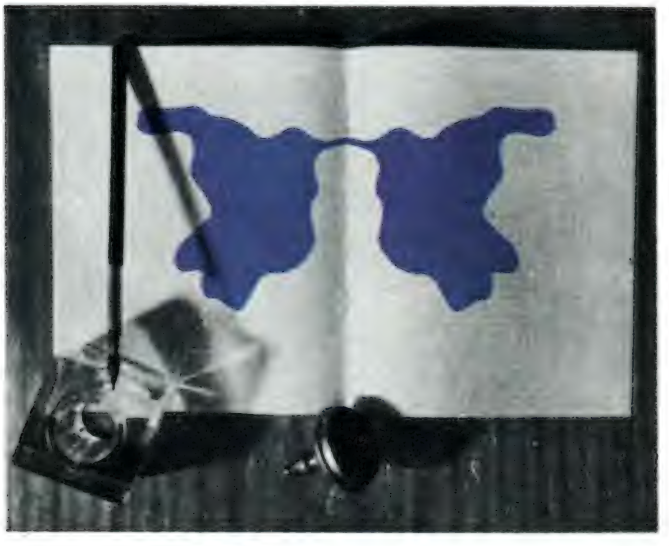


Рис. 9 (нижний). Симметричные фигуры.

называются *равными* (или *конгруэнтными*), если при наложении одной из них на другую они совпадают всеми своими точками, другими словами — если *существует движение, при помощи которого можно совместить фигуру F с фигурой F'*. Таким образом, само определение равенства фигур (или тел) связано с понятием движения. Учитывая определение равенства фигур, мы можем сказать, что фигуры, получающиеся одна из другой движением, считаются в геометрии одинаковыми, не различаются между собой; все геометрические свойства одной из этих фигур совпадают с геометрическими свойствами другой фигуры. Последнее обстоятельство можно принять за предварительное *определение* геометрических свойств, т. е. тех свойств фигур и тел, которые изучаются геометрией: *геометрия изучает свойства фигур и тел, которые сохраняются при движениях.*

Движения

Приведем примеры *движений* плоских фигур.

Параллельным переносом называется движение, при котором фигуру как целое перемещают в определенном направлении, не поворачивая ее.

Параллельный перенос характеризуется направлением, которое задается указанием некоторой прямой l с поставленной на этой прямой стрелкой и расстоянием a, на которое переносятся фигуры. Каждую точку A параллельный перенос переводит в такую точку A', что $AA' \parallel l$ (причем направление от точки A к точке A' совпадает с тем, которое указано стрелкой на прямой l) и $AA' = a$ (рис. 5).

Поворот вокруг точки O на угол α характеризуется тем, что каждая точка A переходит в такую точку A', что $OA = OA'$ и $\angle AOA' = \alpha$ (рис. 6); при этом должно быть указано также и направление поворота, которое может совпадать с направлением вращения часовой стрелки или быть противоположно ему. Поворот вокруг точки O на угол 180° называется также *симметрией относительно точки O;* здесь каждая точка A переходит в такую точку A', что O есть середина отрезка AA' (рис. 7).

Еще один важный пример движения представляет собой *симметрия относительно прямой l;* это движение можно реализовать, перегнув лист бумаги по прямой l. Симметрия относительно прямой l переводит каждую точку A в такую точку A', что отрезок AA' перпендикулярен прямой l и делится этой прямой пополам (рис. 8). Каждый легко может получить симметричные фигуры, сделав кляксу на листе бумаги и затем перегнув лист (рис. 9).

Эти примеры достаточно хорошо характеризуют содержание понятия «движение». *Каждое движение задается указанием определенного закона или правила, указывающего, как найти точку A'*, в которую это движение переводит произвольную точку A. На рис. 10 перечислены правила, относящиеся к указанным выше движениям. Вообще, *задание правила, позволяющего перейти от произвольной точки A к новой точке A'* (которая может и совпадать с исходной точкой A), определяет *геометрическое преобразование.*

Под *фигурой* в геометрии понимают совокупность (или множество) точек; так, окружность с центром O и радиусом r есть совокупность таких точек M, что $OM = r$ (рис. 11); отрезок с концами A и B есть совокупность таких точек M, что $AM + MB = AB$ (рис. 12); прямую можно охарактеризовать как совокупность таких точек M, что $AM = BM$, где точки A и B заданы (рис. 13).

Геометрическое преобразование переводит каждую точку A, входящую в состав фигуры F, в новую

Рис. 10. Правила, по которым точка A переводится в точку A'.

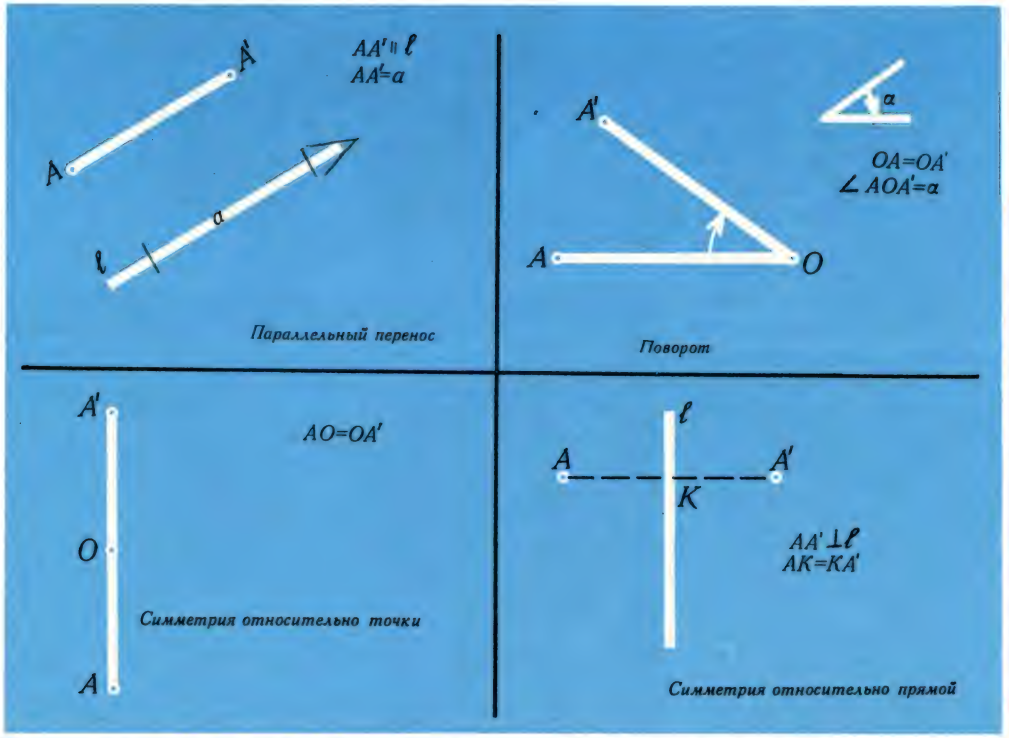
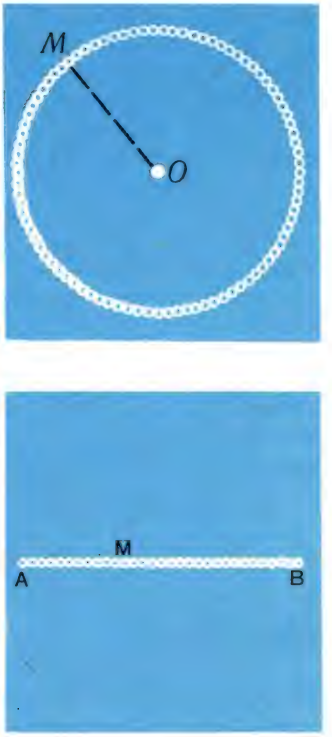
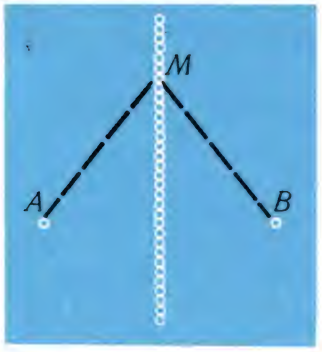


Рис. 11 (верхний).

Рис. 12 (нижний).





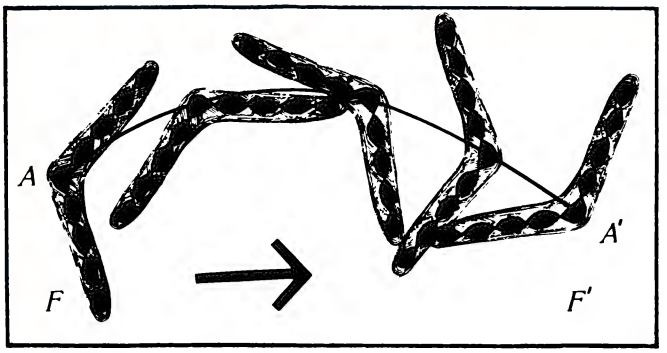


Рис. 13 (левый).
Рис. 14 (правый).

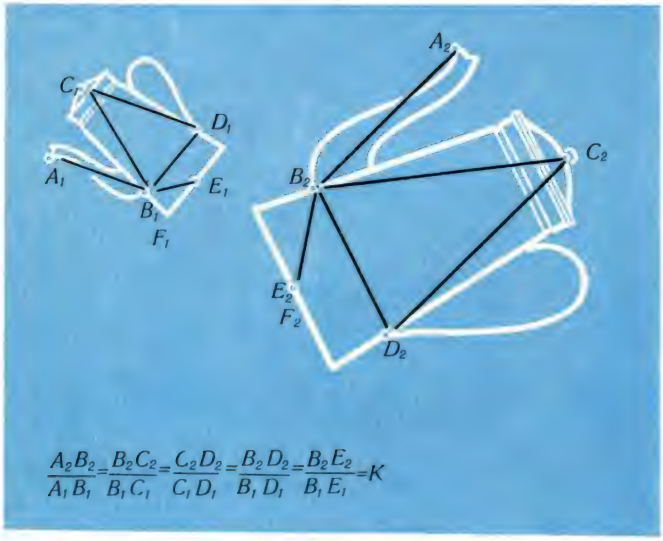
точку A'. При этом совокупность точек фигуры F переходит в некоторую новую совокупность точек, образующую фигуру F'. Про фигуру F' говорят, что она *получается рассматриваемым преобразованием* из фигуры F (рис. 14).

Движения представляют собой простейшие геометрические преобразования — такие, которые переводят каждую фигуру F в равную ей фигуру F', т. е. сохраняют форму и размеры фигур. Можно определить движения как геометрические преобразования, *сохраняющие расстояния между точками:* если точки A и B движение переводит в точки A' и B', то $A'B'=AB$.

Преобразования подобия

Преобразования, сохраняющие форму фигур, но, возможно, изменяющие их размеры, называются *преобразованиями подобия*. Каждую фигуру F преобразование подобия переводит в *подобную* ей фигуру F', представляющую собой увеличенную или уменьшенную копию первоначальной фигуры; все размеры фигуры F' равны соответствующим размерам фигуры

Рис. 15, 16. Подобные фигуры.



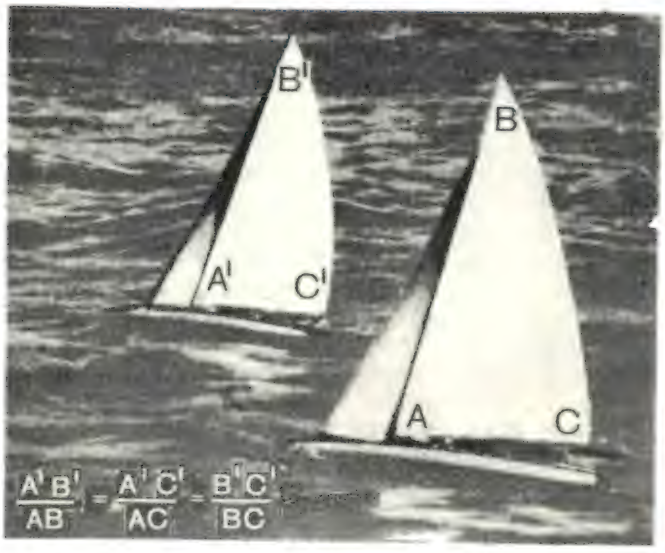
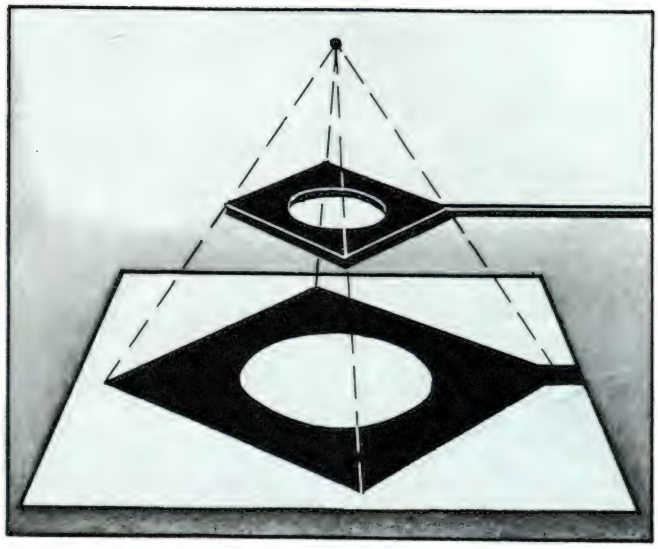
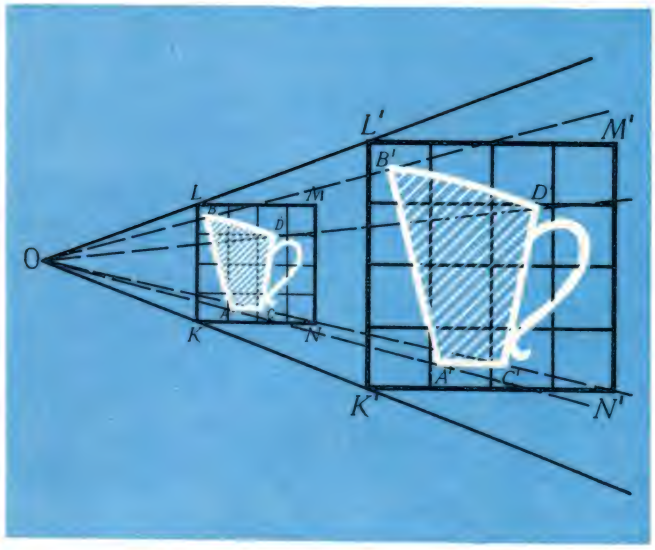


Рис. 17 (верхний). Подобные фигуры можно получить и так.
Рис. 18 (нижний). Гомотетия с центром O.

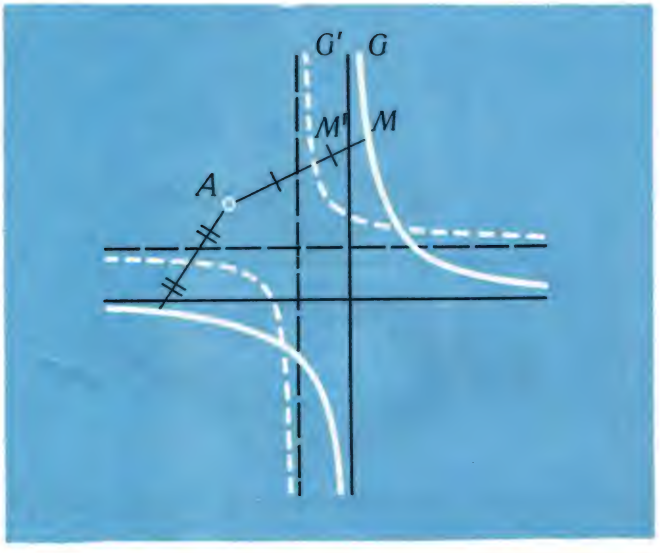




F, умноженным на одно и то же число k (рис. 15, 16). Это число называется *коэффициентом подобия* двух фигур. Подобные фигуры можно получить, например, поместив под лампой вырезанную из куска картона фигуру F, плоскость которой параллельна поверхности стола; в таком случае тень F', отбрасываемая этой фигурой на стол, будет подобна фигуре F (рис. 17). Более «математический» пример преобразования подобия представляет собой *гомотетия* с центром O и коэффициентом k, переводящая каждую точку A в такую точку A' луча OA, что $\frac{OA'}{OA}=k$ (рис. 18).

Некоторые свойства фигуры F', подобной фигуре F, будут отличаться от свойств фигуры F; так, например, гомотетия с коэффициентом 2 переводит фигуру $ABDC$ в фигуру $A'B'D'C'$, площадь которой в 4 раза больше площади фигуры $ABDC$ (рис. 18). Но большинство свойств фигуры F' будет совпадать со свойствами фигуры F: так, все имеющиеся на фигуре F' углы будут равны соответствующим им углам, имеющимся на фигуре F; отношение расстояний между какими-либо точками фигуры F' будет равно отношению расстояний между соответственными точками фигуры F $\left(\text{скажем, } \frac{AB}{CD}=\frac{A'B'}{C'D'}\right)$ и т. д.

Рис. 19.



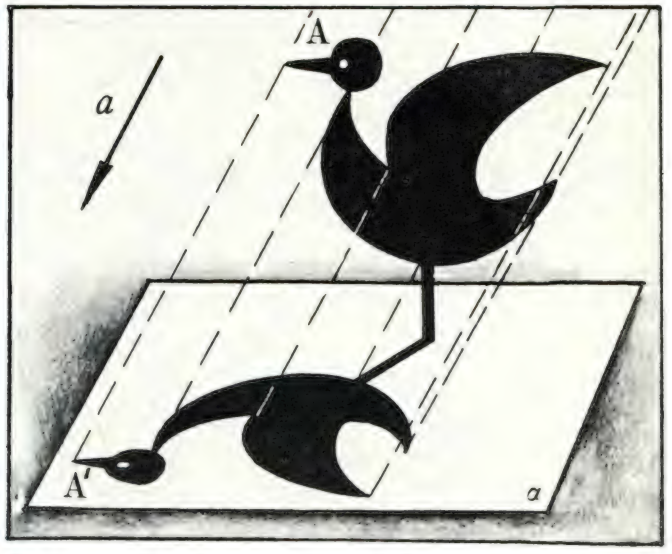
Таким образом, преобразования подобия меняют свойства геометрических фигур очень мало: окружность они переводят снова в окружность, квадрат — в квадрат, равнобедренный треугольник с углом при вершине в 40° — снова в равнобедренный треугольник с углом при вершине в 40°.

Эти свойства преобразований подобия иногда могут быть использованы для решения содержательных геометрических задач. Поставим, например, такую задачу: определить, что представляет собой множество середин всех отрезков AM, где точка A фиксирована, а точка M пробегает, скажем, равностороннюю гиперболу G (график обратной пропорциональной зависимости). Очевидно, что искомое множество точек M' образует фигуру G', гомотетичную гиперболе G с центром гомотетии A и коэффициентом гомотетии $^1/_2$. Отсюда следует, что это будет точно такая же гипербола, только в 2 раза «меньшая» (такая, что расстояние между двумя точками гиперболы G' в 2 раза меньше расстояния между соответствующими точками гиперболы G; рис. 19).

Линейные преобразования

Рассмотрим тень, отбрасываемую на солнце вырезанной из картона фигурой F на плоскость α, не обязательно параллельную этой фигуре (рис. 20). Геометрически переход от фигуры F к ее тени F' описывают как *параллельное проектирование*, переводящее каждую точку A фигуры F в такую точку A' плоскости α, что $AA' \| a$, где a — заданная прямая, характеризующая направление проектирования (ибо лучи солнца можно считать параллельными).

Рис. 20.



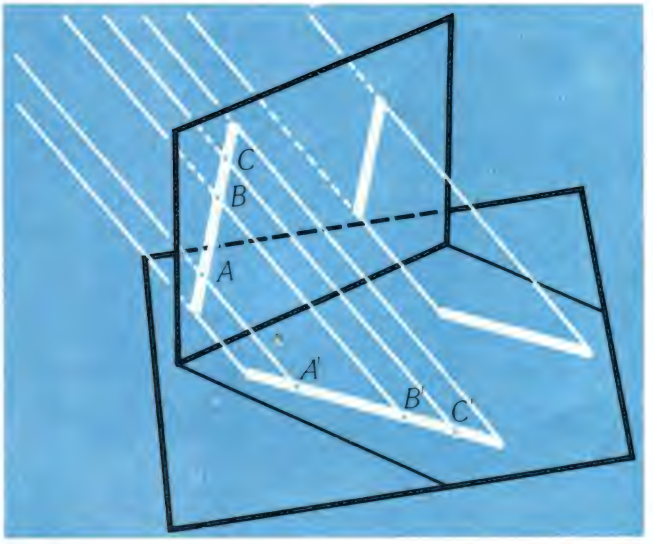
Фигура F' может значительно отличаться от первоначальной фигуры F; так, каждый знает, насколько сильно искажены на тени истинная форма и размеры предметов, если солнце стоит достаточно низко (рис. 21). Однако некоторое сходство между фигурой F и ее тенью F' и тут сохранится. Так, например, *каждая прямая, проведенная в плоскости фигуры F, перейдет снова в прямую линию* (рис. 22); *параллельные прямые перейдут в параллельные прямые; отношение длин отрезков, принадлежащих одной прямой* (но не разным прямым!), *при параллельном проектировании сохранится* $\left(\text{см. рис. 22, где } \frac{AB}{BC}=\frac{A'B'}{B'C'}\right)$. Квадрат параллельное проектирование уже не переведет в квадрат; однако оно переведет его в *параллелограмм*, который отличается от квадрата не так уж резко.

Геометрические преобразования, обладающие такими свойствами, называются *линейными преобразованиями*. К числу линейных преобразований относится, например, так называемое *сжатие к прямой l*, которое описывается так: точку A плоскости сжатие к прямой l переводит в такую точку A', что точки A и A' лежат на одном перпендикуляре к прямой l и $\frac{PA'}{PA}=k$, где P — основание перпендикуляра (рис. 23). Постоянное число k называется *коэффициентом сжатия* к прямой (при $k>1$ было бы правильнее говорить о «растяжении» от прямой l). Нетруд-

Рис. 21.

Рис. 22 (верхний). Параллельное проектирование.

Рис. 23 (нижний). Сжатие к прямой.



но убедиться, что сжатие к прямой также переводит прямую линию снова в прямую; параллельные прямые переводит в параллельные; сохраняет отношения длин отрезков, принадлежащих одной прямой.

Знание свойств, сохраняющихся при линейных преобразованиях, позволяет использовать эти преобразования для доказательства некоторых геометрических теорем. Разумеется, квадрат $ABCD$ и получающийся из него параллельным проектированием параллелограмм $A'B'C'D'$ имеют много разных свойств; однако те свойства, которые сохраняются при линейных преобразованиях, совпадают у квадрата и у параллелограмма. Выберем произвольную точку E на диагонали AC квадрата $ABCD$ и проведем через нее отрезки $MN \| AB$ и $PQ \| BC$ (рис. 24, *а*). Нетрудно видеть, что прямая AC явится *осью симметрии* полученного чертежа; поэтому прямые MQ и PN (симметричные относительно прямой AC!) пересекутся на прямой AC. А отсюда вытекает, что и *отрезки* $M'N' \| A'B'$ *и* $P'Q' \| B'C'$, *пересекающиеся на диагонали* $A'C'$ *параллелограмма* $A'B'C'D'$, *отсекают от параллелограмма меньшие параллелограммы* $M'D'Q'E'$ *и* $N'B'P'E'$, *диагонали* $M'Q'$ *и* $P'N'$ *которых пересекаются на прямой* $A'C'$ (рис. 24, *б*). Доказать это, не пользуясь линейными преобразованиями, было бы затруднительно!

Рассмотрим еще и такой пример. Ясно, что *каждый* треугольник ABC можно параллельным проектированием перевести в *равносторонний* треугольник ABC' (рис. 25; треугольники ABC' и ABC расположены в разных плоскостях; CC' — направление проектирования). При этом медианы треугольника ABC переходят в медианы треугольника ABC' (это следует

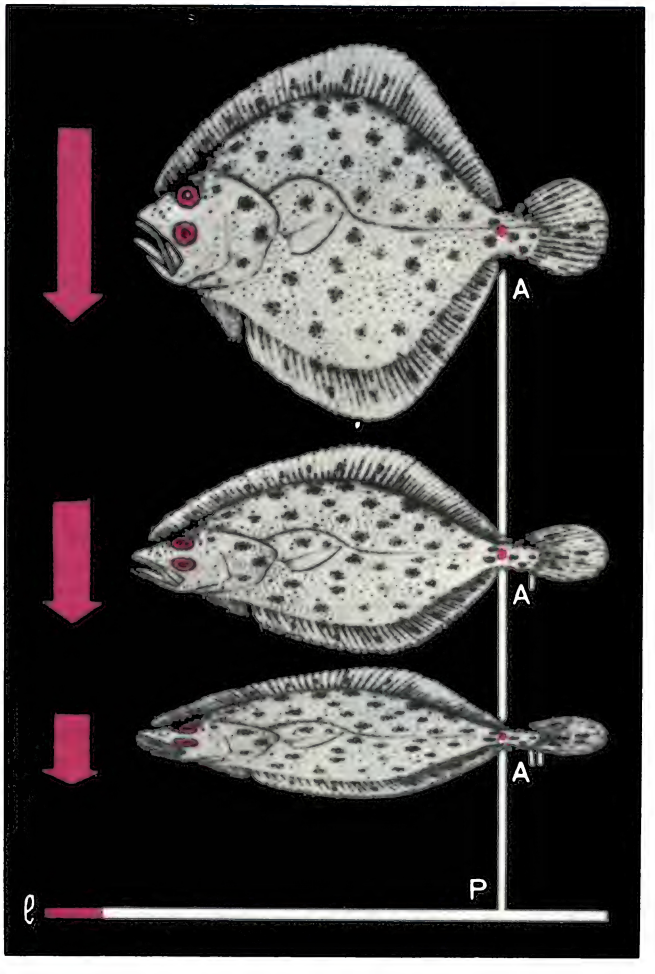


Рис. 24.

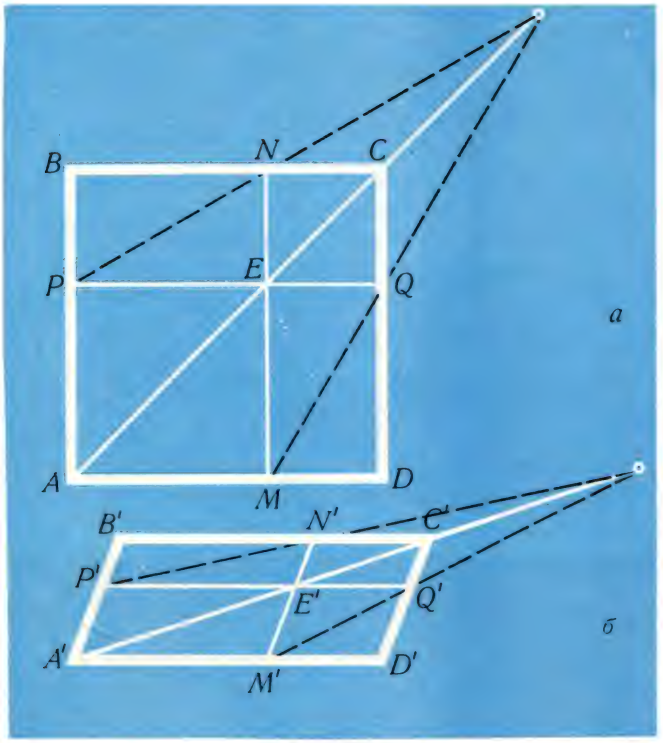
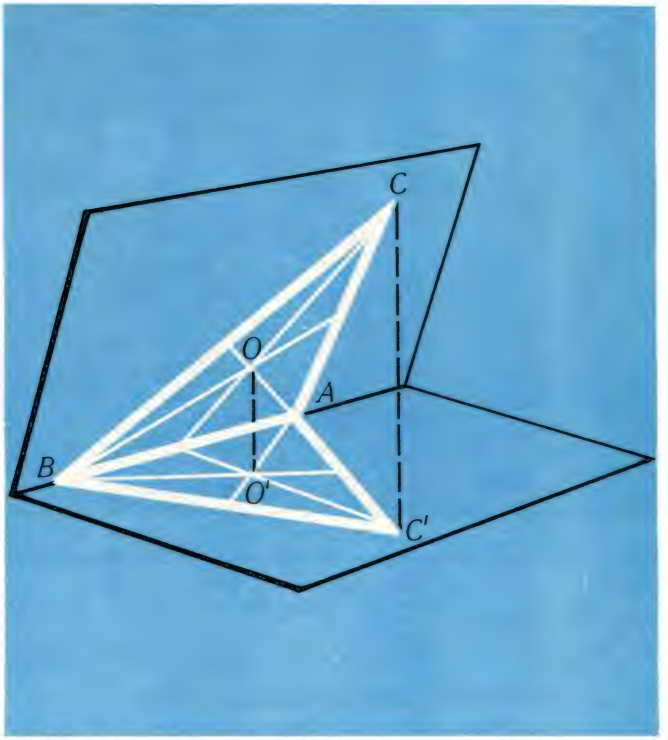


Рис. 25.



Поищем числа-«самородки»

Возьмем какое-нибудь целое положительное число, например 13. Прибавим сумму его цифр, тогда образуется число 17. К этому результату тоже прибавим сумму его цифр, образуется число 25. Продолжая так действовать, получим последовательность чисел:

13, 17, 25, 32, 37, 47, ...

Прежде всего давайте выясним, можно ли полученную последовательность продолжить влево, т. е. существует ли число, которое в сумме с его же цифрами дало бы 13? Пробуем 12:

$12+3=15$ — плохо.

Пробуем 11:

$11+2=13$ — хорошо.

Значит, перед числом 13 в нашей последовательности должно быть число 11. А перед ним? Попробуем 10:

$10+1=11$ — хорошо.

А перед числом 10? Здесь и без пробы ясно, что числу 10 будет предшествовать 5. В самом деле:

$5+5=10$.

Но уже для числа 5 нет предшественника среди целых положительных чисел. Таким образом, в последовательности

5, 10, 11, 13, 17, 25, ...

все числа, кроме пятерки, «сформированы» по единому правилу, а число 5 оказалось как бы «самородком».

Отправимся в поиски других «самородков», аналогичных числу 5.

Однозначные «самородки» обнаруживаются сразу. Это, очевидно,

1, 3, 5, 7 и 9.

Из двузначных наименьшим «самородком» будет число 20. (Легко убедиться, что ни одно из чисел от 1 до 19 в сумме с его же цифрами не образует 20.) Следующий двузначный «самородок» — число 31. (Убедитесь!)

А сколько же всего двузначных «самородков»? Выясните самостоятельно. (Ответ на стр. 331.)

Есть «самородки» и среди многозначных чисел, например: 132, 143, 233, 929, 1952, 874 531 и т. д.

Не так-то легко было выявить их!

Магический шестиугольник

В этом шестиугольнике образовалось 19 узловых точек. Вот и расставьте в этих точках 19 натуральных чисел от 1 до 19 так, чтобы вдоль каждой стороны и вдоль каждого внутреннего прямолинейного отрезка сумма чисел равнялась 38 (должно получиться 15 одинаковых сумм по 38).

Ответ на стр. 331.

Феликс Клейн.

из свойств параллельного проектирования). Но медианы равностороннего треугольника являются одновременно и биссектрисами; поэтому они пересекаются в одной точке — центре окружности, вписанной в треугольник ABC'. А отсюда следует, что также и *медианы исходного треугольника ABC пересекаются в одной точке*. Это доказательство теоремы о точке пересечения медиан треугольника является, вероятно, простейшим!

Преобразования как основа классификации теорем

Немецкий математик Ф. Клейн в конце прошлого столетия предложил положить геометрические преобразования в основу классификации всех свойств геометрических фигур и тел. Он предложил различать геометрические свойства по тем преобразованиям, при которых эти свойства сохраняются. К одной группе при этом будут относиться те свойства, которые сохраняются лишь при *движениях* фигур; сюда относятся все свойства, связанные с расстояниями между точками, и все теоремы, в которых фигурируют длины или площади (например, теорема: «Площадь треугольника равна половине произведения длины основания на длину опущенной на основание высоты»). В другую группу попадут свойства, сохраняющиеся при *преобразованиях подобия*, например все свойства, связанные с величинами углов; к этой группе свойств относится, скажем, известное свойство прямоугольного треугольника с углом в 30° (ведь отношение длины гипотенузы к длине меньшего катета также сохраняется при преобразованиях подобия!). Еще одну группу составят свойства геометрических фигур, сохраняющиеся при *линейных преобразованиях*. Так как линейные преобразования изменяют свойства фигур сильнее, чем движения, то свойства, сохраняющиеся при этих преобразованиях, следует считать более глубокими; с этой точки зрения свойство треугольника, выражаемое теоремой: «Медианы треугольника пересекаются в одной точке», оказывается более глубоким, чем, скажем, аналогичное свойство высот треугольника.

Еще более глубокими следует считать те свойства фигур, которые сохраняются при центральном проектировании фигуры с одной плоскости на другую (см. рис. 17, где теперь мы можем считать плоскость фигуры не параллельной той плоскости, на которую она отбрасывает тень), очень сильно изменяющем фигуру.

Такая классификация геометрических теорем (Клейн даже говорил об отдельных «геометриях», охватывающих изучение свойств фигур, сохраняющихся при тех или иных преобразованиях) поясняет сказанное выше об использовании геометрических преобразований для доказательства теорем. Все свойства, сохраняющиеся при линейных преобразованиях, будут одинаковы для квадрата и для параллелограмма; поэтому при рассмотрении их мы всегда можем ограничиться изучением квадрата, являющегося частным случаем параллелограмма. Точно так же при изучении соответствующих свойств треугольника мы можем считать его равносторонним, что в ряде случаев может заметно упростить доказательство (ср. с выводом выше теоремы о точке пересечения медиан треугольника). Таким образом, точка зрения Клейна, выделяющая ряд отдельных ветвей геометрии, может существенно помочь при изучении свойств геометрических фигур.

О различных геометриях

Всем хорошо известно, что выводы элементарной (школьной) геометрии находят широкое применение при решении самых разнообразных практических задач. Знание геометрии необходимо слесарю, инженеру, ученому — всем, кому приходится исследовать свойства различных фигур и тел. Как же геометрия изучает наш реальный мир? Каждому, по-видимому, приходится слышать выражения «с математической точностью», «как дважды два — четыре». Этими словами обычно принято характеризовать абсолютно точное и неоспоримое. Ниже мы попытаемся выяснить, с какой точностью геометрические теоремы отражают действительное положение вещей в нашем мире. Действительно ли эта точность беспредельна?

Для того чтобы ответить на эти вопросы, нам понадобится внимательно проанализировать, как строится наука геометрия и как эта наука изучает реальный мир.

С чего начинается изучение геометрии

В учебнике геометрии изучаются геометрические объекты различной сложности: треугольники, трапеции, параллелограммы, призмы, пирамиды, сферы и т. п., которые должны быть точно охарактеризованы. Это делается в так называемых *определениях*. Для того чтобы полностью разобрать то или иное произвольно взятое определение, надо знать определения, изложенные в учебнике ранее. Например, чтобы понять определение трапеции, надо заранее знать определение параллельности прямых, определение четырехугольника, а для этого знать определение отрезка. Последнее требует знания того, что такое прямая и точка.

Всякое другое определение точно так же в конце концов приводит нас к первой странице учебника геометрии, где мы надеемся найти определения основных геометрических понятий: точки, прямой, плоскости.

Но, увы, нас ожидает разочарование. Оказывается, что и здесь нет точных математических определений точки, прямой и плоскости. В то же время все дальнейшие определения, которые опираются на эти основные геометрические понятия, сформулированы с полной математической строгостью. Такое положение на первый взгляд может показаться весьма странным.

Правда, в начале учебника даются некоторые пояснения того, что же мы понимаем под точкой, прямой и плоскостью. Пояснения эти, однако, ни в какой мере не могут служить точными математическими определениями. Кроме того, эти пояснения нигде далее в геометрии не используются. Они совершенно не нужны для доказательства теорем. Важным является лишь указание на то, что в дальнейшем будут изучаться именно точки, прямые и плоскости.

Что же такое точка, прямая и плоскость?

Отметим сразу же, что нигде в природе не встречаются точки, прямые и плоскости.

Представим себе шарик малого диаметра, скажем в 1 мм. Уменьшим его диаметр вдвое, втрое, ..., в тысячу раз и т. д. Наступит ли момент, когда уже весьма малый шарик можно будет назвать точкой? Нет!

Учитель ставит на доске весьма «жирную» точку. Ученики рисуют в тетради тоже весьма крупные точки. На самом же деле каждый раз изображаются маленькие кружочки. Но точки ли это? Звезды на небе тоже нам представляются точками, хотя некоторые из них во много раз больше Солнца. А если представить себе шарик столь малым, что его нельзя увидеть ни в один современный микроскоп, — будет ли это точка? Опять нет.

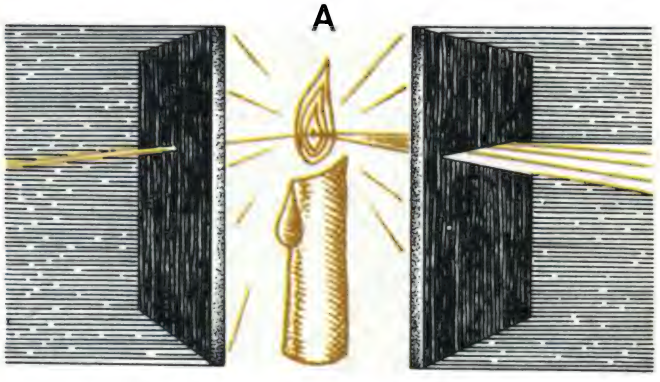
Дело в том, что точка — это не какой-то конкретный предмет. Точка — это *абстрактное понятие*, которое образовано нашим сознанием в результате длительного изучения весьма малых (или кажущихся малыми при определенных условиях) реальных объектов — шариков, кружочков и т. п. Это абстрактное понятие точки наделяется нами целым рядом свойств, общих для тех конкретных предметов, в результате наблюдения над которыми и возникло понятие точки.

Обратимся теперь к понятию прямой. На бумаге изображена линия. Прямая ли она? Как в этом убедиться? Надо приложить линейку, сравнить линию с краем линейки. Но при этом возникает вопрос: прямая ли наша линейка? Каждому, вероятно, приходилось видеть столяра, который для проверки прямизны выструганной планки рассматривает ее так, как показано на рис. 1. Если линейка не прямая, на ней есть изъяны, это будет видно на свет. Таким образом, проверяя прямизну сделанной линейки, ее сравнивают с лучом света. Точно так же обстоит дело и с туго натянутой нитью, которую практически считают прямой. Чтобы убедиться, что нить хорошо натянута и не провисает, надо опять-таки взглянуть вдоль нити, т. е. (как и планку) сравнить ее с лучом света.

Значит, можно сказать, что луч света является эталоном прямой. На первый взгляд все хорошо. Но на самом деле нигде в природе не встречается то, что мы мыслим себе «одним лучом света».

Рис. 1. Проверка прямизны планки.

Рис. 2. Представление о прямой и о плоскости дают луч света, проходящий через малое отверстие, и пучок света, проходящий через узкую прямолинейную щель.



Допустим, что свет небольшого источника A пропускают сквозь малое отверстие (на рис. 2 слева). Получится узкий пучок света. Представим себе, что отверстие все время уменьшается и источник света тоже уменьшается. Тогда пучок, исходящий из отверстия, будет становиться все у́же и у́же. Конечно, этот пучок никогда не станет лучом, если бы даже и можно было его сделать сколь угодно узким. (В этом мысленном «идеальном» эксперименте мы умышленно не учитываем возникающие здесь физические явления: дифракцию, преломление и т. п.) Вот если бы источник света A был точкой и отверстие тоже было точкой, тогда пучок стал бы лучом. Но ведь мы говорили о том, что в реальном мире точек не бывает. Значит, не бывает и отдельных лучей. Таким образом, и луч (прямая) является абстрактным понятием, хотя и имеет весьма реальную природу и физическое происхождение. Как и в случае точки, рисуя на бумаге прямую, мы только создаем реальный образ — рисунок, стремясь в той или иной (нужной нам) мере сделать его похожим на те физические объекты, из которых произошло, выкристаллизовалось понятие прямой. И здесь, как и в случае точки, абстрактное понятие прямой мы наделяем всеми свойствами, общими для тех конкретных предметов, в результате наблюдения над которыми возникло само понятие прямой.

Точно так же обстоит дело и с плоскостью. Представим себе, что свет источника A пропускают сквозь узкую прямолинейную щель (рис. 2). Прямизна щели может быть, например, в нужной нам мере проверена при помощи эталона — луча света так, как указано выше. Получится изображенный на рисунке пучок света. Если бы удалось уменьшить источник до «идеальной» точки и сузить щель до «идеальной» прямой, тогда пучок света стал бы «идеальной» плоскостью. Здесь применимы все рассуждения, приведенные в случае прямой, и мы не будем их повторять.

Как применяется геометрическая теория

Итак, в геометрии изучаются свойства абстрактных понятий — точки, прямой, плоскости. Эти свойства формулируются и доказываются в так называемых *теоремах*. Доказательство же всех теорем основано в конечном счете на некоторых *аксиомах*, которые никак не доказываются. Подробнее о том, как выбираются аксиомы, каким требованиям должен удовлетворять этот выбор, рассказано в статье «Как возникла геометрия».

Наиболее ранняя из дошедших до нас систем аксиом была построена Евклидом (III в. до н. э.). Аксиоматика (система аксиом), данная Евклидом, была, правда, далеко не безупречной. Строгое современное изложение евклидовой геометрии было дано лишь в конце XIX в.; оно базируется на двух десятках аксиом, которые мы здесь перечислять не будем. Все теоремы геометрии лишь с той точностью описывают реальный мир, с какой аксиомы правильно отражают действительное положение вещей.

Существо дела заключается в следующем. Пусть, например, мы рассматриваем распространение света в природе, так сказать «световые лучи». Они ведут себя в соответствии с действующими физическими законами. И вот геометры-математики выбирают некоторые обнаруженные в опытах особенности распространения света и объявляют их аксиомами, при-

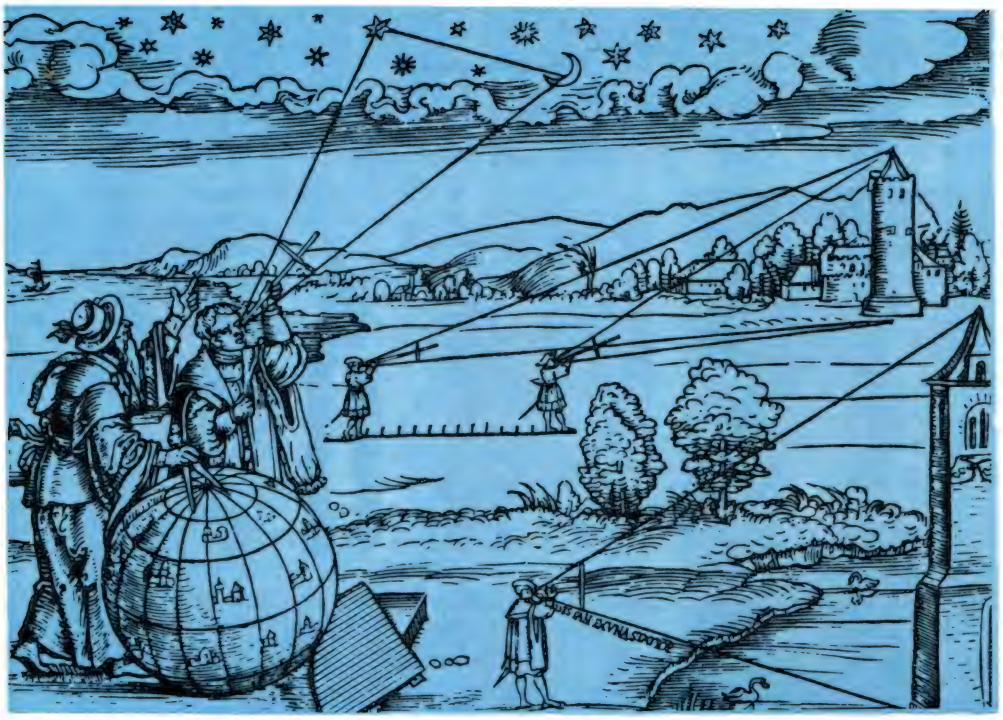


Рис. 3. Со старинной гравюры.

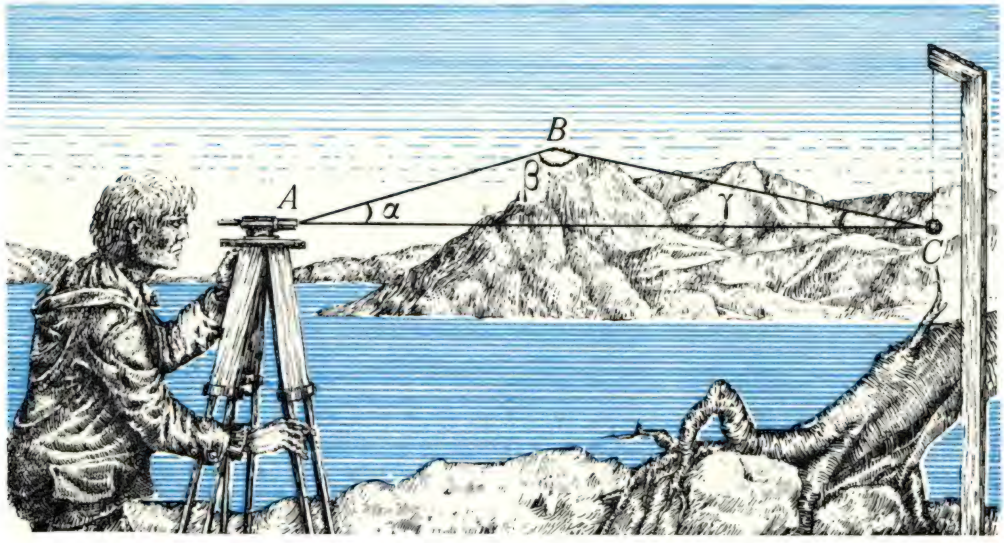


Рис. 4. Измерение расстояния между пунктами A и B, разделенными рекой.

сущими абстрактным понятиям точки, прямой, плоскости. На базе выбранных аксиом и строят математическую науку геометрию. Эта геометрия является как бы мысленным слепком с действительного мира. Изучение этого слепка позволяет обнаруживать закономерности реального мира уже не путем непосредственных измерений, а мысленно, геометрически (т. е. на слепке).

Чтобы подробнее пояснить это, рассмотрим, например, задачу об определении расстояния между пунктами A и B, разделенными рекой (рис. 4). Понятно, что прямое измерение расстояния AB практически неосуществимо. (Еще труднее найти расстояние между звездами.) Для решения подобных задач необходима геометрия. Как же найти расстояние AB с помощью геометрии? Укажем два способа решения этой задачи.

Первый способ. Выберем на местности еще один пункт C так, чтобы расстояние AC можно было непосредственно измерить. Найдя AC, измерим с помощью какого-либо угломерного инструмента (скажем, теодолита) поочередно углы α и γ (положим для определенности, что они оказались острыми).

Теперь, уже мысленно, рассмотрим абстрактный треугольник ABC, у которого задана сторона AC и углы α и γ. Мы можем для наглядности нарисовать

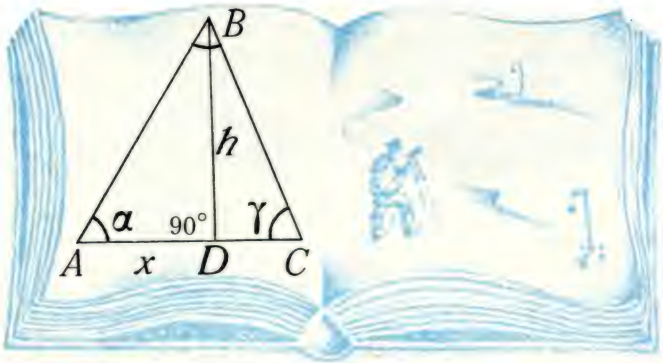


Рис. 5 (верхний).

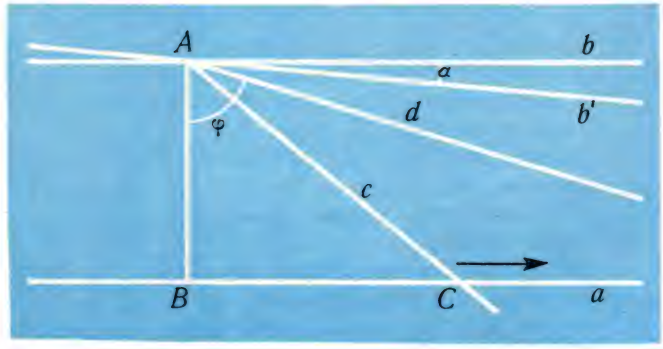


Рис. 6 (нижний).

этот треугольник (рис. 5), хотя никакой необходимости в этом нет; все дальнейшие рассуждения можно проводить мысленно, не обращаясь к рисунку. Поэтому и рисунок, если уж его желательно сделать, может быть выполнен приблизительно, без соблюдения каких-либо чертежных правил.

Опуская из вершины B перпендикуляр на сторону AC, получим точку D. Обозначим $BD=h$, $AD=x$. Тогда $DC=AC-x$. Очевидно, $\frac{h}{x}=\operatorname{tg}\alpha$; $\frac{h}{AC-x}=\operatorname{tg}\gamma$. Отсюда $x\operatorname{tg}\alpha=(AC-x)\operatorname{tg}\gamma$.

Следовательно,

$$x=\frac{AC\cdot\operatorname{tg}\gamma}{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\gamma}.$$

После этого по теореме Пифагора легко найдем:

$$AB=\sqrt{x^2+h^2}=\sqrt{x^2+(x\operatorname{tg}\alpha)^2}=$$
$$=x\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}=\frac{AC\operatorname{tg}\gamma\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\gamma}.$$

Зная AC, α, γ, можно по полученной формуле легко найти искомое расстояние AB. (Расстояние AB можно найти еще проще, если воспользоваться известной в тригонометрии теоремой синусов.)

Второй способ. Постараемся на бумаге по возможности точно начертить план местности (план треугольника ABC). Разумеется, невозможно начертить его в натуральную величину. Поэтому выберем определенный масштаб и уменьшим измеренную величину AC в n раз. Построим на чертеже отрезок $A'C'=\frac{1}{n}AC$. Далее, на концах этого отрезка с помощью транспортира построим углы α и γ. В пересечении сторон этих углов получим точку B' — третью вершину треугольника.

Так как два угла α и γ треугольника $A'B'C'$ равны соответствующим углам треугольника ABC, то эти треугольники подобны. А так как подобие треугольников означает пропорциональность их соответствующих сторон, то приходим к выводу, что сторона $A'B'$ должна быть меньше стороны AB также в n раз. Поэтому, зная длину $A'B'$, можно найти $AB=nA'B'$.

В первом случае мы нашли AB простым вычислением, во втором пришлось выполнить достаточно точный чертеж. В обоих случаях для определения AB нам пришлось воспользоваться теоремами геометрии: теоремой Пифагора, теоремой о свойстве подобных треугольников и т. п. Отметим, что второй способ (наряду с первым) часто используется в инженерной практике, где поэтому весьма важным является точное выполнение чертежей.

Можно ли гарантировать, что описанные методы дают величину AB, которая с необходимой точностью совпадает с расстоянием между пунктами A и B, если бы его действительно удалось измерить? Ответ на этот вопрос зависит от того, насколько точно аксиомы геометрии (а следовательно, и теоремы) отображают реальную действительность, насколько хорош наш геометрический слепок с реального мира.

Разумеется, может оказаться, что этот слепок недостаточно хорош. Тогда надо попытаться сделать лучший. Для этого нужно тщательнее проанализировать опыты, на основании которых выбраны те или иные аксиомы, — точнее, выбрать аксиомы. С помощью новых аксиом, более точно отображающих действительность, надо построить новую геометрию, новый, более точный слепок с реального мира.

В течение двух тысячелетий считалось, что евклидова геометрия описывает мир с беспредельной точностью, что евклидов слепок с реального мира идеален. Эта точка зрения была впервые поколеблена лишь в 1826 г. русским математиком Н. И. Лобачевским. Чтобы разъяснить его идеи, остановимся подробно на анализе одной из самых интересных аксиом евклидовой геометрии.

Аксиома о параллельных

Выбрав систему аксиом, начинают доказывать теоремы все более и более сложные.

Весьма просто, например, с помощью теоремы о внешнем угле треугольника доказывается такая теорема планиметрии:

Две прямые, перпендикулярные третьей прямой, не пересекаются.

Дадим следующее определение:

Две прямые, лежащие в одной плоскости и не пересекающиеся, называются параллельными.

Пусть на плоскости даны прямая a и точка A (рис. 6). Ясно, что через точку A можно провести прямую b, параллельную a. Для этого достаточно опустить из точки A перпендикуляр AB на прямую a, а затем из точки A провести прямую b, перпендикулярную AB. Это и будет искомая параллельная. Итак, параллельные прямые существуют!

Теперь возникает вопрос: нельзя ли через точку A провести еще одну прямую b', также параллельную прямой a? (Напомним, что все происходит на одной плоскости, т. е. мы занимаемся только планиметрией.) Тому, кто не думал над этим раньше, не изучал этого вопроса, хочется немедленно и категорически ответить: «Нет, нельзя! Прямая b' пересечет прямую a, возможно, очень далеко, но непременно пересечет!» Воздержимся пока от столь категорического ответа и постараемся вдуматься в поставленный вопрос глубже.

Возьмем на прямой a точку C и соединим ее с точкой A прямой c. Затем будем передвигать точку C вправо по прямой a. При этом прямая c будет поворачиваться около точки A. Ясно, что прямая c никогда не сольется с прямой b, ибо b с a не пересекается. Но прямая c, поворачиваясь в одном и том же направлении, будет неограниченно приближаться к какому-то определенному предельному положению, когда точка C неограниченно удаляется вправо. Теперь спросим себя: будет ли прямая b той предельной прямой, к которой неограниченно приближается прямая c? Или, может быть, прямая c будет неограниченно приближаться к предельной прямой b', отличной от b, так что прямая c, поворачиваясь, не сможет войти внутрь угла α? Опять хочется отвергнуть это предположение.

Однако подумаем еще. Проведем из точки A луч d под углом $\varphi < 90°$ к прямой AB. Если этот угол мал, прямые a и d пересекутся на чертеже. Если же увеличить угол φ (см. рис. 6), прямые a и d пересекутся уже не на чертеже, а где-то за полем книги. Еще немного увеличим угол φ. Тогда прямые a и d будут пересекаться дальше, скажем на расстоянии нескольких сотен метров. Ясно, что практически убедиться в этом весьма трудно, почти невозможно, но принципиально мыслимо.

Еще увеличим угол φ. Пусть он отличается от 90°, допустим, на одну миллионную долю градуса. Что в этом случае можно сказать о пересечении прямых a и d? Хочется их изображения мысленно продолжить. Но так ли хорошо мыслим мы это продолжение? Не теряет ли смысл этот мысленный эксперимент? Ведь если угол φ достаточно близок к 90°, то «продолжать» прямые придется туда, куда не удавалось заглядывать даже при помощи самых мощных телескопов.

Напомним, что аксиомы изучаемой сейчас геометрии должны отражать свойства световых лучей и подвергаться многократной проверке на опытах со световыми лучами.

Наше предположение о том, что лучи a и d пересекутся, основано действительно на большом практическом опыте. Говоря, что лучи a и d пересекутся даже очень далеко (например, на расстоянии 100 млн. км), мы базируемся на большом опыте астрономических наблюдений.

Предположение же о том, что лучи света a и d пересекутся за пределами видимости самых мощных телескопов, уже основано на чистой фантазии. Ведь неизвестно, как там поведут себя лучи света. Здесь уже нет никаких оснований ссылаться на эксперимент.

Мы договорились, что эталон прямизны — это луч света. Чтобы сделать какое-либо заключение о по-

Одним из видов «движения» является симметрия (см. рис. на стр. 299). Фигуры, которые в результате движения переходят в себя, называются симметричными. На рисунке изображены фигуры, обладающие осевой, центральной симметрией и симметрией порядка «n» (говорят, что фигура обладает симметрией порядка «n», если она переходит в себя при повороте вокруг точки — центра симметрии — на угол $\frac{360}{n}$ градусов). Определите, к какому из этих трех видов симметрии относится каждая фигура, найдите ось или центр симметрии, а для фигур с симметрией порядка «n» найдите это число.

Приготовьте 3 ящика, 3 белых и 3 черных шарика. Положите в первый ящик 2 белых шарика и наклейте этикетку «Б-Б»; во второй ящик положите 2 черных шарика и наклейте этикетку «Ч-Ч»; в третий ящик положите белый и черный шарики и наклейте этикетку «Б-Ч».

Уйдите из комнаты, а ребятам предложите заново разместить шарики по два в каждый ящик так, чтобы все этикетки неправильно указывали содержимое ящиков. Пусть ребята прикроют ящики, чтобы вам, когда вернетесь в комнату, были видны только этикетки, но не шарики.

Теперь, вытащив только один шарик из какого-то одного ящика, вы беретесь точно определить, какие шарики находятся в каждом ящике.

Но если хотите удачи, то, разумеется, вам надо сначала обдумать, из какого ящика вы должны вытаскивать шарик и как надо рассуждать, чтобы, зная цвет вытащенного шарика, точно установить, какие шарики находятся в каждом ящике.

SOS

ведении прямых a и d, надо знать физические свойства световых лучей.

Итак, вопрос о том, можно ли через точку A провести две прямые b и b', параллельные a, зависит от свойств световых лучей. Ясно, что, если угол φ очень близок к 90°, экспериментальная проверка того, пересекутся ли лучи a и d, невозможна.

Следует хорошо уяснить, что вопрос о том, можно ли из точки A провести только одну прямую, не пересекающую прямую a, решается не так уж просто. Ничего категорически здесь сразу сказать нельзя.

Разумеется, неочевидность какого-либо утверждения ни в коей мере не означает его несправедливости. Ведь теорема Пифагора, например, тоже не так уж очевидна: совсем не сразу можно поверить в то, что площадь квадрата, построенного на гипотенузе любого прямоугольного треугольника, равна сумме площадей квадратов, построенных на его катетах. Чтобы убедиться в справедливости теоремы Пифагора для любого прямоугольного треугольника, ее доказывают. Доказательство это опять-таки основывается на тех же аксиомах.

Возможно, в нашем вопросе положение аналогично. Иными словами, можно ли доказать исходя из принятых аксиом такое предложение:

(А) *Через точку вне прямой нельзя провести более одной прямой, параллельной данной.*

Возможно, что еще Евклид задавался этим вопросом, однако ответа на него у Евклида нет. Но так как этим предложением (или эквивалентным ему) приходилось пользоваться при доказательстве других теорем, пришлось принять предложение (А) за аксиому. (Евклид в качестве аксиомы принял другое предложение, которое, однако, равносильно предложению (А).) В стабильном учебнике предложение (А) названо *аксиомой о параллельных*. Итак, принимают новую аксиому, хотя, как объяснялось выше, есть все основания усомниться в ее справедливости в мире световых лучей.

Равна ли сумма углов треугольника 180°

Оставим пока в стороне вопрос о том, включать ли аксиому (А) в число аксиом геометрии, предназначенной для описания мира световых лучей. Укажем лишь, что именно с помощью аксиомы (А) в школьном учебнике доказывается теорема:

(В) *Сумма внутренних углов любого треугольника равна* 180° *(в радианной мере* π*).*

Несколько сложнее доказывается обратная теорема:

Если сумма внутренних углов хотя бы одного треугольника в точности равна 180°, *то справедлива аксиома о параллельных, т. е. через точку A невозможно провести в плоскости две различные прямые, не пересекающие данную прямую a, которая лежит в той же плоскости.*

Таким образом, из аксиомы о параллельных следует, что сумма внутренних углов любого треугольника равна 180°; наоборот, из того, что сумма углов некоторого треугольника равна 180°, следует аксиома (А).

Значит, в списке аксиом евклидовой геометрии можно вычеркнуть аксиому о параллельных, но вместо нее внести предложение (В). При этом все остальные теоремы евклидовой геометрии остались бы неизменными.

Мы выше пояснили трудность (даже практическую невозможность) проверки аксиомы о параллельных в мире световых лучей. Если бы даже можно было выделить сколь угодно тонкий пучок световых лучей и если бы не было никакого их поглощения, то и тогда совершенно непонятным оставалось бы их поведение за пределами видимости современных телескопов. Всегда неясным оставался бы вопрос о том, пересекутся ли лучи a и b', если угол φ близок к 90° (рис. 6). Сказать, что лучи будут и дальше идти по прямой, — значит, вообще ничего не сказать, ибо свойства прямой, которые кладутся в основу рассматриваемой сейчас нами геометрии, выводятся на основании изучения свойств реального мира световых лучей, а не наоборот.

Приняв аксиому (А), мы получим геометрию, в которой сумма углов любого треугольника равна 180°. Приняв предложение, противоположное аксиоме (А), мы получим геометрию, в которой сумма углов всякого треугольника отлична от 180°. Как же здесь быть? Принимать или не принимать аксиому (А)?

Ввиду чрезвычайных трудностей, связанных с экспериментальной проверкой аксиомы (А) в опытах со световыми лучами, возникает вопрос о том, не проще ли на таких опытах проверять предложение (В).

Поясним подробнее возникающее здесь положение.

Представим себе, что на местности (см. рис. 4) ведутся геодезические работы. Пусть в пункте B на штативе укреплен шарик, который геодезист наблюдает в обычный теодолит, установленный в пункте A.

Какой же величины надо взять шарик в пункте B для этих наблюдений? Шарик надо выбрать так, что-

бы его изображение получилось с возможной точностью в центре окуляра теодолита. Если шарик таков, что его изображение будет большим кружком, его надо уменьшить для более точной наводки. Значит, шарик не должен быть слишком большим. Уменьшать шарик, однако, имеет смысл лишь до тех пор, пока это уменьшение сказывается на точности наводки теодолита. Если чувствительность прибора не даст возможности улучшить наводку путем дальнейшего уменьшения шарика, такое уменьшение просто бесполезно. Выбрав шарик надлежащего размера, геодезист считает, что он имеет дело с «точками» A и B, соединенными отрезком AB. При этом, как и выше, шарик B может на самом деле быть довольно большим (это зависит, разумеется, от расстояния AB).

Теперь представим себе, что в пункте C также установлен на штативе шарик надлежащих размеров. Поочередно наводя теодолит на шарики B и C, геодезист находит величину α, равную разности отсчетов на лимбе теодолита.

Как указывалось выше, геометрия оперирует абстрактными понятиями точки, прямой, треугольника и т. д. Поэтому наш геодезист, выполнив конкретный физический эксперимент с шариками и снопиками световых лучей, рассматривает абстрактный треугольник ABC и считает, что величина угла в вершине A равна α — разности отсчетов на лимбе теодолита.

Понятно, что величина α зависит от того, насколько хорошим и совершенным был примененный теодолит. Поэтому, применяя различные измерительные приборы, геодезист должен был бы каждый раз изучать другой абстрактный треугольник ABC.

Представим себе для определенности, что конструкция теодолита не дает возможности фиксировать показания на лимбе более мелкие, нежели $10'$. В таком случае, выполнив отсчет на лимбе после наведения на шарик B, говорят, что отсчет сделан с точностью до $10'$. То же самое относится и к наводке теодолита на шарик C.

Найдя разность отсчетов α, геодезист считает, что, применив другой, более точный теодолит, он мог бы получить другую разность, однако ее отличие от α не превысит $20'$.

Таким образом, рассматривая абстрактный треугольник ABC с углом A, равным α, геодезист вправе считать, что, применяя более точные приборы, он мог бы получить для угла α другую величину, лежащую в пределах от $\alpha - 20'$ до $\alpha + 20'$.

Аналогично можно для углов B и C получить величины β и γ и найти сумму

$$\sigma = \alpha + \beta + \gamma.$$

Возникает вопрос: равна ли эта сумма 180°? Понятно, что такое совпадение маловероятно. Вспомним прежде всего, что каждая наводка теодолита выполнялась с точностью до $10'$. Для определения σ теодолит пришлось наводить 6 раз. Поэтому применение более точного прибора могло бы привести к получению другой суммы, находящейся в промежутке от $\sigma - 1°$ до $\sigma + 1°$.

Итак, определение суммы углов рассматриваемого абстрактного треугольника зависит от точности проведенных измерений (в данном случае от точности теодолита). В нашем случае геодезист вправе рассмотреть абстрактный треугольник, сумма углов которого отличается от найденной при измерении величины σ, но не более чем на 1°.

Здесь возникает другой вопрос: насколько измеренная сумма углов σ отличается от 180°? Превосходит ли это отличие 1°? Находится ли разность между 180° и σ в пределах точности примененных инструментов? Иными словами, может ли геодезист в данном случае рассматривать абстрактный треугольник с суммой углов 180°?

Проанализируем возможные результаты измерения. Здесь имеются две возможности.

1. В результате измерения получилась сумма $\sigma = \alpha + \beta + \gamma$, отличие которой от 180° превосходит точность проведенных измерений (в данном случае 1°). В этом случае геодезист должен рассуждать примерно так. Если принять аксиому (А), в нашей геометрии сумма углов всякого треугольника будет равна 180°. Проведенный же опыт показывает, что принятая точность измерений не согласуется с таким выводом. Это означает, что такая геометрия для нашего геодезиста недостаточно хороша. Выводы ее он не смог бы применять в своей практике.

Зная длину AC, углы α и γ, он не смог бы с необходимой точностью, как это описано выше, определить длину AB, ибо теорема Пифагора и признаки подобия треугольников справедливы лишь там, где сумма углов треугольника равна 180°. Ему пришлось бы для практических потребностей строить геометрию, где аксиома (А) не справедлива и, следовательно, сумма углов треугольника не равна 180°.

2. Сумма углов $\sigma = \alpha + \beta + \gamma$, полученная в результате измерения, отличается от 180° на величину, не превосходящую точность измерений (в данном случае 1°). В этом случае геодезисту для практических нужд вполне пригодна геометрия, в которой сумма углов треугольника равна 180°. У него нет никаких оснований отвергать аксиому (А), а равно и предложение (В). Обычная евклидова «школьная» геометрия здесь оказывается весьма полезной, ее выводы приобретают большое практическое значе-

ние с точностью, принятой в измерениях нашего геодезиста.

Однако необходимо заметить, что геодезист и в данном случае не должен слишком пренебрежительно относиться к геометрии, где неверна аксиома (А) и где сумма углов треугольника отлична от 180°. Не исключена возможность, что и такая геометрия в будущем окажется ему полезной. Если все измерения геодезиста пока хорошо согласовывались с той геометрией, где сумма углов треугольника равна 180°, то, может быть, в дальнейшем, увеличив точность приборов или измеряя углы значительно больших (космических) треугольников, он столкнется с тем, что при новых измерениях обычная геометрия уже не будет описывать мир с достаточной точностью. И тогда понадобится совсем другая геометрия.

Итак, вопрос заключается лишь в том, какая геометрия с большей точностью описывает мир световых лучей, какой мысленный слепок с реального мира является более точным.

Вполне владея изложенными идеями, Н. И. Лобачевский уже в первой половине XIX в. имевшимися в то время астрономическими средствами измерил сумму углов весьма большого космического треугольника. За вершины были взяты две самые удаленные точки на эллиптической орбите Земли и одна из далеких звезд. В результате измерения получилась величина, как и следовало ожидать, отличная от 180°, однако это отличие не выходило за пределы точности примененных инструментов. Таким образом, вопрос о том, какая геометрия точнее описывает мир световых лучей, остался открытым. Было неясно, понадобится ли вообще когда-нибудь геометрия, в которой не имеет места аксиома (А). Не является ли такая геометрия бесполезным плодом фантазии?

Нужны ли другие геометрии

Выше пояснялась естественность построения геометрии, в которой сумма внутренних углов треугольника не равна 180° и, следовательно, не имеет места утверждение (А).

Впервые такую геометрию построил Н. И. Лобачевский в 1826 г. Геометрия Лобачевского строится на тех же аксиомах, что и евклидова, за исключе-

Из шести спичек

С помощью кусочков пластилина я соорудил пирамиду и заметил, что в этой конструкции содержится четыре равных равносторонних треугольника.

«А не могу ли я теперь образовать в одной плоскости четыре равных равносторонних треугольника из шести одинаковых отрезков?»

Прикинул на спичках — получилось! И пластилин не потребовался.

Если вам не удастся самостоятельно воспроизвести эту новую конструкцию, взгляните на стр. 331.

Кривые линии, которые получаются при пересечении поверхности прямого кругового конуса плоскостями, не проходящими через его вершину, называются кривыми второго порядка или *коническими сечениями*.

Конические сечения могут быть трех типов (см. стр. 303, рис. внизу слева):

1. Секущая плоскость пересекает все образующие конуса в точках одной ее полости, линия пересечения есть замкнутая овальная линия — *эллипс;* окружность как частный случай эллипса получается, когда секущая плоскость перпендикулярна оси конуса.

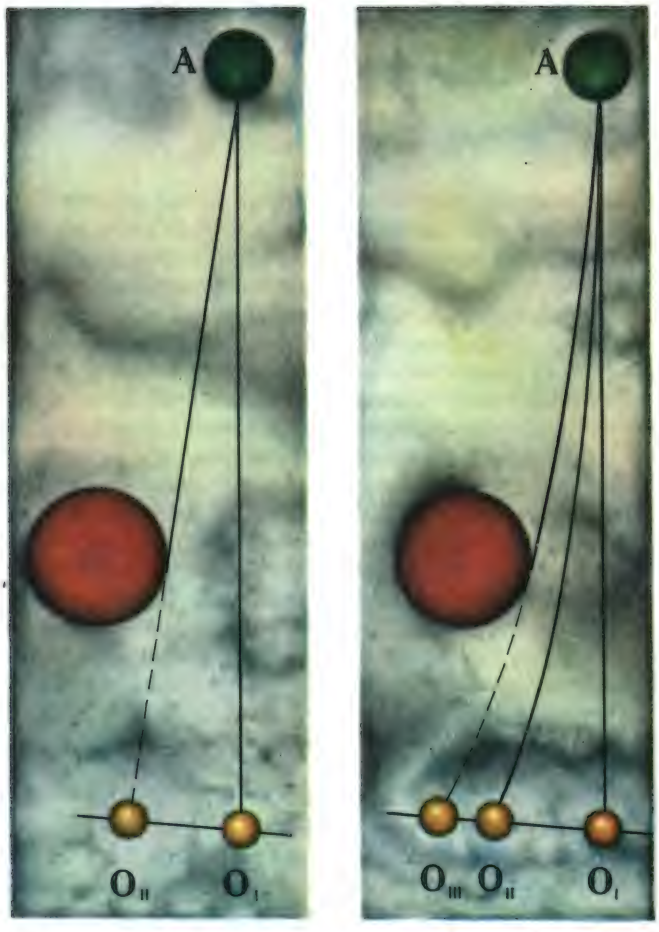
2. Секущая плоскость параллельна одной из касательных плоскостей конуса; в сечении получается незамкнутая уходящая в бесконечность кривая — *парабола,* целиком лежащая в одной полости.

3. Секущая плоскость пересекает обе полости конуса; линия пересечения — *гипербола,* состоит из двух одинаковых незамкнутых простирающихся в бесконечность частей (ветвей гиперболы), лежащих в обеих полостях конуса.

На рисунках (см. стр. 303, внизу справа) изображены линии, которые описывает точка круга, когда он катится по прямой линии. При этом точка окружности описывает линию с остриями — *циклоиду.* Всякая внутренняя точка круга описывает линию без остриев — *укороченную циклоиду.* А если точка закреплена вне круга на продолжении его радиуса, то она описывает линию с петлями — *удлиненную циклоиду.*

Рис. 7 (левый).

Рис. 8 (правый).



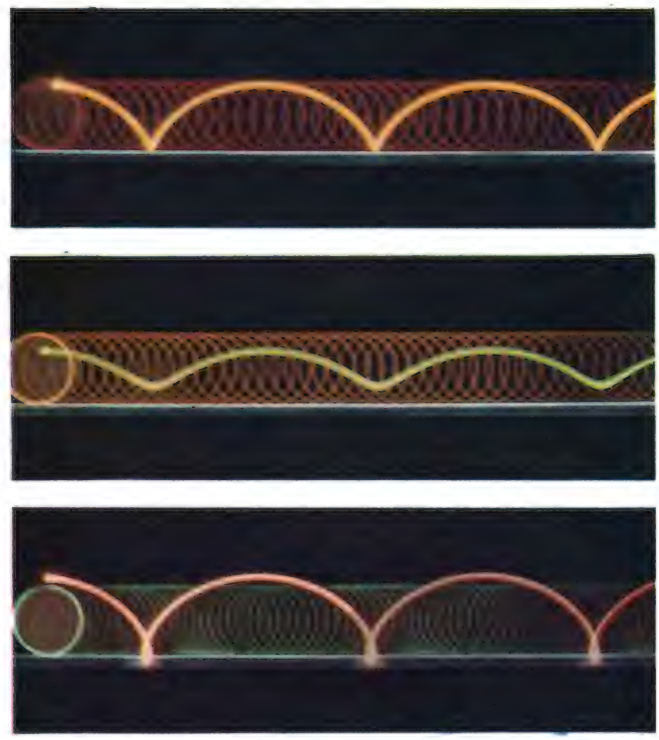
нием аксиомы о параллельных, которая заменяется другим утверждением — аксиомой Лобачевского:

Через точку вне прямой в данной плоскости можно провести по крайней мере две прямые, не пересекающие данную прямую.

Мы видели, что вопрос о том, какая геометрия — Евклида или Лобачевского — точнее описывает мир световых лучей, решается не так уж просто, хотя аксиома Лобачевского и кажется на первый взгляд парадоксальной. Огромной заслугой Лобачевского было то, что он этот вопрос поставил.

Впоследствии было построено много других геометрий — других мысленных слепков с реального мира. Вопрос же о том, действительно ли понадобится какая-либо из этих геометрий при изучении реального мира световых лучей, оставался по существу открытым вплоть до 1916 г., когда крупнейший физик А. Эйнштейн создал так называемую общую теорию относительности.

Широко известен анекдот о том, что Ньютон открыл закон тяготения, наблюдая за падением яблока. Насколько же точно ньютоновский закон отображает реальное положение вещей? Нельзя ли с помощью очень точных инструментов обнаружить, что притяжение тел может отклоняться (пусть очень мало) от закона Ньютона? Здесь можно поста-



вить те же вопросы, какими мы занимались при разработке евклидовой аксиомы о параллельных.

Дело в том, что ньютоновские законы также представляют собой некоторый абстрактный, мысленный слепок с реального мира. Это как бы физический слепок, в то время как евклидова аксиоматика является геометрическим слепком.

Подобно этому и законы электрического взаимодействия (например, закон Кулона) также являются определенным физическим слепком с реального мира.

Вплоть до создания общей теории относительности считалось твердо установленным, что реальный мир представляет собой нечто подобное бесконечной пустой «евклидовой комнате», в которой, словно мебель, расположены реальные тела, предметы, взаимодействующие друг с другом. Казалось совершенно несомненным, что свойства этой «евклидовой комнаты» никак не связаны с перемещением и взаимодействием находящейся в ней мебели.

Законы же перемещения и взаимодействия материи в этой пустоте описывались в физических теориях-слепках. Однако считалось, что эти теории могут делаться независимо от того, как сделан геометрический слепок. Кроме того, ньютонов слепок считался столь же бесконечно совершенным и точным, как и евклидов геометрический слепок.

Опыты, однако, показали, что известные физические теории столь же несовершенны, как и евклидова геометрия. Чтобы несколько разъяснить это, расскажем об одном эксперименте, который уже неоднократно повторялся астрономами и показал хорошее совпадение с заранее полученными выводами теории относительности.

Представим себе на Земле наблюдателя, который, находясь в определенный момент в точке O_I (рис. 7), видит звезду A и вблизи от нее Солнце. (Заметим, что такие опыты производятся при полном солнечном затмении, когда диск Солнца закрывается от наблюдателя диском Луны.) Наблюдение проводится в небольшой промежуток времени, так что звезду и Солнце можно считать неподвижными, а траекторию Земли — прямолинейной. Земля движется по орбите с известной скоростью (в направлении от O_I к O_{II}), и, пользуясь теоремами евклидовой геометрии, нетрудно определить, в какой момент времени Солнце заслонит от наблюдателя звезду A. Это должно произойти тогда, когда Земля переместится в точку O_{II} (рис. 7).

Эксперимент, однако, показывает, что в действительности звезда A закрывается Солнцем с некоторым опозданием, величина которого хорошо согласуется с предсказаниями теории относительности.

Как же объясняется это явление? Оказывается, сильное поле тяготения, создаваемое Солнцем, заставляет лучи света, проходящие вблизи Солнца, вести себя не так, как того требует евклидова геометрия. А именно, лучи как бы искривляются, и получается картина, схематически изображенная на рис. 8. Находясь в точке O_{II}, наблюдатель видит звезду. Лишь когда наблюдатель переместится в точку O_{III}, Солнце закроет от него звезду A.

Можно попытаться объяснить обнаруженное отклонение, оставаясь в рамках евклидовой геометрии и ньютоновской теории тяготения. Именно, зная массу Солнца и массу движущегося фотона (кванта света), можно на основании ньютоновского закона тяготения вычислить отклонение фотона от евклидовой прямой. Опыт, однако, показывает, что действительное отклонение будет примерно вдвое большим того отклонения, которое вычислено указанным путем.

В таком случае приходится предположить, что евклидова геометрия и ньютоновская теория тяготения (или обе они) являются недостаточно точными слепками действительного мира, ибо не позволяют объяснить наблюдаемые явления. Общая теория относительности как раз и дала новый, более точный слепок. В соответствии с этой теорией поведение световых лучей вовсе не обязано следовать законам евклидовой геометрии. Геометрия, пригодная для описания поведения световых лучей, должна целиком и полностью определяться распределением и состоянием материи в мире. Каждое перемещение массы и изменение энергии вещества влечет изменение структуры всего физического пространства, а следовательно, и необходимость выбора более подходящего, неевклидова геометрического слепка.

Нельзя считать, что световые лучи в окрестности Солнца (рис. 8) перестали быть прямыми, что они искривлены. Они, так же как и лучи, проходящие вдали от Солнца, являются идеальными прямыми, однако поведение этих прямых должно описываться не евклидовой системой аксиом, не евклидовой геометрией, а некоторой другой геометрией.

Так как распределение и состояние материи в реальном пространстве изменяются во времени, то и геометрия, описывающая наше реальное пространство с достаточной точностью, тоже не остается неизменной, а изменяется со временем. Значит, в формулировке аксиом геометрии должно участвовать время. Понятия пространства и времени оказываются неотделимыми, неразрывными.

Теория относительности Эйнштейна объединила в одно целое изучение физических и геометрических свойств реального мира. Она как бы дала единый физико-геометрический слепок нашего мира.

Оказалось, что мир нельзя рассматривать как пустое евклидово пространство, заполненное материей. Каждое изменение поля тяготения, всякое перемещение массы и изменение энергии вещества влечет изменение структуры всего физического пространства, а следовательно, и необходимость выбора более подходящего геометрического слепка.

В соответствии с теорией Эйнштейна выбор подходящей геометрии определяется распределением и состоянием материи в реальном мире.

Чем отличаются различные геометрии

Для того чтобы иметь возможность подбирать в каждом случае подходящую геометрию, целесообразно заранее иметь целый набор, как бы библиотеку таких мыслимых слепков. В настоящее время математиками разработаны методы построения бесконечного числа таких геометрий.

Различные геометрические пространства, т. е. различные мыслимые геометрические слепки, различают по тому, насколько они отличаются от евклидова. Само это отличие называют *кривизной*. Кривизна геометрического пространства определяется некоторыми числами, которые характеризуют величину отличия той или иной геометрии от евклидовой. Каждая «кривая» геометрия основывается, по существу, на некоторых аксиомах. Совокупность аксиом такой геометрии отличается от евклидовой системы аксиом. Имеется один интересный и простой признак, которым можно характеризовать отличие геометрии от евклидовой, не перечисляя всех аксиом. Этим признаком является как раз теорема о сумме углов треугольника. В евклидовой геометрии она всегда равна 180°. В других геометриях это не так. Там сумма углов треугольника может быть больше или меньше 180°, в зависимости от размеров и расположения треугольника в пространстве.

Если обозначить сумму углов треугольника через σ, то можно считать, что величина кривизны характеризуется отношением величины $\sigma - 180°$ к площади треугольника. Величина $\sigma - 180°$ в различных геометриях может иметь знак «плюс» или «минус». В соответствии с этим говорят, что пространство имеет положительную или отрицательную кривизну.

В евклидовой геометрии $\sigma - 180° = 0$, поэтому говорят, что евклидово геометрическое пространство имеет нулевую кривизну.

Выше было показано, что, развивая технику измерений, совершенствуя свои знания реального мира, мы неизбежно приходим к необходимости построения геометрии, отличной от евклидовой. Однако евклидова геометрия во многих вопросах является отличным орудием практики, инженерной техники и т. п. Смешон был бы, например, инженер, который стал бы учитывать, что две вертикальные линии отвеса не параллельны, а пересекаются в центре Земли. Еще меньше оснований у инженера предполагать, что в построенном треугольнике сумма углов отлична от двух прямых.

Евклидова геометрия в таких вопросах с большой точностью описывает реальный мир световых лучей, и не случайно изучение свойств пространства люди начали именно с евклидовой геометрии.

Все это, разумеется, ни в какой мере не умаляет важности неевклидовых геометрий. Они находят себе применение в важнейших теоретических и практических вопросах современной физики и математики.

Первая неевклидова геометрия была построена Лобачевским. Многовековая привычка к понятиям евклидовой геометрии не дала возможности даже крупным математикам, современникам Лобачевского, понять его идеи. Триумф этих идей наступил позднее. Теперь они прочно вошли в науку о природе и хорошо известны каждому физику и математику.

Геометрические понятия тесно связаны с физическими явлениями, происходящими в реальном мире. При этом следует иметь в виду, что геометрия применима не только к изучению явлений, связанных с распространением света. Можно рассмотреть и какие-нибудь другие реальные объекты, не имеющие никакого отношения к распространению света. Некоторые из них можно принять за эталон прямизны, подобно тому как это делалось с узкими снопиками световых лучей. Изучая эти объекты, можно подобрать аксиомы и построить соответствующую геометрию. Можно, например, в качестве эталона прямизны принять траектории твердых тел достаточно малого размера, движущихся по инерции, т. е. при отсутствии воздействия на них внешних сил. Полученная при этом геометрия (как и геометрия, построенная для изучения световых лучей) будет лишь в первом приближении совпадать с евклидовой.

Функции

Что такое координаты и для чего они служат

Когда приходится иметь дело с большим числом (а тем более с бесконечным множеством) предметов, для различения их друг от друга удобно называть их не случайными именами (Ваня, Маша, Лондон, Амазонка,..), а так, чтобы по каждому «имени» легко было отыскать соответствующий ему предмет и, наоборот, для каждого предмета легко узнать его «имя» в данной системе наименований. Адрес: «Такой-то переулок, дом 7, квартира 6» — много удобнее, чем то, как писали еще в начале нашего века: «Дом Жукова, квартира Еремеева». На билете написано: «Ряд 5, место 4», или, короче, «5, 4»; эта надпись заменяет «имя» кресла зрительного зала (рис. 1), а сами числа 5, 4 называются его координатами (заметьте, что «4, 5» — это совсем другое кресло: важен порядок). Почти так же просто дать «имя» каждой точке, например, того листа книги, который вы сейчас читаете: расстояние этой точки от левого края листа обозначим через x, расстояние от нижнего края — через y и будем считать пару чисел (x, y) названием этой точки. Измеряя расстояния в сантиметрах, верхнему правому углу страницы дадим «имя» (20, 26), нижнему правому — (20, 0), центру листа — (10, 13). Все точки листа (а их бесконечно много!) получат свои «имена». Подобным же образом каждая точка вашей комнаты получит свое «имя» (x, y, z), здесь x — расстояние (в метрах) от северной стены, y — расстояние от западной стены, z — расстояние точки от пола; вы легко найдете, например, точку (3, 2, 1). Координата x для точки, находящейся за северной стеной, считается отрицательной, так же как y — для точки за западной стеной и z — для точки нижних этажей. Те плоскости, от которых отсчитываются расстояния x, y, z, называются *координатными плоскостями* (на каждой из них одна координата равна нулю), а линии их пересечения — *осями координат;* например, прямая, вдоль которой y и z равны нулю, называется осью x.

Читатель, вероятно, хорошо знает, что такое долгота и широта места на поверхности Земли. Это географические координаты. Так, долгота Москвы $+37{,}5°$ (значит, к востоку от Гринвичского начального меридиана), а широта $+55{,}8°$ (значит, к северу от экватора), поэтому координатное обозначение Москвы записывается так: 37,5°, 55,8°.

Координаты в геометрии. Числа играют важную роль в геометрии. При их помощи мы оцениваем размеры предметов. Длины, площади, объемы после выбора единицы измерения выражаются числами. Можно ли при помощи чисел описать форму предметов, форму самых причудливых фигур? Мы знаем, что углы треугольника определяют его форму («два треугольника с равными углами подобны»,

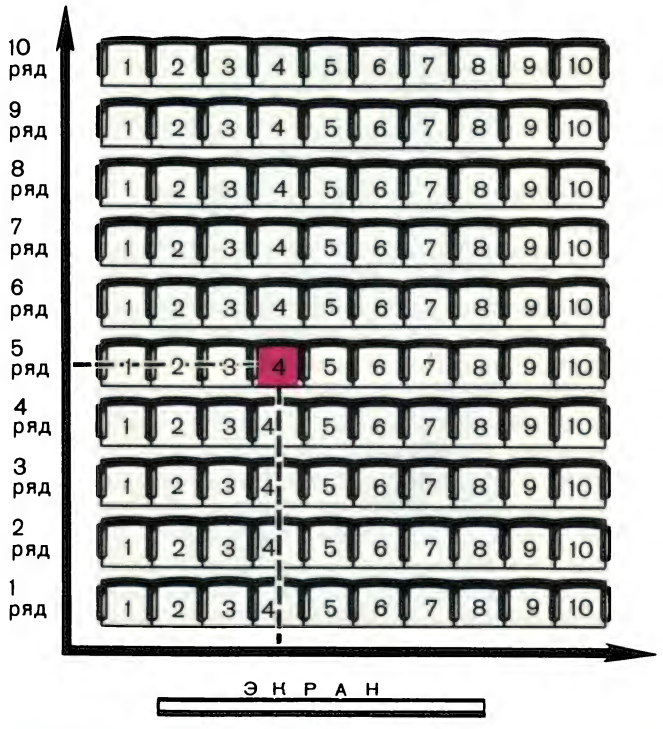


Рис. 1 (верхний).

На нижнем рисунке: идея метода координат используется в шахматах (в шахматной нотации).

т. е. имеют одинаковую форму), значит, в некоторых случаях числа могут охарактеризовать форму, в данном случае два числа — два угла. Но можно ли форму любой фигуры описать при помощи чисел? Положительный ответ дает координатный метод, введенный в математику в середине XVII в. французскими учеными П. Ферма и Р. Декартом.

Идея координат существовала задолго до Ферма и Декарта, ее можно проследить еще в древнем мире: в незапамятные времена художники пользовались координатной сеткой для перенесения изображений на другую плоскость; вероятно, еще древнее вышивание по канве, которая представляет собой, так сказать, материализованную координатную сетку. Сферическими координатами (долготой и широтой) пользовались астрономы древнего Вавилона и Египта.

Координатный метод — это способ изучения фигур аналитически, т. е. при помощи вычислений. Ветвь геометрии, изучающая фигуры этим способом, называется *аналитической геометрией*.

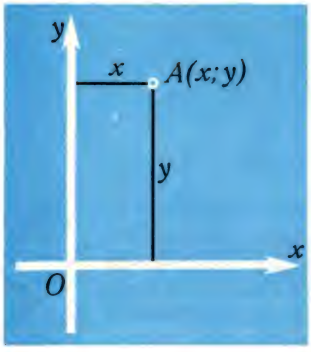


Рис. 2 (левый).

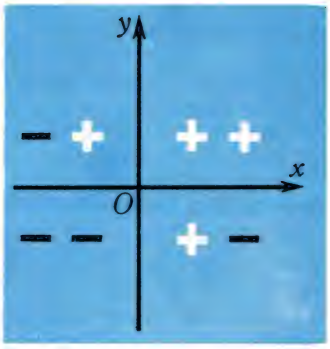


Рис. 3 (правый).

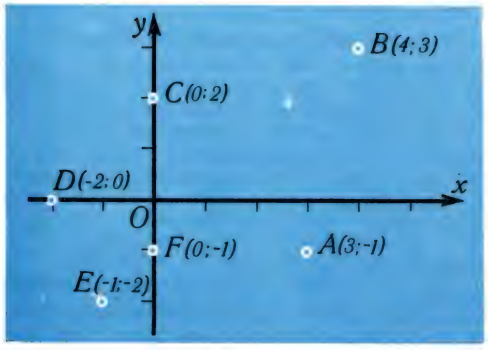


Рис. 4.

Чтобы изучать фигуры, нужно прежде всего уметь точно описывать их. Описание должно быть полным: прочтя такое описание, мы должны суметь по нему восстановить фигуру, т. е. построить фигуру точно такую, как та, с которой было составлено описание. Говорят, что таким описанием фигура задана (однозначно), а само описание называют заданием фигуры. Геометрическую фигуру будем представлять себе состоящей из точек: *фигура* — это множество точек (конечное или бесконечное). Если фигура Ф состоит из конечного числа точек (или конечным числом точек однозначно определяется, например многоугольник — своими вершинами), то для ее полного описания достаточно задать каждую точку. И в случае бесконечного множества точек нужно уметь задавать положение отдельных точек. Для простоты рассмотрим точки и фигуры на плоскости.

Декартовы координаты точки

Положение точки на плоскости можно задать при помощи двух чисел x и y, если предварительно: 1) выбрать на этой плоскости две какие-нибудь взаимно перпендикулярные прямые (обычно одну горизонтальную, другую вертикальную; например, на листе бумаги — нижний и левый его края); 2) снабдить эти прямые направлениями (например, направо и вверх); 3) условиться о единице для измерения длины (например, сантиметр). Точку O пересечения прямых называют *началом*, а сами направленные прямые — *осями координат:* первую из них — осью Ox или *осью абсцисс*, вторую — осью Oy или *осью ординат*. Теперь для задания положения точки нужно лишь указать: 1) на каком расстоянии от оси Oy она находится: это расстояние, взятое со знаком «+» или «−», обозначается буквой x и называется *абсциссой* точки; 2) на каком расстоянии она лежит от оси Ox; это расстояние, со знаком «+» или «−», обозначается y и называется ее *ординатой*. Если точка лежит по ту сторону от оси Oy, куда направлена ось Ox, то для абсциссы берут знак «+», в противном случае — знак «−». Подобным же образом выбирается знак «+» или «−» для ординаты. У точек самой оси Ox ординаты равны нулю ($y=0$), у точек оси Oy абсциссы равны нулю ($x=0$). Если у точки A абсцисса равна x, а ордината равна y, то пишут: $A\ (x;\ y)$ (рис. 2). Числа x, y называют *декартовыми координатами* точки $(x;\ y)$. В обозначении $(x;\ y)$ на первом месте всегда стоит абсцисса, на втором — ордината. На рис. 3 указаны знаки координат для точек различных координатных углов (четвертей, или квадрантов); на первом месте — знак абсциссы, на втором — знак ординаты. Обе координаты начала O равны нулю, что записывают так: $O\ (0;\ 0)$.

Задача 1. Проверьте правильность обозначения точек на рис. 4.

Нужно привыкнуть безошибочно решать при заданном расположении и направлении осей и заданной единице длины две задачи: 1) найти координаты каждой указанной на рисунке точки, 2) по заданным координатам x, y построить точку $(x;\ y)$.

Задача 2. Построить пятиугольник $ABCDE$, если $A\ (-3;\ 1)$, $B\ (-2;\ -2)$, $C\ (2;\ -2)$, $D\ (3;\ 1)$, $E\ (0;\ 3\frac{1}{2})$.

Задача 3. Какую фигуру образуют все точки, у которых: 1) абсцисса равна нулю ($x=0$); 2) ордината больше двух ($y>2$); 3) абсцисса равна ординате ($x=y$); 4) $x=-y$; 5) $|x|=|y|$ (где $|x|$ — обозначение абсолютной величины числа x: если $x<0$, то $|x|=-x$, в противном случае $|x|=x$); 6) $x=0$ и $y>2$.

Простейшие задачи

При решении геометрических задач координатным методом постоянно приходится опираться на несколько совсем простых стандартных задач: определение расстояния между точками, отыскание середины отрезка и др. При этом нужно иметь в виду, что выра-

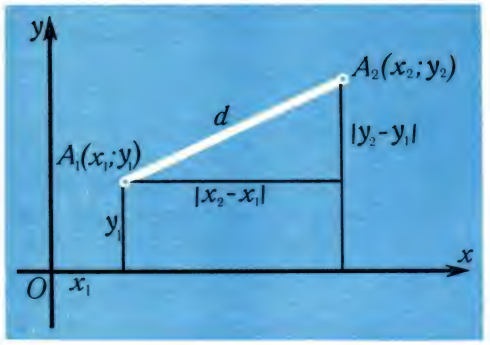


Рис. 5.

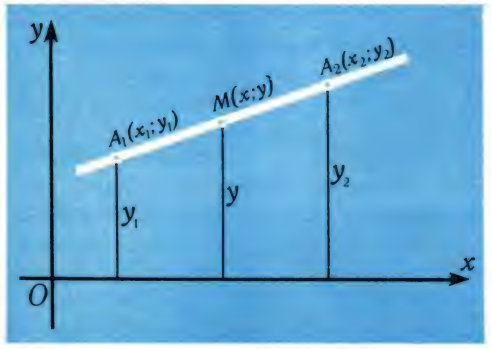


Рис. 6.

жение «дана точка» означает, что дано ее координатное обозначение $(x;\ y)$, т. е. заданы два числа x, y. «Найти точку» означает найти ее координатное обозначение $(x;\ y)$.

1) Расстояние между двумя точками. Задача. Даны две точки $A_1\ (x_1;\ y_1)$ и $A_2\ (x_2;\ y_2)$. Найти расстояние между ними (рис. 5).

Проведя вспомогательные линии, читатель без труда убедится, что искомое расстояние d служит гипотенузой треугольника с катетами $|x_2-x_1|$ и $|y_2-y_1|$, поэтому

$$d=+\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} \qquad (1)$$

(при возведении в квадрат знак абсолютной величины опущен, что, конечно, не меняет результата).

Важно заметить, что формула (1) верна при любом расположении точек A_1 и A_2. Проверьте, что, например, для $A_1\ (-1;\ -2)$, $A_2\ (3;\ -5)$ катеты будут действительно равны: $|3-(-1)|$ и $|(-5)-(-2)|$ и формула (1) дает:

$$d=+\sqrt{4^2+(-3)^2}=5.$$

Для аналитической геометрии общность формул имеет очень большое значение. Благодаря этой общности при решении задач аналитически не нужно задумываться о том или ином расположении данных точек; можно решать задачу, даже не глядя на чертеж. Если чертеж и делается, то обычно лишь приблизительный, который служит только схемой, местом, куда записываются данные (координатные обозначения точек и пр.), а затем заносятся и найденные уже промежуточные и, наконец, окончательные результаты.

2) Середина отрезка. Задача. Даны концы отрезка $A_1\ (x_1;\ y_1)$, $A_2\ (x_2;\ y_2)$. Найти его середину M. Обозначим координаты искомой середины M через x, y. Из рис. 6 видно, что ордината y служит средней линией трапеции, поэтому

$$y=\frac{y_1+y_2}{2}, \qquad (2)$$

точно так же

$$x=\frac{x_1+x_2}{2}. \qquad (2)$$

Если знаки y_1 и y_2 противоположны, то это доказательство неубедительно, однако формулы (2) остаются справедливыми во всех случаях. Проверьте это.

Задача 4. Дан треугольник ABC: $A\ (12;\ 6)$, $B\ (-2;\ 4)$, $C\ (6;\ -2)$. Найти длины его сторон и медиан.

Задача 5. На оси Ox найти точку M, которая находилась бы от точки $A\ (3;\ -1)$ на расстоянии, равном 5.

Решение. Обозначим координаты искомой точки M через $(x;\ y)$. Она лежит на оси x, следовательно, $y=0$. Остается определить x. Записав аналитически (см. формулу (1)) условие задачи: $AM=5$, получим уравнение для определения x.

Ответ: $M\ (7{,}9\ldots;\ 0)$ и $M'\ (-1{,}9\ldots;\ 0)$.

Задача 6. Найти точку $M\ (x;\ y)$, находящуюся на равных расстояниях от осей координат и удаленную на 5 единиц от точки $A\ (-1;\ 6)$.

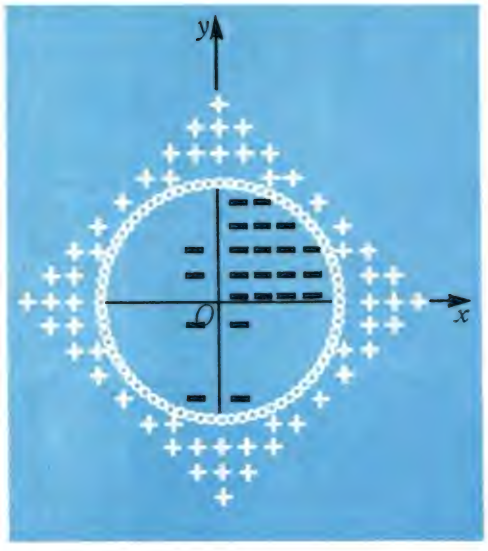
Указание. Для определения x, y нужно лишь решить систему $|x|=|y|$, $(x+1)^2+(y-6)^2=5^2$. Всего четыре решения.

Задание фигуры, состоящей из бесчисленного множества точек

Для задания фигуры Ф в этом случае стараются подыскать такое условие, которому: 1) удовлетворяют координаты x, y всех точек из Ф; 2) не удовлетворяет ни одна чужая точка (т. е. не принадлежащая Ф). То, что здесь сказано, станет понятнее на следующих примерах.

1. Подыщем условие для фигуры, состоящей из всех точек оси Ox. Координаты всех ее точек удовлетворяют уравнению $y=0$, и, конечно, ни одна чужая точка ему не удовлетворяет, так как она лежит либо выше оси Ox (тогда $y>0$), либо ниже (тогда $y<0$). Уравнение $y=0$ и служит искомым условием.

2. Все точки биссектрисы координатного угла xOy удовлетворяют уравнению $x=y$, и ни одна чу-



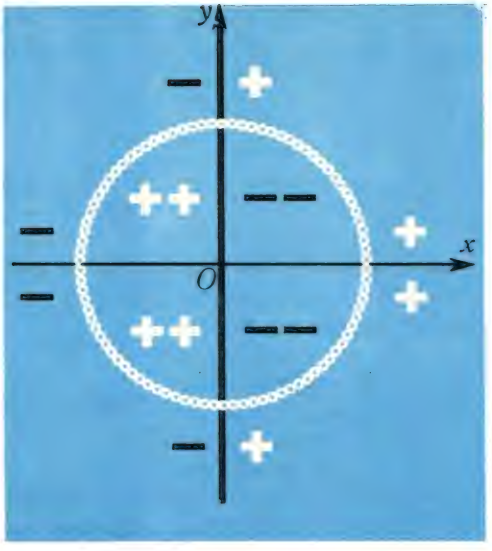


Рис. 7 (левый).

Рис. 8 (правый).

жая точка. Биссектриса считается продолженной бесконечно в обе стороны.

3. Все точки внутренней части координатного угла xOy удовлетворяют системе неравенств $x>0$, $y>0$. Эта система служит условием, задающим фигуру Ф — внутренность угла xOy.

4. Все точки M $(x;\ y)$ окружности радиуса 5 с центром в начале координат удовлетворяют уравнению $x^2+y^2=25$, так как для любой ее точки расстояние от начала равно 5; $OM=5$, или, на основании теоремы Пифагора, $\sqrt{x^2+y^2}=5$, что равносильно написанному выше уравнению. Для всех лежащих внутри окружности точек $OM<5$, т. е. $x^2+y^2<25$; для всех точек, лежащих вне окружности, $OM>5$, или $x^2+y^2>25$. Итак, для всех точек нашей окружности, и только для них, справедливо уравнение

$$x^2+y^2-25=0.$$

Уравнение, которому удовлетворяют все точки некоторой линии и не удовлетворяет ни одна посторонняя точка, называется уравнением этой линии; x, y в уравнении линии — текущие координаты.

Отметьте на чертеже точки с целочисленными координатами, для которых левая часть $x^2+y^2-25>0$, знаком «+»; те, для которых она отрицательна, знаком «—»; точки, где она равна нулю, заключите в совсем маленький кружочек. Можно ограничиться, например, лишь теми целочисленными точками, для которых $|x|+|y|\leqslant 8$. Проделав это, вы отчетливо поймете, что на координатной плоскости соответствует уравнению, что — неравенству (рис. 7).

5. Уравнение $x+y=5$ представляет собой уравнение прямой. Попробуйте доказать это сами! (Ниже будет показано, что всякое уравнение первой степени между x и y есть уравнение некоторой прямой.) Построить эту прямую (как и всякую) очень просто: достаточно подобрать две точки, удовлетворяющие этому уравнению, например (0; 5) и (1; 4), и затем, построив их, соединить линейкой. Снова заметим:

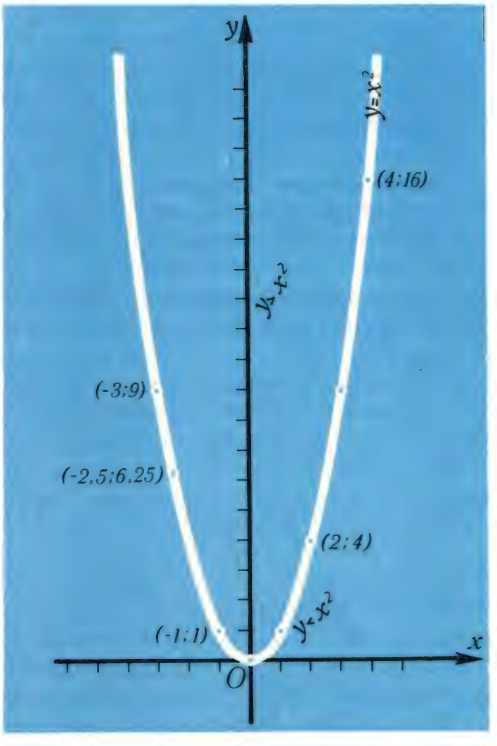


Рис. 9.

прямая делит плоскость на две части, для одной из них (верхней) $x+y>5$, для другой $x+y<5$.

6. Попробуйте выяснить геометрический смысл неравенства $|x|+|y|<5$. Для этого сначала следует построить линию $|x|+|y|=5$. (Мы говорим: «Линия $|x|+|y|=5$»; это значит — линия, определенная уравнением $|x|+|y|=5$.) Она состоит из четырех частей. Построение следует вести отдельно в каждой из координатных четвертей: 1) при $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$; 2) при $x<0$, $y\geqslant 0$; 3) при $x<0$, $y<0$ и 4) при $x\geqslant 0$, $y<0$.

7. Уравнение $x^3+xy^2-4x=0$ определяет фигуру, составленную из окружности и вертикальной пря-

мой, проходящей через ее центр. Действительно, данное уравнение можно переписать так: $x(x^2+y^2-4)=0$, но произведение может быть равно нулю тогда, и только тогда, когда хоть один из множителей равен нулю, т. е. $x=0$ или $x^2+y^2-4=0$; первое есть уравнение оси Oy, второе — окружности (рис. 8).

8. Уравнение $y=x^2$ служит уравнением параболы. Построим ее по уравнению. Для этого напишем сначала таблицу, помещая в первой ее графе произвольные значения x: $x=-3$; $-2{,}5$; -1; 0; 1; 2; 3; 4; ..., а во второй — соответствующие значения y: $y=9$; 6,25; 1; 0; 1; 4; 9; 16; .... Если бы мы были в состоянии составить таблицу для всего бесконечного множества действительных чисел x и соответствующих y, а затем построили бы все такие точки $(x; y)$, то эти точки сами заполнили бы собой всю искомую кривую (рис. 9). Фактически же мы вычислили координаты лишь точек: $(-3; 9)$, $(-2{,}5; 6{,}25)$, $(-1; 1)$, $(0; 0)$, $(1; 1)$, $(2; 4)$, $(3; 9)$, $(4; 16)$. Соединив их от руки плавной кривой (этим мы заполняем пробелы, соответствующие промежуточным значениям x, не включенным в таблицу), получим параболу, проходящую через эти точки. Конечно, это приблизительное построение; оно будет выполнено тем точнее, чем больше построим промежуточных точек.

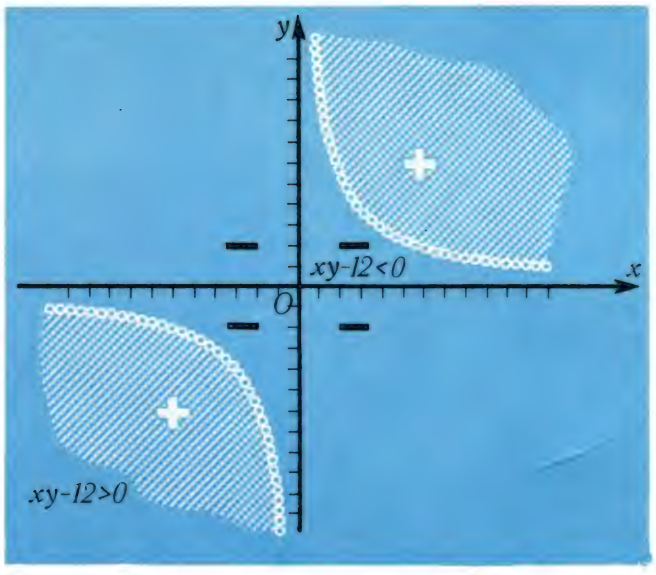
Заметим, что неравенство $y>x^2$ определяет часть плоскости над параболой («внутри» параболы), а неравенство $y<x^2$ — часть плоскости под ней («вне» параболы).

9. Уравнение $xy=12$ (рис. 10) определяет на плоскости хорошо известную вам кривую — гиперболу (вспомните геометрическое изображение закона Бойля — Мариотта). Для ее построения решаем уравнение относительно y

$$y=\frac{12}{x}$$

и далее строим по точкам, как это делалось в предыдущей задаче.

Рис. 10.



Прямая

Прямая — это простейшая из линий; уравнение первой степени — простейшее из уравнений. И вот оказывается, что: 1) всякая прямая линия задается некоторым уравнением первой степени и 2) все точки, удовлетворяющие заданному уравнению первой степени относительно x и y, заполняют некоторую прямую, т. е. такое уравнение и служит уравнением прямой.

Докажем две теоремы.

1. *Уравнение всякой прямой есть уравнение первой степени.*

Прежде всего это ясно для прямой, параллельной оси Oy (в частности, и для самой оси Oy), так как у всех точек такой прямой абсцисса одна и та же, т. е. равна некоторому постоянному a; $x=a$ — это и есть уравнение рассматриваемой прямой, но оно первой степени.

Рассмотрим теперь любую прямую n, не параллельную Oy. Она пересекает Oy в некоторой точке B $(0; b)$ (абсцисса точки B равна нулю, а ордината имеет некоторое значение b). Передвинем прямую n параллельно себе так, чтобы она прошла через начало O $(0; 0)$. Составим прежде всего уравнение этой вспомогательной прямой. На ней найдется точка E (рис. 11) с абсциссой, равной 1 (точка ее пересечения с прямой $x=1$); пусть ордината точки E равна числу k: E $(1; k)$. Тогда для любой точки этой прямой $y:x=k:1$. Действительно, треугольники OM_1M и OE_1E подобны, поэтому их катеты $|y|$, $|x|$, $|k|$, 1 пропорциональны: $|y|:|x|=|k|:1$. Остается проверить лишь знаки: чертеж показывает, что если k положительно, то для любой точки прямой EO непременно x и y будут или оба положительны, или оба отрицательны. Значит, одинаковы и знаки отношений $y:x$, $k:1$. Если k отрицательно, то знаки x и y противоположны (рис. 12) и равенство $y:x=k:1$, или $y=kx$, остается в силе. При $k=0$ точка E лежит на оси Ox, прямая OE совпадает с осью Ox, а уравнение $y=kx$ превращается в $y=0$. Итак, при любом k уравнением прямой OE служит равенство $y=kx$.

Вернемся теперь к первоначальной прямой n; ее можно получить из вспомогательной прямой OE сдвигом в направлении оси Oy на отрезок b. Это значит, что каждая ее точка перемещается в направле-

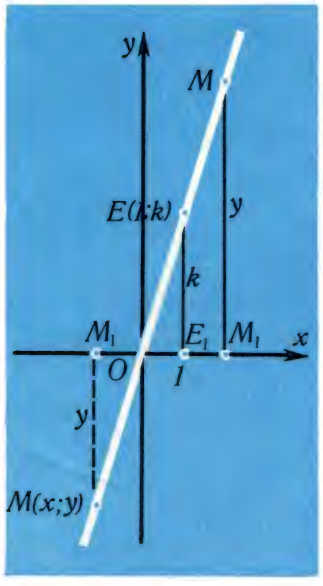


Рис. 11.

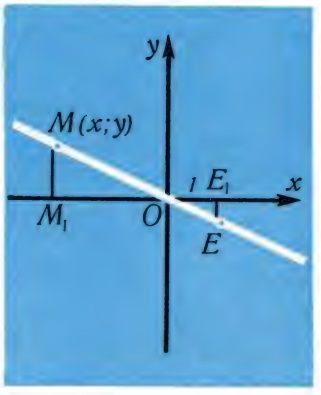


Рис. 12.

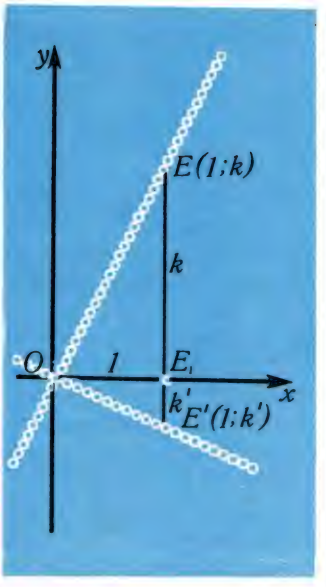


Рис. 13.

нии оси Oy на b (если $b>0$ — вверх, если $b<0$ — вниз). Ордината каждой точки при этом изменится на одно и то же число b, а абсцисса останется прежней; вместо уравнения $y=kx$ вспомогательной прямой мы теперь получим:

$$y=kx+b.$$

Это и будет уравнением прямой n. (Напомним, что ни одна чужая точка этому уравнению не удовлетворяет: для точек, лежащих выше нашей прямой, $y>kx+b$; для точек, лежащих ниже, $y<kx+b$; число k называется угловым коэффициентом прямой, b — начальной ординатой.)

Из треугольника OEE_1 легко выяснить геометрический смысл углового коэффициента прямой: это тангенс угла, который наша прямая образует с положительным направлением оси Ox. Если угол тупой, то k отрицательно.

2. *Всякое уравнение первой степени*

$$Ax+By+C=0 \qquad (3)$$

есть уравнение некоторой прямой. Действительно, A и B сразу оба не могут быть равны нулю (так как тогда наше уравнение не было бы уравнением первой степени). Пусть, например, $B\neq 0$, тогда уравнение можно разрешить относительно y; оно примет вид: $y=-\frac{A}{B}x-\frac{C}{B}$. Если теперь построить прямую с угловым коэффициентом k, равным $-\frac{A}{B}$, и начальной ординатой b, равной $-\frac{C}{B}$, то, как мы уже видели, ее уравнение будет: $y=kx+b$, или $y=-\frac{A}{B}x+\left(-\frac{C}{B}\right)$, оно равносильно заданному. (Случай $B=0$, $A\neq 0$ приведет к уравнению $x=-\frac{C}{A}$, т. е. x постоянно. Это уравнение прямой, параллельной оси Oy; при $C=0$ — сама ось Oy.)

Основные задачи на прямую

Как мы видели, прямая однозначно определяется ее уравнением. Поэтому уравнение прямой может служить как бы ее «именем»; постоянно говорят: «Прямая $Ax+By+C=0$»; это значит, что прямая задана уравнением $Ax+By+C=0$.

1) Построение прямой по ее уравнению. Чтобы построить прямую по ее уравнению, проще всего найти какие-нибудь две точки, удовлетворяющие этому уравнению; построив их, провести через них прямую.

Пример. Построить прямую $2x-3y+8=0$. Этому уравнению удовлетворяют точки $(-4;\ 0)$, $(-1;\ 2)$, $(5;\ 6)$, Строим какие-нибудь две из них (лучше не слишком близкие, иначе проведение через них прямой по линейке не будет достаточно точным), например $(-4;\ 0)$ и $(5;\ 6)$, и соединяем линейкой.

2) Даны две различные точки $A_1(x_1;\ y_1)$ и $A_2(x_2;y_2)$ Найти прямую A_1A_2. (Найти ее уравнение.)

Убедимся, что искомое уравнение можно записать так:

$$(x-x_1)\cdot(y_2-y_1)-(y-y_1)\cdot(x_2-x_1)=0. \qquad (4)$$

Прежде всего это уравнение первой степени относительно текущих координат x, y, значит, оно есть уравнение прямой. Подставляя вместо текущих координат x и y сначала x_1 и y_1, а затем x_2 и y_2, убеждаемся каждый раз, что уравнение обращается в тождество, значит, эта прямая проходит и через точку $(x_1;\ y_1)$, и через точку $(x_2;\ y_2)$.

Обычно уравнение (4) записывают в более удобной для запоминания форме:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}. \qquad (4')$$

Однако последняя перестает служить, если $x_1 = y_2$ или $y_1 = y_2$.

3) Даны две прямые: $Ax+By+C=0$ и $A'x+B'y+C'=0$. Найти точку их пересечения.

Точка пересечения лежит на той и на другой прямой, следовательно, ее координаты должны удовлетворять обоим уравнениям. Итак, для нахождения их надо решить совместно эти уравнения (система двух уравнений с двумя неизвестными).

4) Условие параллельности. Как следует из сказанного ранее, угловой коэффициент k характеризует направление прямой, поэтому равенство угловых коэффициентов двух прямых означает их параллельность. Так как $k = -\frac{A}{B}$, то условие параллельности ($k=k'$) прямых $Ax+By+C=0$ и $A'x+B'y+C'=0$ может быть записано и так:

$$A:B = A':B'. \qquad (5)$$

5) Условие перпендикулярности. Если прямые перпендикулярны, то углы α и α', образуемые ими с осью Ox, разнятся на 90°; $\alpha' = \alpha + 90°$, поэтому их угловые коэффициенты k и k' удовлетворяют равенству $kk' = -1$. Это легче всего усмотреть из рис. 13: на нем треугольник OEE' прямоугольный, k и $-k'$ служат проекциями катетов на гипотенузу, поэтому их произведение равно квадрату высоты: $k(-k') = OE_1^2 = 1$. Иначе условие перпендикулярности пишут в виде $k' = -\frac{1}{k}$ или, в силу равенств

$$k = -\frac{A}{B}, \quad k' = -\frac{A'}{B'},$$

в виде

$$AA' + BB' = 0. \qquad (6)$$

Задача 7. Через точку (2; −3) провести прямую, перпендикулярную прямой $4x-3y+2=0$.

Решение. Для изменения направления на перпендикулярное достаточно (выполняя условие (6)) поменять местами коэффициенты A и B и у одного из них изменить знак: $A=4$, $B=-3$; теперь возьмем $A'=+3$, $B'=4$. Уравнение искомой прямой уже можно написать: $3x+4y+C'=0$. Неизвестный пока член C' определится из требования, чтобы данная точка (2; −3) лежала на этой прямой $3\cdot 2+4\cdot(-3)+C'=0$, или $C'=6$.

Ответ: $3x+4y+6=0$.

6) Расстояние между точкой и прямой. Рассмотрим частный случай этой задачи: найти длину p перпендикуляра из начала O (0; 0) на прямую $Ax+By+C=0$. Решение удобно вести по такой схеме.

1. Найти уравнение перпендикуляра из O (0; 0) на $Ax+By+C=0$ (см. задачу 7).

Ответ: $Bx-Ay=0$.

2. Проекция O' начала O на данную прямую получается совместным решением уравнений:

$$Ax+By+C=0 \text{ и } Bx-Ay=0.$$

Ответ: $x = -\frac{CA}{A^2+B^2}$, $y = -\frac{CB}{A^2+B^2}$.

3. Остается найти искомое расстояние p как расстояние между O и O':

$$p = +\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2} = +\sqrt{\frac{C^2A^2}{(A^2+B^2)^2}+\frac{C^2B^2}{(A^2+B^2)^2}} = \frac{|C|}{+\sqrt{A^2+B^2}}. \qquad (7)$$

В общем случае задача: «Найти расстояние d от точки P_0 (x_0; y_0) до прямой $Ax+By+C=0$» — может быть решена тем же путем. В результате получим:

$$d = \frac{|Ax_0+By_0+C|}{+\sqrt{A^2+B^2}}, \qquad (7')$$

т. е. расстояние от точки (x_0; y_0) до прямой $Ax+By+C=0$ равно частному от деления абсолютной величины результата подстановки в левую часть уравнения прямой координат точки (x_0; y_0) на «нормирующий» корень $\sqrt{A^2+B^2}$.

Все приведенные в пунктах 1), 2), ..., 6) задачи следует научиться решать совершенно свободно, так сказать, «с закрытыми глазами».

Окружность

Как известно, окружностью называется множество точек плоскости, находящихся от заданной точки C этой плоскости (центра) на заданном расстоянии R (радиус). Запишем это определение аналитически относительно декартовой системы координат. Пусть C (a; b). Тогда для любой точки P (x; y) окружности $PC=R$, т. е.

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2} = R,$$

или

$$(x-a)^2+(y-b)^2 = R^2. \qquad (8)$$

Это и есть (общее) уравнение окружности. Раскрыв в нем скобки

$$x^2+y^2-2ax-2by+a^2+b^2-R^2=0,$$

убеждаемся, что это есть частный случай общего уравнения второй степени относительно x и y:

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0. \qquad (9)$$

В нашем случае $A=C=1$, $B=0$. Оказывается, что всякое уравнение второй степени относительно декар-

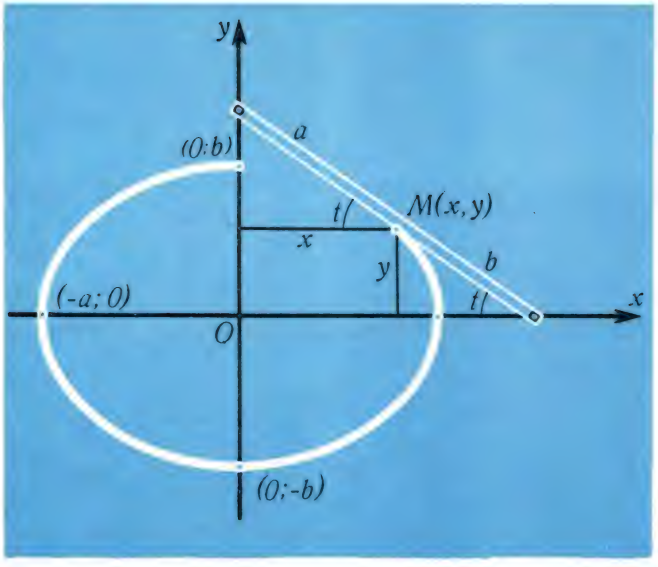


Рис. 14

товых координат x, y, в котором коэффициенты при x^2 и y^2 равны (и по абсолютной величине и по знаку: $A=C$), а коэффициент при xy равен нулю ($B=0$), либо является уравнением некоторой окружности (быть может, нулевого радиуса), либо ни одна (действительная) точка плоскости ему не удовлетворяет.

Задача 8. Построить окружность $2x^2+2y^2+3y=0$.

Пишем уравнение так:

$$x^2+y^2+\frac{3}{2}y+\frac{9}{16}=\frac{9}{16},$$

или

$$x^2+\left(y-\frac{3}{4}\right)^2=\left(\frac{3}{4}\right)^2$$

Сравнивая с общим уравнением окружности, видим, что $a=0$, $b=-\frac{3}{4}$; $R=\frac{3}{4}$

Теперь легко выполнить построение.

Если в общем уравнении 2-й степени $A\neq C$ или $B\neq 0$, то такое уравнение уже не будет уравнением окружности. Оказывается, возможны здесь только такие линии: парабола, эллипс (см. ниже, пример 2), гипербола или (если левая часть уравнения разлагается на множители первой степени) пара прямых. Все они называются *линиями второго порядка*. Впрочем, бывает и так, что ни одна точка плоскости уравнению не удовлетворяет, например: $2x^2+3y^2+1=0$ (мнимый эллипс).

Аналитическое решение геометрических задач

При решении геометрической задачи аналитическим методом прежде всего выбирают систему координат (от удачного выбора ее зависит простота вычислений). Затем находят в этой системе координаты заданных точек и уравнения заданных прямых, окружностей и т. д. Этим задача переводится на аналитический язык и превращается в задачу аналитической геометрии.

Пример 1. Доказать, что три высоты треугольника ABC всегда пересекаются в одной точке.

Пусть ось Oy проходит по высоте OC, а ось Ox — по соответствующему основанию AB. Координатное обозначение вершин: $A\ (-p;\ 0)$, $B\ (q;\ 0)$, $C\ (0;\ h)$ (h — высота, p, q — проекции сторон CA и CB на основание). По формуле (4) составляем уравнения боковых сторон:

$$hx-py+ph=0 \quad (CA),$$
$$hx+qy-qh=0 \quad (CB).$$

(Сделайте проверку: $(-p;\ 0)$ лежит на CA, $(0;\ h)$ — тоже.) Составляем уравнения боковых высот: $px+hy=pq$, $qx-hy=-pq$ (см. задачу 8). Точка пересечения $\left(0;\ \frac{pq}{h}\right)$, найденная совместным решением их уравнений, очевидно, лежит на третьей высоте, так как ее абсцисса равна нулю.

Пример 2. (Эллипс.) Выяснить, какую кривую опишет точка тонкой прямолинейной палочки, скользящей своими концами по неподвижным взаимно перпендикулярным прямым Ox и Oy.

Примем эти прямые за оси координат. Расстояния точки от концов палочки обозначим через a и b (постоянные числа, так как точка по палочке не двигается)

Обозначим через t (переменный) угол, образованный палочкой с отрицательным направлением оси Ox. На рис. 14 видно, что

$$x=a\cos t,\quad y=b\sin t$$

Эти два уравнения можно рассматривать как особый вид уравнений кривой. Здесь связь между x и y задана при помощи вспомогательного переменного (параметра) t. Такие уравнения кривой называются параметрическими. По ним построение кривой делают так: дают произвольные значения параметру t, каждый раз вычисляя соответствующие значения x и y, что определяет точку кривой. Так, точка за точкой, можно построить сколько угодно точек кривой. Если вы хотите получить обычное ее уравнение, следует исключить из параметрических уравнений параметр t (не всегда это легко сделать!), т. е. составить их следствие, не содержащее t. В данном случае, деля эти уравнения: первое — на a, второе — на b, возводя в квадрат и складывая, получим:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2=\sin^2 t+\cos^2 t.$$

или

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1. \qquad (10)$$

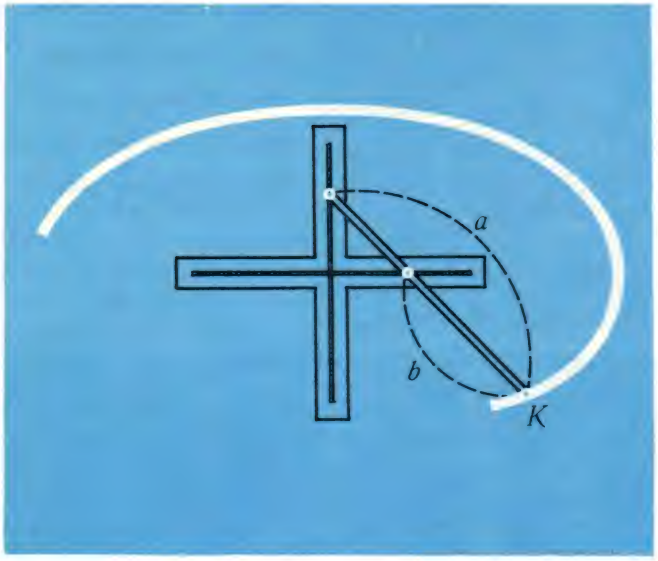


Рис. 15.

Это простейшее уравнение эллипса. Эллипс — кривая, получаемая из окружности равномерным растяжением или сжатием в одном направлении. Как известно, по эллипсам движутся планеты вокруг Солнца (первый закон Кеплера), Луна и искусственные спутники вокруг Земли.

Эллипсограф. Из рассмотренной только что задачи вытекает конструкция прибора для черчения эллипсов (эллиптический циркуль, или эллипсограф). Для этого нужно лишь к подвижной палочке прикрепить карандаш, который можно было бы закреплять винтом в различных положениях на палочке. Этот карандаш при описанном выше движении палочки вычертит эллипс, полуоси которого a, b зависят от того, в какой точке палочки закреплен карандаш. Из уравнения (10) следует, что середина палочки описывает окружность, ведь для середины $a=b$! На рис. 15 показан эллипсограф несколько иной конструкции.

Неразрешимые задачи на построение

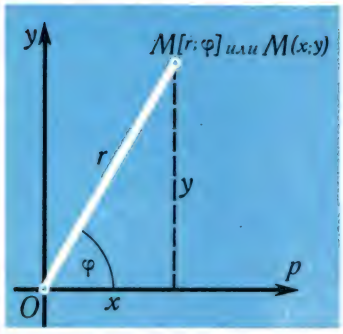
Сталкиваясь впервые с задачами на построение, которые не могут быть точно решены циркулем и линейкой, всякий испытывает сначала неудовлетворенность — как это нельзя решить? Между тем в этом нет ничего странного, просто циркуль и линейка — недостаточно сильные (может быть, лучше сказать — недостаточно тонкие) инструменты для решения некоторых задач. Таковы, например, задачи о делении произвольного угла на три равные части (трисекция угла) и об удвоении куба («Построить ребро куба двойного объема по сравнению с данным кубом»). Некоторые из таких задач становятся разрешимыми, если к линейке и циркулю присоединить, например, прибор, вычерчивающий параболу, или эллипсограф.

Чтобы разобраться, какие же задачи разрешимы с помощью циркуля и линейки, будем рассуждать так. Линейка дает возможность строить прямую, проходящую через две уже построенные точки, находить точки пересечения прямых. Присоединяя к линейке циркуль, мы можем строить окружности любых данных радиусов с заданным центром, находить точки пересечения двух окружностей и окружности с прямой. Подойдем к вопросу аналитически. Прежде всего заметим, что одна линейка дает возможность решать лишь задачи первой степени: например, пересечение двух прямых соответствует в декартовых координатах решению системы двух уравнений первой степени с двумя неизвестными. Присоединив циркуль, мы, оказывается, можем уже решать все задачи второй степени, т. е. такие, которые аналитически сводятся к решению ряда квадратных уравнений. Ведь пересечение прямой с окружностью означает совместное решение уравнения окружности и уравнения прямой; после исключения одной координаты получается квадратное уравнение (с одной неизвестной координатой). Пересечение двух окружностей можно заменить пересечением одной из них с хордой, проходящей через обе точки пересечения. Аналитически это вполне ясно. Напишем уравнения этих окружностей:

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0,$$
$$x^2 + y^2 + D'x + E'y + F' = 0.$$

Вычтя одно из другого, получим уравнение первой степени (это и есть уравнение упомянутой хорды). Значит, опять получается пересечение прямой с одной из окружностей, что (как уже было сказано) сводится к квадратному уравнению. Таким образом, циркуль и линейка способны решать лишь задачи, которые сводятся к последовательному решению ряда квадратных уравнений. Поэтому всякое уравнение, которое нельзя свести к решению ряда квадратных уравнений (например, $x^3=2$), не может быть решено графически циркулем и линейкой. Как раз задача об удвоении куба и есть задача о решении уравнения $x^3=2$: приняв за 1 ребро данного куба, для ребра x искомого получаем именно это уравнение. Задача о трисекции угла (кроме некоторых частных случаев, например угла в 90°) тоже оказывается задачей третьей степени, отсюда невозможность решения ее при помощи циркуля и линейки.

Если же воспользоваться прибором для черчения парабол, то, вычертив две параболы $x^2=y$ и $2x=y^2$, в пересечении получим точку, абсцисса которой как раз удовлетворяет уравнению $x^3=2$.



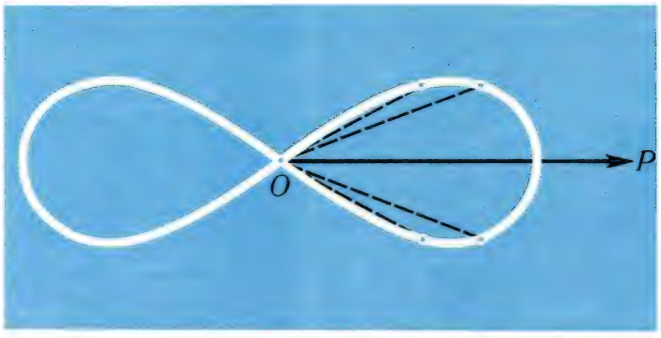


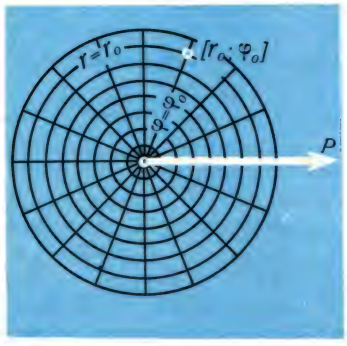
Рис. 16 (верхний левый).

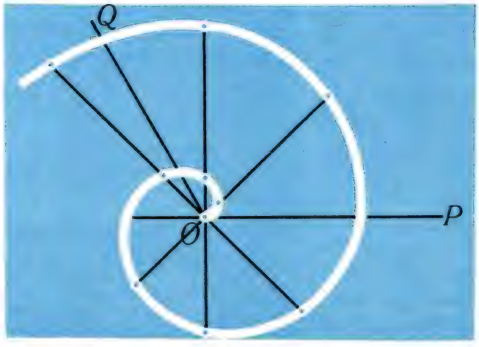
Рис. 17 (верхний правый).

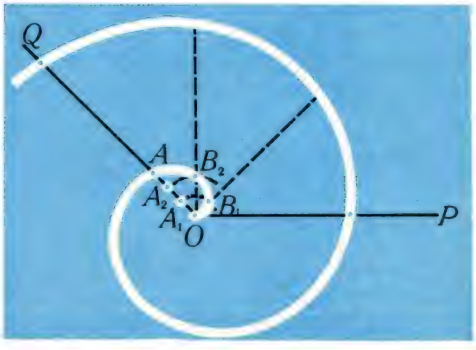
Рис. 18 (нижний левый).

Рис. 19 (справа от рис. 18).

Рис. 20 (нижний правый).







Полярные координаты

При решении многих задач удобнее пользоваться так называемыми полярными координатами: на плоскости выбирают неподвижную точку O (полюс) и выходящий из нее луч OP (полярная ось). Положение точки M в этом случае определяется двумя числами: ее расстоянием r от полюса и углом $\varphi = \angle POM$ (рис. 16). Числа r (полярный радиус) и φ (полярный угол) называются *полярными координатами* точки M.

Часто оказывается полезным рассматривать на плоскости полярную систему координат вместе с декартовой. Рассмотрим такое расположение, когда полюсом служит начало декартовой системы, а полярной осью — ось абсцисс (рис. 16); рисунок сам подсказывает связь между полярными и декартовыми координатами точки:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi. \end{cases} \qquad (11)$$

Эти формулы позволяют вычислить декартовы координаты, когда известны полярные.

Пример. Выяснить форму кривой

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$$

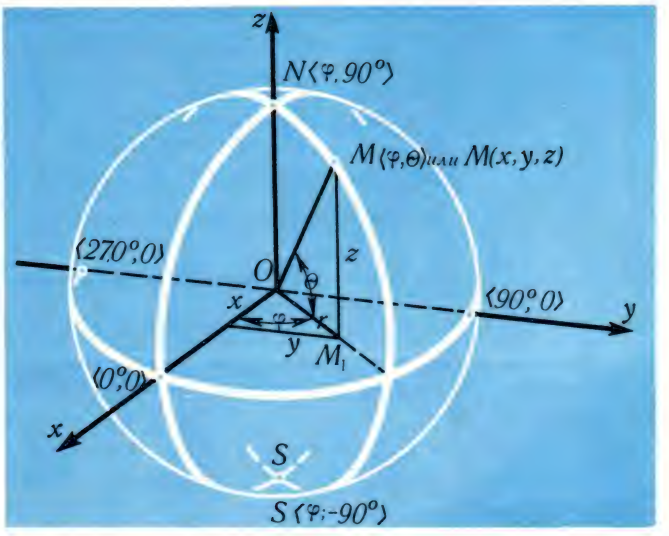
(она называется *лемнискатой*). Исследовать ее форму непосредственно по написанному уравнению не так легко. Перейдем к полярным координатам. Заменив x и y по формулам (11), получим: $r^4 = a^2r^2(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)$. Или, сократив на r^2 (при этом могла бы потеряться лишь одна точка $r = 0$), получим: $r^2 = a^2\cos 2\varphi$, или $r = \pm a\sqrt{\cos 2\varphi}$. По этому простому уравнению легко построить нашу кривую. Кривая строится по точкам (рис. 17). Даем φ различные значения, например: $\varphi = 0°$, $\pm 15°$, $\pm 30°$, $\pm 45°$, $\pm 135°$. Вычисляем соответствующие $r = a$, $a\sqrt{3/4}$, $a\sqrt{1/2}$, 0, 0. При значениях φ между 45° и 135°, а также между 225° и 315° косинус отрицателен и поэтому r мнимо: у кривой нет точек с такими значениями полярного угла.

Точки, у которых полярный радиус имеет постоянное значение $r = r_0$, образуют окружность радиуса r_0, описанную вокруг полюса. При постоянном значении угла φ, $\varphi = \varphi_0$, получается луч, выходящий из полюса и наклоненный под углом φ_0 к полярной оси. Полученные таким образом (т. е. при постоянном значении одной координаты) линии называются *координатными* (рис. 18). В декартовой системе координатные линии — прямые, параллельные осям.

Спираль Архимеда. Эта кривая задается в полярных координатах уравнением $r = C\varphi$, где C — постоянная (рис. 19).

При помощи этой кривой любой угол можно делить на произвольное число (например, на три — трисекция угла) равных частей. Вот как это делается (рис. 20). Пусть на листе бумаги начерчена спираль Архимеда, выходящая из полюса O полярной системы координат, полярная ось OP служит для спирали касательной. Перенесем на этот чертеж заданный нам для разделения на n равных частей угол так, чтобы его вершина совпадала с полюсом, одна сторона — с полярной осью OP, а другая его

Рис. 21.



сторона — OQ легла в сторону возрастания полярного угла φ (против часовой стрелки). Обозначим первую (считая от O) точку пересечения этой другой стороны с нашей спиралью буквой A; затем разделим отрезок OA на n равных частей (что, как вы знаете, легко делается циркулем и линейкой) и проведем через точки A_1, A_2, деления отрезка OA дуги окружностей с общим центром O до пересечения со спиралью; наконец, полученные точки B_1, B_2, ... пересечения соединим с полюсом — и данный угол POQ разделен на n равных частей! Докажите это сами.

Координаты на сфере

Положение точки на сфере удобнее всего задавать так, как это делается в географии. На данной сфере радиуса R выберем какие-нибудь две диаметрально противоположные точки, одну из них — N назовем условно северным полюсом, другую — S — южным. Какой-нибудь из «меридианов» (кратчайший путь по сфере из S в N) назовем начальным меридианом; проходящую через центр O сферы и перпендикулярную оси SN плоскость назовем экваториальной, а пересечение ее со сферой — экватором, на экваторе изберем направление, скажем, против часовой стрелки, если смотреть из N. Положение любой точки M на сфере определяется двумя координатами, одна из них, назовем ее долготой,— угол φ между плоскостью начального меридиана и плоскостью, проходящей через M и ось SN (угол должен отсчитываться в направлении, соответствующем выбранному на экваторе). Широтой точки M будем называть угол θ между радиусом OM и плоскостью экватора (θ считается положительным для точек северного полушария и отрицательным для южного). Будем писать: $M\langle\varphi;\ \theta\rangle$, ставя на первое место долготу, на второе — широту.

Пример. Проверьте правильность координатного обозначения точек на рис. 21.

Все точки с одинаковой долготой φ_0 заполняют меридиан, уравнение которого поэтому $\varphi=\varphi_0$. Все точки с одинаковой широтой θ_0 заполняют параллель $\theta=\theta_0$. Уравнение, связывающее текущие координаты φ и θ, определяет, как и в плоской геометрии, кривую; неравенство, соответствующее этому уравнению, определяет одну или несколько областей, на которые эта кривая разделяет сферу. Так, неравенство $\theta<0$ определяет южную полусферу, $\theta>0$ — северную; уравнение $\theta=0$ есть уравнение экватора.

Если сферу отнести к декартовым координатам в пространстве, приняв центр O сферы за начало, ось SN — за ось z, ось x направив через точку $\langle 0°;\ 0°\rangle$, ось y — через $\langle 90°;\ 0°\rangle$, то декартовы координаты x, y, z любой точки M сферы легко выразить через долготу и широту этой точки. Для этого выразим сначала координаты ее проекции M_1 на плоскость Oxy, где обычным образом расположим полярную систему координат. Из рис. 21 видно, что для M_1 (x; y; 0) полярный радиус $r=R\cos\theta$, а полярный угол φ совпадает с долготой точки M. Кроме того, $z=R\sin\theta$. Учитывая формулы (11), получим:

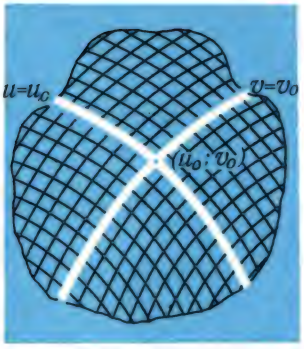
$$\begin{cases} x=R\cos\theta\cos\varphi, \\ y=R\cos\theta\sin\varphi, \\ z=R\sin\theta. \end{cases} \qquad (12)$$

По этим формулам вычисляют декартовы координаты точки M (x; y; z), если известны φ и θ.

На эти же формулы можно взглянуть и с другой точки зрения. Будем считать φ и θ переменными, придавая им всевозможные значения в естественных пределах $0°\leqslant\varphi<360°$, $-90°\leqslant\theta\leqslant+90°$; тогда точка $M\langle\varphi;\ \theta\rangle$ будет перемещаться по сфере, занимая всевозможные положения. Это напоминает параметрические уравнения линии, в которых декартовы координаты x, y, z выражены через один переменный параметр t. Разница лишь в том, что теперь x, y, z выражены через два параметра, поэтому получается не линия (одномерное образование), а поверхность (образование двумерное). Подобные уравнения называют параметрическими уравнениями поверхности; переменные параметры чаще всего здесь обозначают буквами u и v. Итак, параметрические уравнения сферы запишем в виде:

$$\left.\begin{array}{l} x=R\cos v\cdot\cos u, \\ y=R\cos v\cdot\sin u, \\ z=R\sin v, \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} 0°\leqslant u<360°, \\ -90°\leqslant v\leqslant+90°. \end{array} \qquad (13)$$

Если из этих уравнений исключить параметры u, v (для этого проще всего возвести уравнения (13) в квадрат и сложить), получим обычное уравнение сферы: $x^2+y^2+z^2=R^2$.



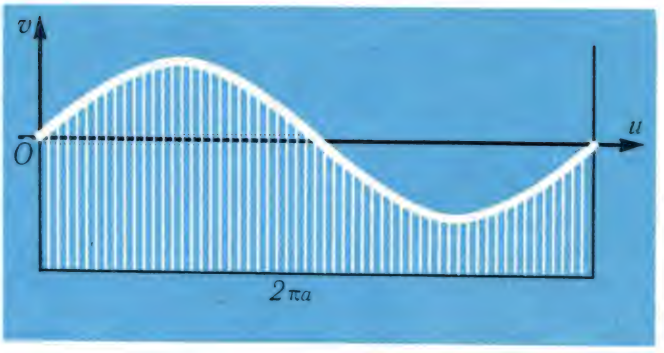


Рис. 22 (левый).

Рис. 24 (правый).

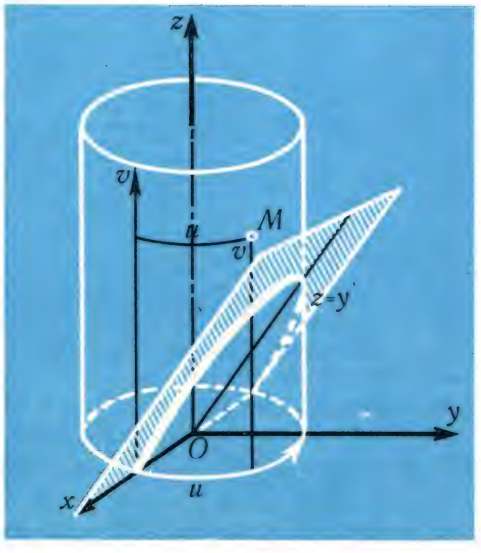


Рис. 23.

Криволинейные координаты на любой поверхности Общая идея координат

На любой поверхности можно установить координатную систему, определяя положение точки на ней опять-таки двумя числами. Для этого каким-либо способом покроем всю поверхность двумя семействами линий так, чтобы через каждую ее точку (быть может, за небольшим числом исключений) проходила одна, и только одна, линия из каждого семейства. Теперь надо лишь снабдить линии каждого семейства числовыми пометками по какому-нибудь твердому правилу, позволяющему по числовой пометке находить нужную линию семейства (рис. 22). Координатами точки M поверхности служат числа u, v, где u — числовая пометка линии первого семейства, проходящей через M, и v — пометка линий второго семейства. По-прежнему будем писать: $M(u; v)$; числа u, v называются *криволинейными координатами* точки M. Сказанное станет совсем ясным, если за примером обратиться к сфере. Ее всю можно покрыть меридианами (первое семейство); каждому из них соответствует числовая пометка, а именно значение долготы u (или φ). Все параллели образуют второе семейство; каждой из них отвечает числовая пометка — широта v (или θ). Через каждую точку сферы (исключая полюсы) проходит только один меридиан и одна параллель.

В качестве еще одного примера рассмотрим боковую поверхность прямого круглого цилиндра высоты H, радиуса a (рис. 23). За первое семейство примем систему его образующих, одну из них примем за начальную. Каждой образующей припишем пометку u, равную длине дуги на окружности основания между начальной образующей и данной (дугу будем отсчитывать, например, против часовой стрелки). За второе семейство примем систему горизонтальных сечений поверхности; числовой пометкой v будем считать высоту, на которой проведено сечение над основанием. При надлежащем выборе осей x, y, z в пространстве будем иметь для любой точки $M(x; y; z)$ нашей поверхности:

$$x = a\cos\frac{u}{a}, \quad y = a\sin\frac{u}{a}, \quad z = v \qquad (14)$$

$$0 \leqslant u < 2\pi a, \quad 0 \leqslant v \leqslant H.$$

(Здесь аргументы выражены не в градусах, а в радианах.) Эти уравнения можно рассматривать как параметрические уравнения поверхности цилиндра.

Задача 9. По какой кривой надо вырезать кусок жести для изготовления колена водосточной трубы, чтобы после надлежащего изгибания получился цилиндр радиуса a, усеченный плоскостью под углом 45° к плоскости основания?

Решение. Воспользуемся параметрическими уравнениями поверхности цилиндра:

$$x = a\cos\frac{u}{a},$$

$$y = a\sin\frac{u}{a},$$

$$z = v.$$

Секущую плоскость проведем через ось Ox, ее уравнение $z = y$. Комбинируя его с только что написанными уравнениями, получим уравнение $v = a\sin\frac{u}{a}$ линии пересечения в криволинейных координатах. После развертки поверхности на плоскость криволинейные координаты u и v превратятся в декартовы.

Итак, кусок жести должен быть сверху очерчен по синусоиде $v = a\sin\frac{u}{a}$. Здесь u и v уже декартовы координаты на плоскости (рис. 24).

Как в случае сферы и цилиндрической поверхности, так и в общем случае задание поверхности параметрическими уравнениями влечет за собой установление на поверхности криволинейной системы координат. Действительно, выражение декартовых координат x, y, z произвольной точки M $(x; y; z)$ поверхности через два параметра u, v (это в общем случае записывают так: $x = \varphi(u; v)$, $y = \psi(u; v)$, $z = \omega(u; v)$; φ, ψ, ω — функции двух аргументов) дает возможность, зная пару чисел u, v, найти соответствующие координаты x, y, z, а значит, положение точки M на поверхности; числа u, v служат ее координатами. Давая одной из них постоянное значение, например, $u = u_0$, получим выражение x, y, z через один параметр v, т. е. параметрическое уравнение кривой. Это координатная линия одного семейства, ее уравнение $u = u_0$. Точно так же линия $v = v_0$ — координатная линия другого семейства.

Функции в природе и технике

Одним из самых важных понятии в математике и ее приложениях является понятие *функции*. Всюду, где есть величины, связанные так, что с изменением одних (аргументов) меняются другие (функции), мы имеем дело с *функциональной зависимостью*. Эта зависимость может задаваться по-разному — формулами, графиками, таблицами. Бывают случаи, когда зависимость нельзя выразить формулой. Например, температура воздуха меняется с течением времени, однако формулы, выражающей температуру воздуха в данный момент времени, нет (как легко жилось бы метеорологам, если бы такая формула была!). В не-

которых случаях приходится довольствоваться графиком функции (например, самопищущий прибор термограф дает график температуры воздуха как функции времени) или только таблицей значений функции для некоторых значений аргумента.

Чаще всего, однако, для описания функций пользуются формулами. В школе изучают случаи, когда эти формулы сравнительно просты. Например, зависимость площади круга от его радиуса выражается формулой $S=\pi r^2$, тока от сопротивления — формулой $I=\frac{V}{R}$ и т. д.

Возникает вопрос: встречаются ли на практике зависимости, выражаемые с помощью более сложных функций, например многочленов высоких степеней, показательной, логарифмической и тригонометрических функций?

Мы расскажем здесь о некоторых случаях, когда такие функции встречаются в задачах физики и техники.

Жесткость балки

Балками в технике называют деревянные или металлические брусья, на которых лежат перекрытия зданий.

Балки должны выдерживать вес перекрытий и предметов, находящихся в здании. Под этой тяжестью они изгибаются. Если балки изогнутся слишком сильно, перекрытие может рухнуть. Поэтому до постройки здания надо рассчитать, выдержат ли балки нагрузку. Этими расчетами занимается специальная наука — *сопротивление материалов*.

Прогиб балки зависит от очень многих причин. Под одной и той же нагрузкой деревянная балка изогнется сильнее, чем стальная, длинная — сильнее, чем короткая, тонкая — сильнее, чем толстая. Зависимость прогиба балки от материала, из которого она сделана, связана с особой величиной E, называемой модулем упругости (модулем Юнга).

Исследование этой зависимости прогиба балки от материала скорее дело физики, чем математики. Математиков больше интересует зависимость прогиба от длины балки и от размеров и формы ее сечения. А то, что форма сечения влияет на прогиб, легко видеть из простого опыта. Обычную школьную линейку легко согнуть, если положить ее плашмя, и трудно, если поставить на ребро (рис. 1). Этот опыт показывает еще, что прогиб зависит не от площади сечения (ведь площадь сечения линейки одна и та же, лежит она плашмя или поставлена на ребро). Оказывается, дело не в площади сечения, а в его *моменте инерции*. Момент инерции I подсчитывают так. Сечение балки мысленно разрезают на очень тонкие горизонтальные слои и площадь каждого слоя умножают на квадрат расстояния этого слоя от среднего слоя. Сумма этих произведений и дает момент инерции сечения балки. Подсчеты показывают, что момент инерции для круглого сечения радиуса R равен $\frac{\pi R^4}{4}$, а для квадратного сечения со стороной a равен $\frac{a^4}{12}$.

Произведение EI модуля Юнга на момент инерции сечения балки называют *жесткостью* балки. Чем больше жесткость, тем труднее изогнуть балку. Можно увеличить жесткость балки, не меняя площади ее сечения. Для этого надо сосредоточить основную массу балки на большом расстоянии от среднего слоя, например придать балке одну из форм, изображенных на рис. 2. Поэтому, например, в велосипедах делают корпус не из сплошных стержней, а из труб.

Прогиб балки

Прогиб балки зависит не только от ее жесткости, но и от длины балки, распределения нагрузки, от того, заделаны ли в стену оба конца балки или только один, и т. д. Чтобы найти наибольший прогиб балки, надо знать форму, которую она принимает после изгиба.

Возьмем балку длины l, заделаем оба ее конца в стены и положим на нее равномерно распределенную нагрузку Q. Тогда прогиб y в точке, находящейся на расстоянии x от левого конца балки (рис. 3), выражается формулой:

$$y=\frac{Q}{24EIl}(x^4-2lx^3+l^2x^2),$$

т. е. многочленом четвертой степени. График этого многочлена изображен на рис. 3. Ясно, что самый большой прогиб балки будет в середине, т. е. при $x=\frac{l}{2}$. Он равен $y_{\max}=\frac{Ql^3}{384EI}$.

Балки, на которые опираются балконы, заделывают в стену лишь одним концом, второй оставляют свободным. Такие балки называются *консольными*.

Рис. 1 (верхний). Линейку легко согнуть, если положить ее плашмя (фото слева), и трудно, если поставить на ребро (фото справа).

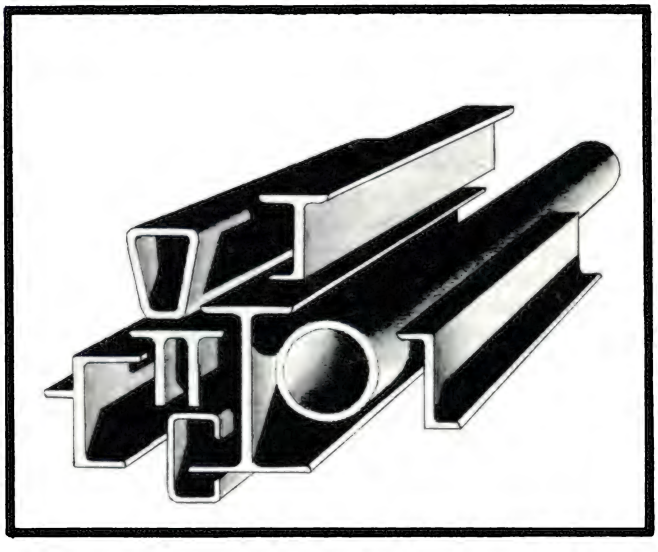
Рис. 2 (второй снизу). Балки различной формы сечения.

Рис. 3 (нижний). Сплошной белой линией показан (в значительно увеличенном по оси Oy масштабе) прогиб балки, заделанной на концах, под действием равномерно распределенной нагрузки.

Форма равномерно нагруженной консольной балки (рис. 3а, стр. 322) выражается уравнением:

$$y = \frac{Q}{24EIl}(x^4 - 4lx^3 + 6l^2x^2).$$

Здесь уже наибольший прогиб будет на свободном конце балки, при $x = l$. Он в 48 раз больше, чем для такой же балки, оба конца которой заделаны.



Сосредоточенная нагрузка

Прогиб балки зависит и от того, как распределена нагрузка. Возьмем балку, оба конца которой свободно лежат на опорах, а нагрузку Q соберем в одну точку — середину балки (рис. 4, стр. 322). Тогда форма балки будет задаваться не одним, а двумя уравнениями. Для левой половины балки прогиб равен:

$$y_{\text{лев}} = \frac{Q}{48EI}(3l^2x - 4x^3),$$

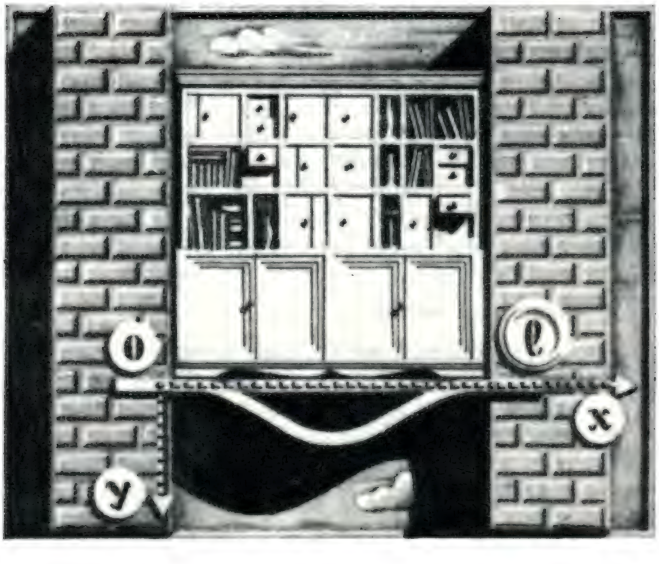
а для правой:

$$y_{\text{прав}} = \frac{Q}{48EI}[3l^2(l - x) - 4(l - x)^3].$$

Наибольший прогиб равен:

$$y_{\max} = \frac{Ql^3}{48EI}.$$

Замечательно, что в этом случае одна и та же функция — прогиб балки в точке, находящейся на расстоянии x от левого конца, — выражается не одной, а двумя различными формулами.



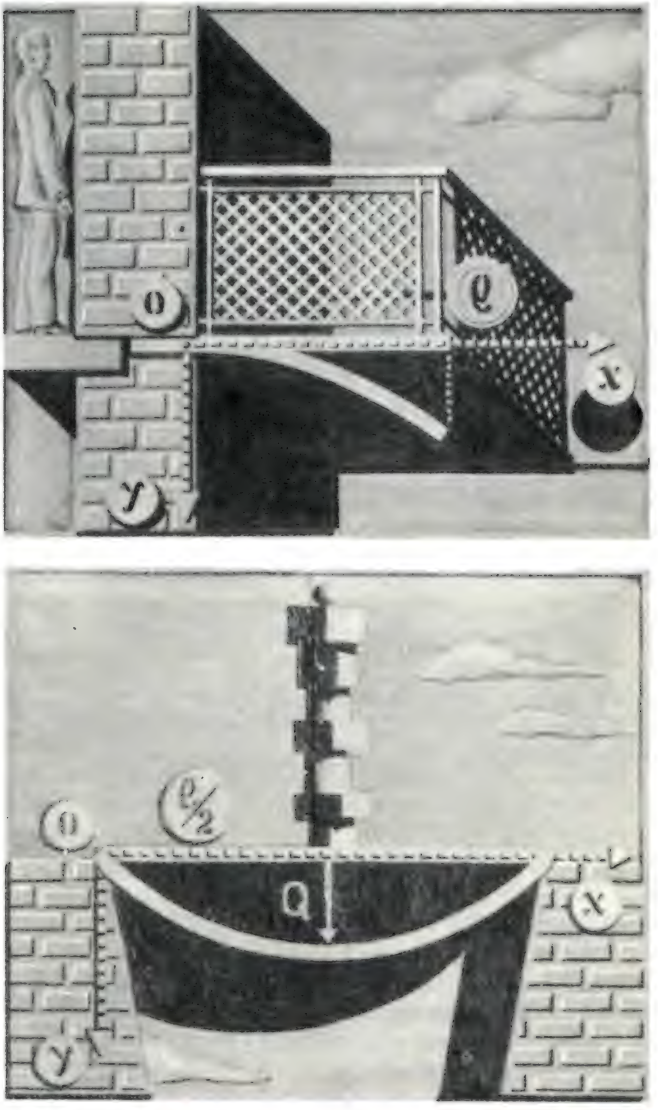


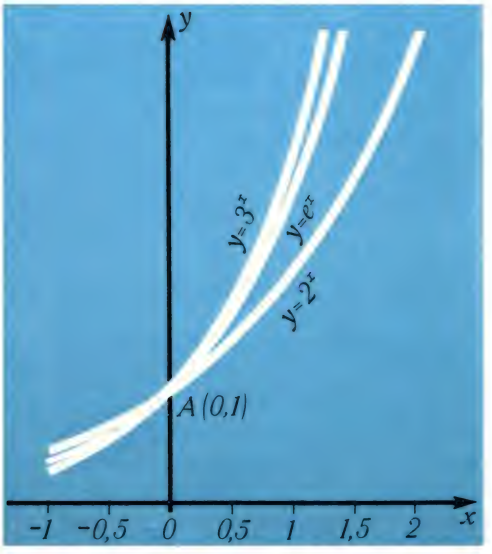
Рис. 3а (верхний). Сплошной белой линией показан (в значительно увеличенном по оси Oy масштабе) прогиб консольной балки под действием равномерно распределенной нагрузки.

Число e. Натуральные логарифмы

Перейдем теперь к случаям, когда зависимость выражается показательной функцией. При записи законов физики, связанных с показательной функцией, удобно пользоваться особым числом, которое называется *числом e*. Это число можно определить следующим образом. Начертим графики функций $y=a^x$ при разных значениях основания a ($a>1$). Чем больше это основание, тем круче поднимаются вверх графики (рис. 5). Эти графики в точке A (0; 1) под разными углами пересекают ось Oy. Например, угол между осью Oy и кривой $y=2^x$ равен приблизительно 55°15′ (углом между двумя пересекающимися кривыми называется угол между касательными к этим кривым, проходящими через точку пересечения кривых), а для кривой $y=3^x$ этот угол равен примерно 42°20′. Поэтому найдется такое число e, лежащее между 2 и 3, что кривая $y=e^x$ пересечет ось Oy под углом 45°.

Более точные подсчеты показывают, что число e равно 2,71828... . Логарифмы по основанию e называются *натуральными*. Они обозначаются $\ln x$. Если мы знаем десятичный логарифм числа, то его натуральный логарифм можно найти по формуле $\ln x=\frac{\lg x}{M}$, где $M=\lg e=0{,}43429...$ — так называемый модуль перехода.

Рис. 5.



Один человек может удержать корабль

Когда судно подходит к берегу, с него бросают на пристань канат. Здесь канат обматывают несколько раз вокруг столба и таким образом удерживают им судно. Как же удается одному человеку удержать судно? Оказывается, ему помогает сила трения. Если обмотать канат один раз вокруг столба, то из-за трения каната о столб можно уравновесить силой F_0 силу F, большую, чем F_0, в a раз. Отношение $\frac{F}{F_0}=a$ зависит от материала, из которого сделаны канат и столб. Например, если канат пеньковый, а столб железный, то $a=3{,}5$. Иными словами, силой в 100 Н можно уравновесить (используя «помощь» силы трения) силу в 350 Н. Каждый новый оборот каната вокруг столба увеличивает отношение сил еще в a раз. Таким образом, если обернуть канат два раза, то отношение удерживаемой и удерживающей сил будет

Рис. 4 (на стр. 322 в середине). Сплошной белой линией показан (в значительно увеличенном по оси Oy масштабе) прогиб балки, концы которой свободно лежат на опорах, под действием сосредоточенной нагрузки.

равно a^2, а если три раза, то $\frac{F}{F_0} = a^3$. Вообще если число оборотов равно x (x может и не быть целым числом), то $\frac{F}{F_0} = a^x$. Если обмотать пеньковый канат вокруг железного столба два раза, то силой в 10 Н можно уравновесить силу примерно в 0,1 кН, а при трехкратном обматывании — силу в 0,4 кН.

Радиоактивный распад вещества

Когда радиоактивное вещество распадается, его количество уменьшается. Через некоторое время остается половина первоначального количества вещества. Этот промежуток времени t_0 называется *периодом полураспада* вещества. Если пройдет еще t_0 лет, то из оставшейся половины распадется еще половина вещества и останется только четверть первоначального количества. Вообще через t лет масса m вещества будет равна:

$$m = m_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{t_0}},$$

где m_0 — первоначальная масса вещества. Чем больше период полураспада, тем медленнее распадается вещество.

Например, у урана-238 период полураспада равен 4,5 млрд. лет. Значит, за все время существования Земли не распалось еще и половины первоначального запаса урана. А вот у радия период полураспада равен всего 1590 годам. Если бы миллион лет назад вся Земля состояла из радия, то сейчас на ней не осталось бы и одного атома радия. Существует же он лишь потому, что при распаде урана все время появляются новые атомы радия.

Остывание чайника

Вы, наверное, замечали, что если снять кипящий чайник с огня, то сначала он быстро остывает, а потом остывание идет гораздо медленнее. Дело в том, что скорость остывания пропорциональна разности между температурой чайника и температурой окружающего воздуха. Чем меньше становится эта раз-

Три геометрические головоломки

1

Не вычисляя площадей треугольников со сторонами $a=5$, $b=5$, $c=6$, $a_1=5$, $b_1=5$, $c_1=8$, выяснить, равновелики ли они.

2

Найти три равновеликих прямоугольных треугольника при условии, что все 9 сторон — различные целые числа.

3

Трех плоских разрезов достаточно, чтобы перестроить брусок размером $24\times8\times9$ в куб. Как добиться наименьшего возможного числа частей, на которые распадается брусок?

Ответы на стр. 331.

Много ли таких чисел!

Десятизначное число 4 938 271 605 с неповторяющимися цифрами при делении на 9 дает симметричное частное. Действительно,

$$4\,938\,271\,605 : 9 = 548\,696\,845.$$

Полученный результат одинаково читается как слева направо, так и справа налево.

Таким же свойством обладают числа 2 165 904 378 и 2 934 815 607 — убедитесь самостоятельно!

Любознательным школьникам удалось обнаружить еще несколько аналогичных десятизначных чисел с неповторяющимися цифрами, каждое из которых при делении на 9 дает симметричное частное.

Не пожелает ли кто-нибудь составить наиболее полный набор таких чисел или изобрести способ (правило) их получения?

Сомножители, производящие кучу нулей

Попытайтесь получить тысячу миллионов (1 000 000 000), перемножая два целых числа, в каждом из которых не было бы ни одного нуля.

Это не головоломка, для решения которой потребовалось бы выполнить много испытаний. Опираясь лишь на самые начальные сведения из алгебры, можно найти метод подбора требуемых сомножителей.

А если метод будет найден, то вы с удовольствием и без больших усилий убедитесь в том, что и квинтильон (1 000 000 000 000 000 000) легко разлагается на два сомножителя, в каждом из которых нет ни одного нуля.

Ответ на стр. 354.

Рис. 6. Парашютист опускается на землю равномерно.

ность, тем медленнее остывает чайник. Если сначала температура чайника равнялась T_0, а температура воздуха T_1, то через t секунд температура T чайника выразится формулой:

$$T = (T_0 - T_1)e^{-kt} + T_1,$$

где k — число, зависящее от формы чайника, материала, из которого он сделан, и количества воды, которое в нем находится.

Почему парашютист падает равномерно

При падении тел в безвоздушном пространстве скорость их непрерывно возрастает. При падении тел в воздухе скорость падения тоже увеличивается, но не может превзойти определенной величины.

Рассмотрим задачу о падении парашютиста. Если считать, что сила сопротивления воздуха пропорциональна скорости падения парашютиста, т. е. что $F = kv$, то через t секунд скорость падения будет равна:

$$v = \frac{mg}{k}\left(1 - e^{-\frac{kt}{m}}\right)$$

где m — масса парашютиста. Через некоторый промежуток времени $e^{-\frac{kt}{m}}$ станет очень маленьким числом и скорость падения будет почти в точности равна $\frac{mg}{k}$, т. е. падение станет почти равномерным (рис. 6). Коэффициент пропорциональности k зависит от размеров парашюта.

Написанная формула пригодна не только для изучения падения парашютиста, но и для изучения падения капли дождевой воды, пушинки и т. д. Из нее видно, что чем меньше отношение $\frac{mg}{k}$, тем медленнее падает тело. Этим и объясняется, почему пушинка падает медленнее камня: у нее маленькая масса, а площадь поверхности довольно большая, и воздух оказывает значительное сопротивление ее падению.

Как измеряют высоту при помощи барометра

Чем выше поднимаются в гору альпинисты, тем меньше становится давление воздуха. Этим можно воспользоваться для того, чтобы с помощью барометра определять высоту подъема. Как показывают расчеты, при постоянной температуре воздуха разность высот двух точек выражается следующей формулой:

$$h_2 - h_1 = \frac{p_0(t_0 + 273{,}1)}{W_0} \ln \frac{p_1}{p_2}.$$

Здесь p_1 и p_2 — давление воздуха на высотах h_1 и h_2, p_0 — давление воздуха на уровне моря, W_0 — масса 1 м³ воздуха при температуре 0°С и давлении p_0, t_0 — температура воздуха в °С.

Эта формула верна для не слишком больших высот. На больших высотах имеют место другие законы изменения давления с высотой.

Вообще любая физическая формула имеет ограниченную область применения — она верна при одних условиях и перестает быть верной при других. Дело в том, что при выводе любой физической формулы делаются некоторые допущения, верные лишь приблизительно. Когда же эти допущения перестают быть верными, формула теряет силу.

Сколько топлива должна взять ракета

Много трудных математических задач приходится решать в теории межпланетных путешествий. Одной из них является задача об определении массы топлива, необходимого для того, чтобы придать ракете нужную скорость v. Эта масса M зависит от массы m самой ракеты (без топлива) и от скорости v_0, с которой продукты горения вытекают из ракетного двигателя.

Если пренебречь сопротивлением воздуха и притяжением Земли, то масса топлива определится формулой:

$$M = m\left(e^{\frac{v}{v_0}} - 1\right)$$

(формула К. Э. Циолковского). Например, для того чтобы ракете с массой 1,5 т придать скорость 8000 м/с, надо при скорости истечения газов 2000 м/с взять примерно 80 т топлива.

Если бы удалось увеличить скорость истечения газов до 4000 м/с, то понадобилось бы всего 10 т топлива. Вообще чем с большей скоростью v_0 вытекают газы из ракеты, тем меньше будет $e^{\frac{v}{v_0}}$ и тем меньше понадобится топлива. Другой способ уменьшения массы топлива заключается в замене одноступенчатых ракет многоступенчатыми.

Гармонические колебания

Мы рассмотрели несколько примеров из физики и техники, в которых так или иначе встречается показательная функция. Сейчас перейдем к рассмотрению примеров, связанных с тригонометрическими функциями.

Начнем с гармонических колебаний. Возьмем, например, гирю, подвешенную на пружине (рис. 7), и толкнем ее вниз. Гиря начнет колебаться вниз и вверх. Как показывают расчеты, отклонение гири от положения равновесия выражается формулой:

$$s = \frac{v_0}{\omega}\sin \omega t.$$

Здесь v_0 — скорость, с которой мы толкнули гирю, а $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$, где m — масса гири и k — жесткость

Рис. 7.

пружины (сила, которая нужна, чтобы растянуть пружину на 1 см).

Колебания, происходящие по закону

$$s = A\sin \omega t, \qquad (1)$$

называют *синусоидальными* или *гармоническими*, а график функции (1) — *синусоидой*. Мы можем получить представление о таких колебаниях, следя за движением равномерно вращающейся точки и наблюдая это движение одним глазом сбоку (так, что глаз наблюдателя находится в плоскости вращения). Нам будет казаться, что точка не вращается, а движется то в одну сторону, то в другую. Такую картину наблюдают астрономы, следя за движением спутников Юпитера, когда Земля находится в плоскости орбиты этих спутников.

Число A, называемое *амплитудой* синусоидального колебания, показывает размах этого колебания, а число ω, называемое *частотой* колебания, показывает, сколько колебаний происходит за 2π секунд (т. е. примерно за $44/7$ с). Через каждые $\frac{2\pi}{\omega}$ секунд гиря будет возвращаться в исходное положение. Поэтому *период* ее колебания равен $\frac{2\pi}{\omega}$.

Если мы сначала оттянем гирю на s_0 см, а потом толкнем ее со скоростью v_0, то она будет совершать колебания по более сложному закону:

$$s = A\sin(\omega t + \alpha). \qquad (2)$$

Расчеты показывают, что амплитуда A этого колебания равна $\sqrt{s_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}}$, а число α таково, что $\operatorname{tg}\alpha = \frac{s_0\omega}{v_0}$. Из-за слагаемого α это колебание отличается от колебания $s = A\sin\omega t$. На рис. 8 и 9 изображены графики обоих колебаний. График колебания (2) получается из графика колебания (1) сдвигом влево на $\frac{\alpha}{\omega}$. Число α называют *начальной фазой*.

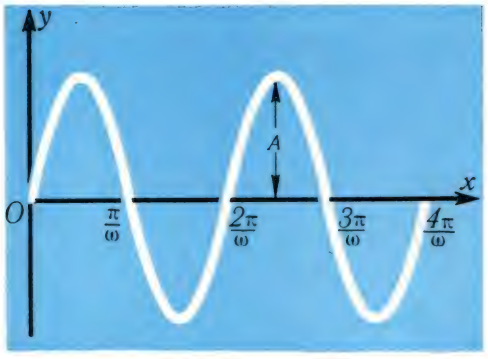


Рис. 8 (левый верхний). График гармонического колебания.

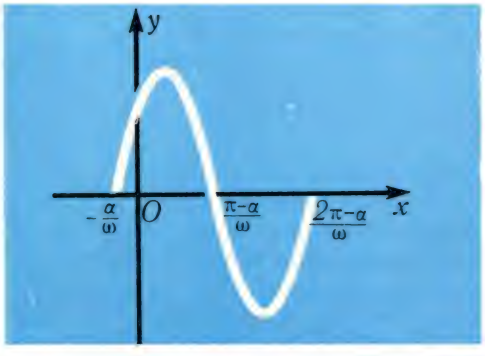


Рис. 9 (левый нижний). График колебательного движения с начальной фазой.

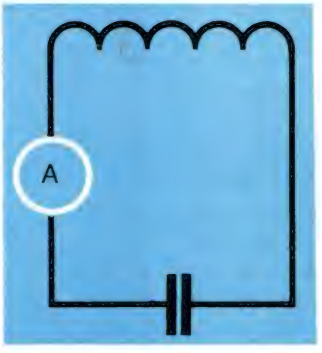


Рис. 10 (в середине).

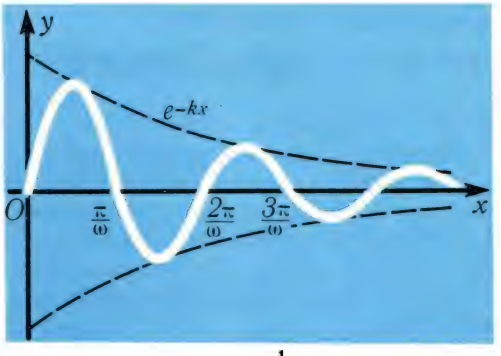


Рис. 11 (правый). График затухающего колебания.

Частота ω колебаний тока равна $\frac{1}{\sqrt{LC}}$, где C — емкость конденсатора, а L — самоиндукция цепи. Этот закон очень похож на закон колебаний гири, только вместо жесткости пружины надо взять величину, обратную емкости конденсатора, а вместо массы гири — самоиндукцию катушки.

Колебания маятника

Колебания маятника тоже приближенно происходят по синусоидальному закону. Если эти колебания малы, то угол отклонения маятника приближенно выражается формулой:

$$\varphi = \varphi_0 \sin\left(t\sqrt{\frac{g}{l}}\right),$$

где l — длина маятника, а φ_0 — наибольший угол отклонения. Чем длиннее маятник, тем медленнее он качается. Измеряя период колебания маятника известной длины, можно вычислять ускорение земного тяготения g в различных точках земной поверхности.

Разряд конденсатора

Не только многие механические колебания происходят по синусоидальному закону. И в электрических цепях возникают синусоидальные колебания. Замкнем, например, цепь, изображенную на рис. 10. Сила тока в этой цепи будет изменяться по тому же закону:

$$I = I_0 \sin(\omega t + \alpha).$$

Как соединить две трубы

Приведенные примеры могут создать впечатление, что синусоиды встречаются только в связи с колебаниями. Однако это не так. Например, синусоиды используются при соединении двух цилиндрических труб под углом друг к другу (см. стр. 318, задача 9). Чтобы соединить две трубы таким образом, надо срезать их наискосок.

Если развернуть срезанную наискосок трубу, то она окажется ограниченной сверху синусоидой. В этом можно убедиться, обернув свечку бумагой, срезав ее наискосок и развернув бумагу. Поэтому, чтобы получить ровный срез трубы, можно сначала обрезать металлический лист сверху по синусоиде и свернуть его в трубу.

Изгиб колонны

Синусоида встречается при рассмотрении изгиба колонны под действием вертикальной нагрузки. Если нагрузка слишком мала, колонна не изгибается совсем. Но если нагрузка достигнет некоторого значения, называемого *критическим*, то колонна начнет

изгибаться, причем ее ось примет форму синусоиды. В этом можно убедиться на опыте, сгибая вместо колонны металлическую линейку. Критическая сила равна:

$$F=\frac{\pi^2 EI}{l^2},$$

где l — высота колонны, а величины E и I зависят от материала колонны и размеров ее сечения. Из формулы видно, что чем длиннее колонна, тем меньшая сила нужна, чтобы ее согнуть. Это также можно проверить, изгибая линейку.

Формула критической силы была открыта Л. Эйлером.

Затухающие колебания

До сих пор, говоря о колебаниях маятника, гири, качающейся на пружине, и т. д., мы пренебрегали сопротивлением воздуха. На самом деле из-за сопротивления воздуха амплитуда колебаний становится все меньше и меньше, колебания затухают. Отклонение точки, совершающей затухающие колебания, выражается такой формулой:

$$s=Ae^{-kt}\sin(\omega t+\alpha).$$

Так как множитель e^{-kt} уменьшается с течением времени, то размах колебаний становится все меньше и меньше.

После каждого полного колебания амплитуда уменьшается в $e^{\frac{2\pi k}{\omega}}$ раз. Число $\frac{2\pi k}{\omega}$ называют *логарифмическим декрементом* затухающего колебания. Чем больше логарифмический декремент, тем быстрее затухают колебания. Через некоторое время они станут такими маленькими, что приборы покажут полную остановку тела.

График затухающего колебания изображен на рис. 11.

Если сопротивление среды очень большое (скажем, если маятник качается не в воздухе, а в масле), то колебаний не будет совсем — выведенный из положения равновесия маятник медленно будет опускаться, приближаясь к положению равновесия. В этом случае закон его движения задается следующей формулой:

$$s=A_1e^{-k_1t}+A_2e^{-k_2t},$$

где числа A_1 и A_2 зависят от начального положения и начальной скорости маятника.

При электрических колебаниях также происходят затухающие колебания из-за наличия сопротивления цепи.

Вынужденные колебания

Рассмотрим снова гирю, качающуюся на пружине. Если не мешать ей качаться, то она будет совершать колебания с определенной частотой ω. Эта частота называется *собственной частотой* колебания гири. Совсем по-другому будут выглядеть колебания гири, если мы будем раскачивать ее. Пусть раскачивающая сила сама изменяется по синусоидальному закону, т. е. тащит гирю то вверх, то вниз. Тогда гиря будет совершать колебания, получающиеся при сложении двух колебаний. Одно из них происходит с собственной частотой колебания гири, а второе — с частотой раскачивающей силы. Пусть в начале колебания гиря находится в состоянии покоя и раскачивающая сила изменяется по закону: $F=A\sin\beta t$. Тогда закон движения гири выразится формулой:

$$s=\frac{A}{\omega^2-\beta^2}\left[\sin\beta t-\frac{\beta}{\omega}\sin\omega t\right], \qquad (3)$$

где ω — собственная частота колебаний гири. График пути гири имеет уже довольно сложный вид. Дело в том, что функции $\sin\beta t$ и $\sin\omega t$ меняются с разной частотой. Поэтому иногда два колебания, в которых участвует гиря, направлены в разные стороны (так будет, например, в начале колебания) и гасят друг друга. Иногда же они направлены в одну сторону, и тогда они усиливают друг друга.

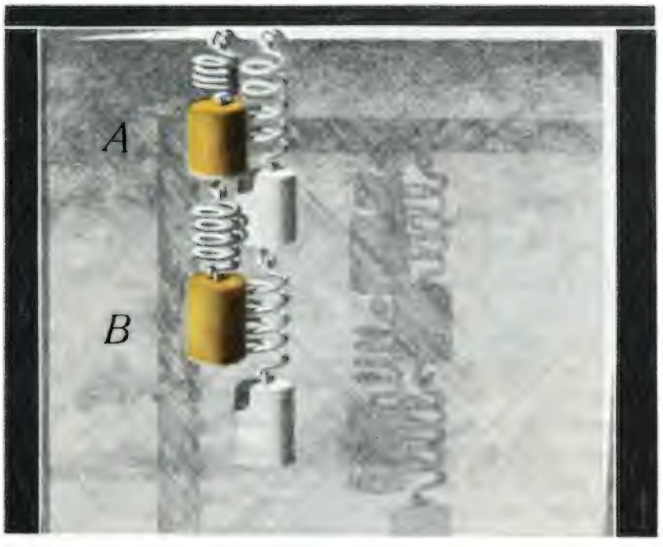
Наибольшая амплитуда колебания равна примерно $\left|\frac{A}{\omega(\omega-\beta)}\right|$. Отсюда видно, что если β мало отличается от ω (т. е. частота раскачивающей силы мало отличается от собственной частоты колебаний гири), то амплитуда колебаний может стать очень большой (у дроби $\left|\frac{A}{\omega(\omega-\beta)}\right|$ знаменатель будет маленьким). Если $\omega=\beta$ (т. е. если мы раскачиваем гирю в такт ее собственным колебаниям), то формула (3) уже неприменима. В этом случае закон движения таков:

$$s=\frac{A}{2\omega^2}\left[\sin\omega t-\omega t\cos\omega t\right].$$

Размах колебаний с течением времени увеличивается, и гиря может разорвать пружину. Это явление называют *резонансом*.

Рис. 13 (см. стр. 329). Высоты приливов и отливов зависят от взаимного расположения Солнца, Земли и Луны.

Рис. 12.



Сложение колебаний

Иногда одно и то же тело участвует не в одном колебательном движении, а в нескольких. Подвесим, например, гирю A на пружине, а к ней также на пружине подвесим другую гирю B (рис. 12). Если растянуть обе пружины и отпустить их, то колебания гирь A и B будут весьма сложными.

Например, колебания гири B вызываются, во-первых, тем, что гиря A то поднимается, то опускается, и, во-вторых, тем, что пружина AB то растягивается, то сокращается. Мы говорим в этом случае, что колебание гири B является суммой двух колебаний — движения гири A и колебания гири B относительно гири A.

Можно привести и другие примеры сложения колебаний. Когда играет оркестр, то каждый музыкальный инструмент вызывает свои колебания воздуха. Эти колебания складываются друг с другом и доносятся к нам в виде единого аккорда.

Чаще всего складываются гармонические колебания. Если эти колебания имеют одну и ту же частоту, то и сумма их будет гармоническим колебанием той же частоты.

Особенно просто складывать колебания с одинаковой начальной фазой — в этом случае в сумме получится колебание с той же фазой, амплитуда которого равна сумме амплитуд слагаемых. А если фазы отличаются друг от друга на π радиан (т. е. на 180°), то в результате сложения получится колебание, амплитуда которого равна разности амплитуд слагаемых.

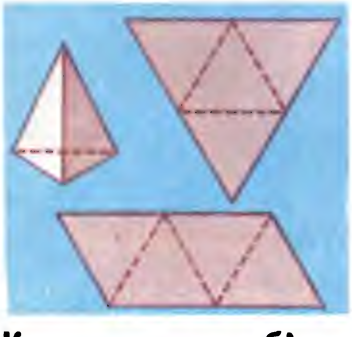
Может получиться, что колебания погасят друг друга (одно будет тянуть в одну сторону, а другое — в другую, совсем как Лебедь, Рак и Щука из басни Крылова). Такое явление называют в физике *интерференцией* колебаний. Из-за интерференции может получиться так, что точка, освещенная двумя источниками света, окажется неосвещенной — два света дадут в сумме темноту.

Биения

Довольно сложная картина возникает, когда складываются колебания различной частоты. При этом уже получаются несинусоидальные колебания. Если частоты ω_1 и ω_2 складываемых колебаний близки друг к другу, то получающееся колебание имеет вид как бы синусоидального колебания с частотой $\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$ амплитуда которого медленно меняется с частотой $\left|\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}\right|$. Это явление называют *биениями*. Может случиться, что мы не воспринимаем слагаемых колебаний из-за того, что их частота слишком велика, но можем воспринять медленное изменение амплитуды суммы колебаний. Например, если электрическая лампочка присоединена к динамо-машине, дающей переменный ток с периодом $T = {}^1/_{50}$ с, то изменения в яркости лампочки будут незаметными. Если же присоединить эту лампочку к двум динамо-машинам, периоды которых мало отличаются друг от друга, то возникнут биения и лампочка начнет мигать.

Возникают биения и на двухвинтовом корабле, если винты имеют близкие, но различные периоды вращения. Приходится учитывать биения и композиторам. Колебания с периодически меняющейся амплитудой применяют в радиотехнике. Радиостанции посылают в пространство электромагнитные колебания с очень большой частотой (от 150 тыс. до 15 млн. колебаний в секунду). Амплитуда же этих колебаний меняется примерно со звуковой частотой (несколько сотен или тысяч колебаний в секунду). Такого изменения амплитуды можно добиться, например, вызвав биения. Изменение амплитуды колебания при постоянной частоте и фазе называют *амплитудной модуляцией*.

Сколько разверток у куба!



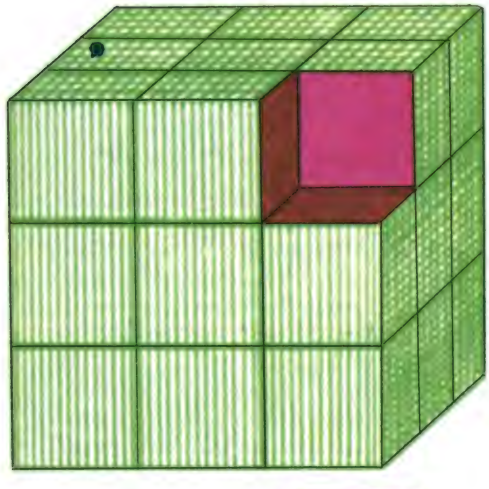
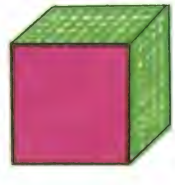
Чтобы изготовить модель многогранника из куска картона, надо прежде всего начертить развертку требуемого многогранника. На рисунке изображена правильная пирамида, все грани которой — равносторонние треугольники, и две развертки такой пирамиды. Сгибая каждую развертку по пунктирным линиям, можно построить модель пирамиды. Какие-либо другие формы разверток пирамиды, все грани которой равносторонние треугольники, невозможны. Куб в этом смысле богаче: у него более десятка разверток различных форм. А сколько же все-таки точно? Начертите все развертки куба.

Решение на стр. 331.

Как разрезать куб!

Чтобы разрезать куб на 27 равных кубиков, надо сделать 6 разрезов. Можно ли уменьшить число разрезов, если позволить после каждого разрезания перекладывать части?

Ответ на стр. 331.

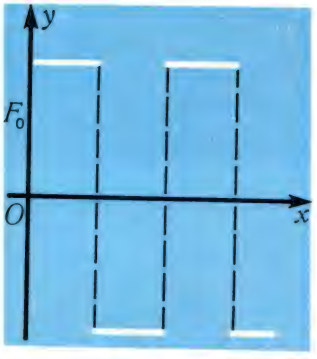


Рис. 14 (левый).

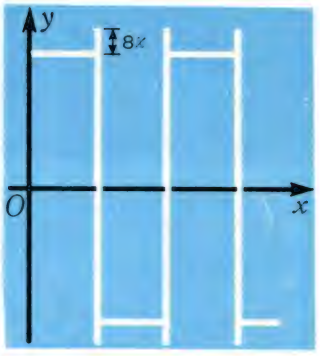


Рис. 15 (правый).

В технике пользуются спектральным анализом колебаний для того, чтобы правильно рассчитывать различные конструкции. Например, может случиться, что частота одной из синусоидальных составляющих колебаний самолета, вызванных работой моторов, совпадет с собственной частотой колебаний какой-нибудь детали самолета. Тогда из-за резонанса при работе моторов возникнут сильные колебания этой детали, что может привести к аварии.

Приливы и отливы

Очень интересный пример биений дают океанские приливы и отливы. Из-за притяжения Луны и Солнца уровень воды в океане все время меняется. Примерно каждые 12 ч уровень воды достигает наивысшего значения, а через 6 ч после этого — наинизшего. Однако из-за вращения Луны вокруг Земли период колебаний уровня воды, вызываемых притяжением Солнца, не совпадает с периодом колебаний уровня воды, вызываемых притяжением Луны. Первый период равен 12 ч, а второй — 12 ч 25 мин. В результате сложения этих колебаний, имеющих близкие периоды, получаются биения. Самая большая и самая малая высота приливов будет в том случае, если Солнце, Земля и Луна расположены так, как показано на рис. 13. Самая большая высота приливов превосходит примерно в $2^1/_3$ раза самую малую.

Спектральный анализ

Как мы узнали, из гармонических колебаний составляются более сложные колебания. При этом могут получаться колебания весьма сложного вида.

Оказалось, что любое самое сложное периодическое колебание можно изобразить как сумму синусоидальных колебаний (т. е. таких, что их графики имеют форму синусоиды). Частоты этих синусоидальных колебаний называют спектром сложного колебания, а само разложение — *спектральным анализом* колебания. Это название не случайно. Разложение луча света в спектроскопе связано с разложением сложного электромагнитного колебания на простые синусоидальные составляющие.

Спектральный анализ применяют также к звукам и другим колебаниям. С помощью спектрального анализа устанавливают особенности тембра голоса певца.

Как машина открыла теорему

Для разложения периодических колебаний на синусоидальные составляющие применяют различные машины. Есть машины, которые решают и обратную задачу — позволяют из синусоидальных составляющих складывать все колебание. Однажды для проверки работы такой машины ей дали разложить на синусоидальные составляющие колебание, изображенное на рис. 14, а потом сложить эти составляющие. Машина после суммирования начертила график не такой, как на рис. 14, а такой, как на рис. 15, т. е. с добавочными хвостиками на вертикальных отрезках. Сначала появление этих хвостиков приписывали несовершенству машины и думали, как ее исправить. Но потом американский физик Дж. Гиббс доказал, что эти хвостики должны появляться всегда, когда у графика колебания есть разрыв. Теорему назвали его именем, хотя «открыла» ее машина.

Почему не работал трансатлантический кабель

Когда проложили телеграфный кабель через Атлантический океан, то оказалось, что по нему нельзя передавать телеграммы. Вместо точек и тире на другом конце кабеля принимались совершенно непонятные сигналы. Исследованием работы кабеля занялся известный английский физик и математик У. Кельвин. Для этого он сначала разложил сигналы на синусоидальные составляющие и изучил, как передаются по кабелю эти составляющие. Оказалось, что колебания различной частоты передаются по-разному. Одни из них идут быстрее, другие медленнее, одни сильно ослабевают, а другие меньше. Поэтому, когда

эти составляющие приходят на другой конец кабеля, то их сумма становится совсем непохожей на передававшиеся сигналы. Кельвин нашел, от чего зависит изменение скорости и силы синосуидальных колебаний, и указал, как сделать кабель, чтобы колебания любой частоты шли по нему с одинаковой скоростью и одинаково ослабевали. Когда по его указаниям переделали кабель, сигналы стали передаваться без искажений и трансатлантическая связь наладилась.

Радиоприемник и камертон

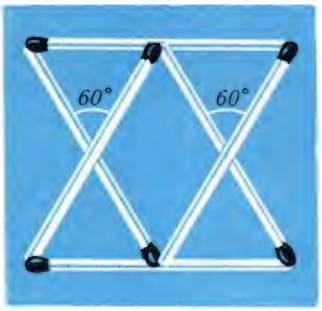
Иногда вместо разложения колебания на синусоидальные составляющие стараются выделить из всего колебания одну составляющую определенной частоты. Именно это делают, когда настраивают радиоприемник на определенную частоту; из сложного электромагнитного колебания, вызванного работой всех радиостанций, ловят колебание, вызванное работой нужной станции. Точно так же камертон отзывается только на ту ноту, на которую он настроен.

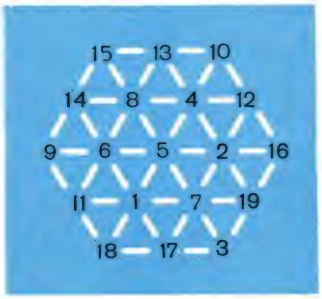
Заключение

Поистине безгранична область применений показательной и тригонометрических функций в природе и технике! Вероятно, можно было бы заполнить весь этот том, рассказывая о таких примерах. Возникают естественные вопросы: Что общего между такими вещами, как трение каната о столб, радиоактивный распад, остывание чайника? Почему электромагнитные колебания так похожи на механические колебания? Почему столь часто встречаются в различных вопросах науки и техники именно эти функции?

Сейчас мы не можем ответить на эти вопросы. Но в конце следующей статьи, посвященной одному из разделов высшей математики, поговорим и об этом.

Ответы и решения



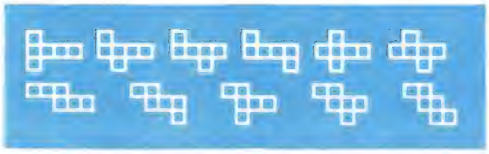


Ответы к стр. 292. Вот все двузначные «самородки»: 20, 31, 42, 53, 64, 75, 86, 97.

Магический шестиугольник — см. рис. слева.

Ответ к стр. 302 — см. рис. слева.

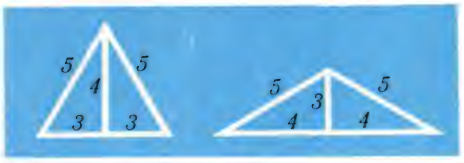
Решение к стр. 329. Куб имеет 11 разверток различных форм. Из них в шести формах четыре грани куба развертываются в одну полоску; в четырех формах не более трех граней в полоске; в одной — не более двух граней в полоске.



Ответ к стр. 329. Невозможно. Каждый кубик имеет шесть граней. Для получения кубика, расположенного в центре данного куба, должны быть выпилены полностью все шесть граней (у остальных кубиков имеются уже готовые грани). Как ни перекладывай части данного куба, а одним плоским разрезом не получишь более одной грани кубика.

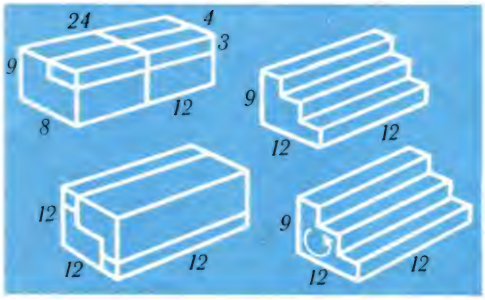
Ответы к стр. 323.

1. Треугольники равновелики, так как каждый составлен из пары треугольников (3, 4, 5).



2. Наименьшая возможная площадь у трех равновеликих прямоугольных треугольников 840. Стороны: (40, 42, 58), (24, 70, 74), (15, 112, 113).

3.



Интеграл и производная

Задача Кеплера

Если бы бочки умели говорить, то, несомненно, многие из них с удовольствием рассказали бы поучительную историю о великих заслугах бочек в создании... высшей математики! История эта такова.

В ноябре 1613 г. королевский математик и астролог австрийского двора И. Кеплер праздновал свадьбу. Готовясь к ней, он приобрел несколько бочек виноградного вина. При покупке Кеплер был поражен тем, что продавец определял вместимость бочки, производя одно-единственное действие — измеряя расстояние от наливного отверстия до самой дальней от него точки днища (рис. 1). Ведь такое измерение совсем не учитывало форму бочки! Кеплер сразу увидел, что перед ним интереснейшая математическая задача — по нескольким измерениям вычислить вместимость бочки. Размышляя над этой задачей, он нашел формулы не только для объема бочек, но и для объема самых различных тел: лимона, яблока, айвы и даже турецкой чалмы. Для каждого из тел Кеплеру приходилось создавать новые, зачастую очень хитроумные методы.

В наши дни вычислять объемы различных тел (значительно более сложных, чем у Кеплера) необходимо при решении многих технических задач: при нахождении объема корпуса корабля, объема газгольдера, объема водохранилища и др. И решать такие задачи приходится почти каждому инженеру, каждому технику. Простые и общие методы решения подобных задач даются высшей математикой.

Рис. 1.

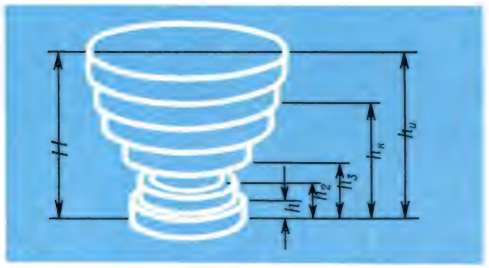
Математика за чайным столом

Чтобы получить представление об этих общих методах, попробуем найти объем поданного к столу лимона. Ни на одно из тел, изучаемых в школе (шар, цилиндр, конус и т. д.), лимон не похож. Однако хозяйка тут же приходит нам на помощь: она разрезает лимон на тонкие ломтики. Ровно обрезав край каждого ломтика, можно превратить его в низенький цилиндр (рис. 2), объем которого легко высчитать. Прикладывая друг к другу эти цилиндры, мы получим ступенчатое тело (рис. 3). Его объем равен сумме объемов цилиндров. Если ломтики очень тонки, то объем ступенчатого тела мало отличается от объема лимона.

Объем тела

На общем рисунке изображены и другие тела вращения: чашка, бутыль, подсвечник, графин, яйцо, волчок. Для нахождения объема любого тела вращения пригоден прием, примененный нами для вычисления объема лимона. Пусть фигура $ABCD$ (рис. 4) вращается вокруг стороны AB. Разрежем получающееся тело вращения (рис. 5) на тонкие ломтики и каждый ломтик заменим цилиндром. Тогда легко сможем найти объем получающегося ступенчатого тела (рис. 6). Для этого надо знать, как меняется площадь сечения с высотой (рис. 7). Пусть площадь сечения, проведенного на высоте h, равна $S(h)$. Предположим, кроме того, что тело разре-

B
C
A
D
рис. 4
рис. 2
рис. 3
рис. 5



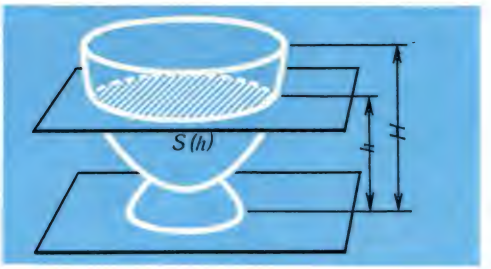
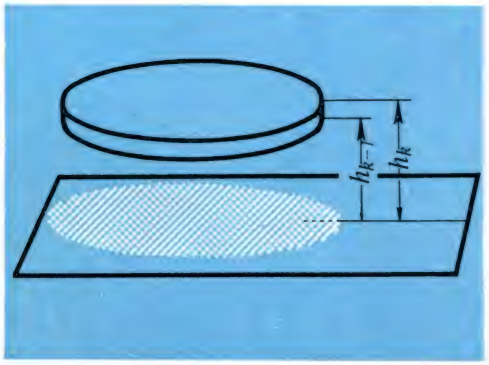


Рис. 6 (левый).

Рис. 7 (правый).



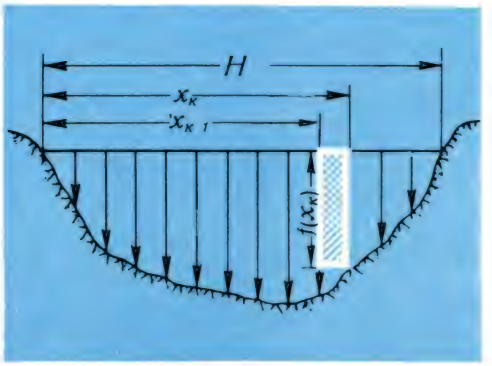


Рис. 8 (левый).

Рис. 9 (правый).

зано на n ломтиков сечениями, проведенными на высотах h_0, h_1, ..., h_n над плоскостью нижнего основания (плоскость нижнего основания совпадает с сечением на высоте h_0, а плоскость верхнего — с сечением на высоте h_n, т. е. $h_0=0$, $h_n=H$ (см. рис. 6)). Площадь сечения на высоте h_k равна $S(h_k)$. Поэтому объем цилиндра, которым мы заменяем k-й ломтик (рис. 8), будет равен $S(h_k)\,(h_k-h_{k-1})$ (так как его высота h_k-h_{k-1}). Складывая объемы цилиндров, получим объем всего ступенчатого тела:

$$V_{\text{ступ. тела}} = S(h_1)\,(h_1-h_0)+S(h_2)\,(h_2-h_1)+\ldots+ \\ +S(h_n)\,(h_n-h_{n-1}).$$

Чем тоньше будут ломтики, тем ближе объем ступенчатого тела к объему тела вращения.

Но на рисунке есть и фигуры, не являющиеся телами вращения (кувшин, батон). Объем любого тела можно найти таким же образом, если известно, как меняется площадь тела с высотой сечения. Например, для того чтобы вычислить объем проектируемого корабля, достаточно иметь чертежи (выполненные в определенном масштабе) поперечных размеров корабля. По этим чертежам надо найти площадь каждого разреза (как вычислить площади сложных фигур, мы расскажем ниже), после чего указанная выше формула даст приблизительное значение объема корабля. Разумеется, таким же приемом можно находить объемы газгольдеров, водохранилищ и других тел.

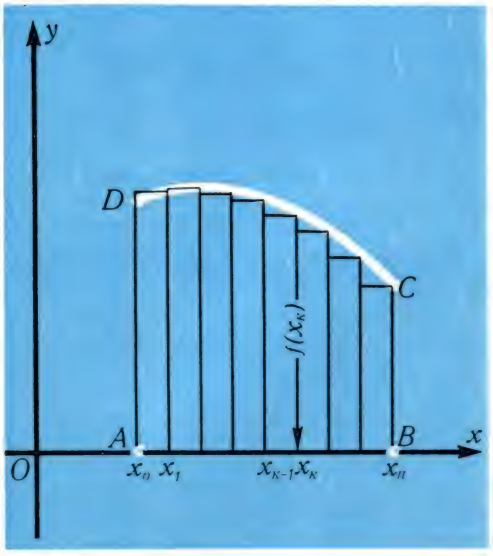
Промер реки

При проектировании гидроэлектростанций надо знать расход воды в реке, т. е. количество воды, протекающей в данном месте за 1 с. Ясно, что расход воды в реке равен произведению площади поперечного сечения реки на скорость течения. Скорость течения определить довольно просто, а вот площадь поперечного сечения найти гораздо сложнее. Однако и здесь на помощь нам приходит разрезание на ломтики. Каждый ломтик можно приближенно заменить прямоугольником. Складывая затем площади этих прямоугольников, мы и найдем приближенное значение площади сечения. Чем тоньше будет ломтик, тем более точное значение площади мы получим. Измерим глубину реки в точках, находящихся на расстоянии x_0, x_1, ..., x_n от берега ($x_0=0$; $x_n=H$ — ширина реки). Пусть на расстоянии x_k от берега глубина реки равна $f(x_k)$ (рис. 9). Тогда площадь поперечного сечения приблизительно равна:

$$S_{\text{попер. сеч}} \approx f(x_1)\,(x_1-x_0)+f(x_2)\,(x_2-x_1)+ \\ +\ldots+f(x_n)\,(x_n-x_{n-1}).$$

Вообще если геометрическая фигура $ABCD$ имеет вид, изображенный на рис. 10 (такая фигура назы-

Рис. 10.



вается *криволинейной трапецией*), и если высота в точке с абсциссой x равна $f(x)$, то для вычисления площади фигуры мы можем пользоваться той же формулой. Чем гуще расположены точки x_0, x_1, ..., x_n на отрезке AB, тем более точное значение для площади фигуры получим по этой формуле.

В автомобиле

Для измерения пути, пройденного автомобилем, на нем устанавливают специальный счетчик. Но даже если этот счетчик испорчен, можно подсчитать пройденный автомобилем путь по спидометру (прибору, показывающему скорость автомобиля). Для этого надо записать показания спидометра в моменты времени $t_0=0$, t_1, t_2, ..., $t_n=T$. Если бы движение автомобиля от момента t_{k-1} до момента t_k совершалось равномерно с той скоростью $v(t_k)$, которую он в действительности имел в конце этого промежутка, т. е. в момент t_k, то за промежуток времени от t_{k-1} до t_k он проехал бы расстояние $v(t_k)(t_k-t_{k-1})$. Поэтому путь, пройденный за все время движения от 0 до T, был бы равен:

$$v(t_1)(t_1-t_0)+v(t_2)(t_2-t_1)+\ldots+v(t_n)(t_n-t_{n-1}).$$

Этой формулой можно пользоваться для приближенного подсчета пути, пройденного автомобилем. Но автомобиль не всегда движется равномерно, и даже за маленький промежуток времени скорость его успевает несколько измениться. Однако чем чаще будем записывать показания спидометра, т. е. чем меньше будут промежутки времени между отдельными измерениями, тем точнее написанная формула будет давать пройденный автомобилем путь.

Интеграл

Мы разобрали ряд задач из различных областей физики, техники, геометрии. Несмотря на внешнее различие этих задач, у них было много общего. Каждый раз для приближенного вычисления некоторой величины (объема, площади, пути и т. д.) мы получали сумму вида:

$$f(x_1)(x_1-x_0)+f(x_2)(x_2-x_1)+\quad+f(x_n)(x_n-x_{n-1}).$$

Здесь $f(x)$ — некоторая функция, заданная на отрезке от a до b, а $x_0=a$, x_1, ..., x_{n-1}, $x_n=b$ — точки на этом отрезке. Например, при вычислении пути функция $f(x)$ была скоростью в момент времени x (только время мы раньше обозначали буквой t, а не x, что, конечно, несущественно), a было равно нулю, а b равнялось времени T движения автомобиля.

Суммы такого вида встречаются в математике и ее приложениях очень часто. Их называют *интегральными суммами*. Такие суммы дают значение искомой величины только приближенно. Но если мы будем брать точки x_0, x_1, ..., x_n все гуще и гуще на отрезке от a до b, то интегральные суммы будут приближаться к некоторому числу, а именно к точному значению искомой величины. Это число называется *интегралом* от функции $f(x)$ на отрезке от a до b и обозначается через $\int_a^b f(x)\,dx$. Таким образом,

$$\int_a^b f(x)dx=\lim\left[f(x_1)(x_1-x_0)+\ldots+f(x_n)(x_n-x_{n-1})\right],$$

где предел (lim) берется при условии, что число промежутков неограниченно увеличивается, а их длины стремятся к нулю.

В самом обозначении $\int_a^b f(x)\,dx$ сохраняются воспоминания об интегральной сумме, из которой получается интеграл. В Италии букву S часто пишут в виде $\int$. Поэтому сам знак интеграла есть просто первая буква латинского слова summa (сум-

ма). Вслед за знаком $\int$ указывается, что суммировались выражения $f(x_k)\ (x_k - x_{k-1})$. Только вместо разности $x_k - x_{k-1}$ пишут dx, где d — первая буква латинского слова differentia (разность). Понятие интеграла является одним из основных в математике. Пользуясь этим понятием, можно записать многие полученные ранее формулы гораздо короче и не приближенно, а точно. Например, формула объема любого тела принимает вид:

$$V = \int_0^H S(h)dh, \qquad (1)$$

где H — высота этого тела, а $S(h)$ — площадь сечения, проведенного параллельно основанию тела на высоте h от основания (см. рис. 7).

Формулу площади фигуры, изображенной на рис. 10, можно записать в виде:

$$S = \int_a^b f(x)dx, \qquad (2)$$

где $f(x)$ — высота кривой CD в точке с абсциссой x.

Путь, пройденный за промежуток времени от 0 до T, выражается через скорость $v(t)$ по формуле:

$$s = \int_0^T v(t)dt. \qquad (3)$$

Геометрическое вычисление интегралов

Формулы (1) и (2) можно использовать для нахождения площадей и объемов различных тел. Но так как площади и объемы простых тел мы уже знаем, то, наоборот, с помощью этих формул можно вычислить значения некоторых простых интегралов. (Дальше, на стр. 346, мы укажем, как можно сосчитать эти интегралы непосредственным вычислением, не прибегая к геометрии.)

Самой простой геометрической формулой вычисления площади является формула площади прямоугольника: $S = hb$. Прямоугольник можно рассматривать как криволинейную трапецию, высота которой во всех точках одинакова и равна h (рис. 11), так что его площадь может быть записана в виде интеграла: $S = \int_0^b h\,dx$ где h — постоянная величина. Итак, мы доказали формулу:

$$\int_0^b h\,dx = hb \qquad (4)$$

Фокус геометрии движения

Начертите замкнутую кривую, пересекающую себя 10—12 раз. Но кривая может пересечь себя в каждой точке не больше одного раза. Все точки пересечения обозначьте различными буквами (в любом порядке). Теперь поставьте карандаш на любую неузловую точку и двигайтесь вдоль кривой, как бы повторяя ее построение. Проходя узловую точку, называйте букву, которой точка обозначена.

Обойти надо всю кривую и вернуться в исходный пункт. На каком-нибудь этапе движения назовите две последовательно проходимые буквы, но не в порядке их следования, а наоборот. Например, если за буквой B следует буква F, вы произносите вслух не «B, F», а «F, B». Мне не сообщайте о такой перестановке последовательности двух букв, но запомните это место. Я его угадаю.

Фокус основан на теореме теории узлов. Угадывающему надо записывать называемые буквы на полоске бумаги поочередно сверху черты и снизу. Если перестановки букв не было, то каждая буква появится однажды сверху и однажды снизу черты. Если перестановка была, то одна буква появится дважды сверху и одна дважды снизу. Вот в этих буквах и была перепутана их последовательность! Пример. Мне называют буквы: C, C, E, A, B, D, E, A, D, B. Я записываю:

$$\begin{array}{cccccc} C & E & B & E & D & \\ \hline & \searrow\nearrow & \searrow\nearrow & \searrow\nearrow & \searrow\nearrow & \\ C & A & D & A & B & \end{array}$$

Сверху черты два раза встречается E, а снизу — два раза A. Значит, узлы E и A были названы не в той последовательности, в которой они располагались.

Сколько рыб в озере!

Рыбоводу понадобилось определить, сколько в озере рыб, годных для улова. Он забросил сеть с заранее выбранным размером ячеек и, вытащив ее, пересчитал добычу. Рыб оказалось 38. Сделав пометку на каждой рыбке, рыбовод всех их выпустил в озеро.

На другой день он опять забросил ту же самую сеть и выловил 53 рыбки, две из которых оказались мечеными. По этим данным рыбовод и узнал приблизительно число рыб в озере, годных для улова данной сетью. К какому результату пришел рыбовод?

Вы можете облегчить себе поиски решения задачи, прочитав статью «Наука о случайном» (стр. 420).

Решение на стр. 354.

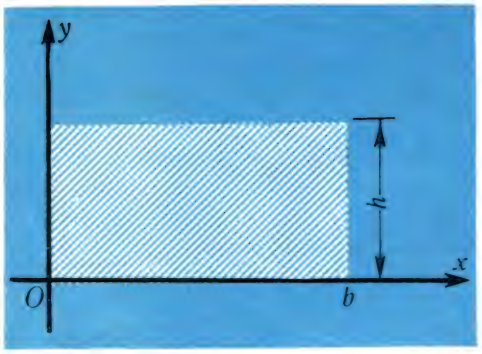


Рис. 11.

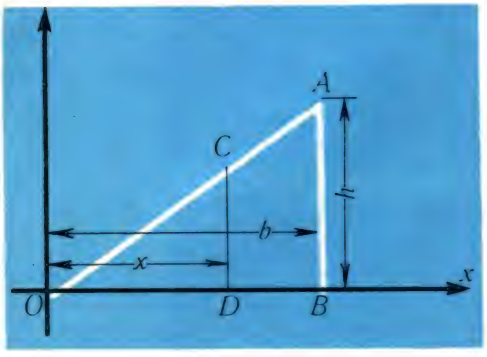


Рис. 12.

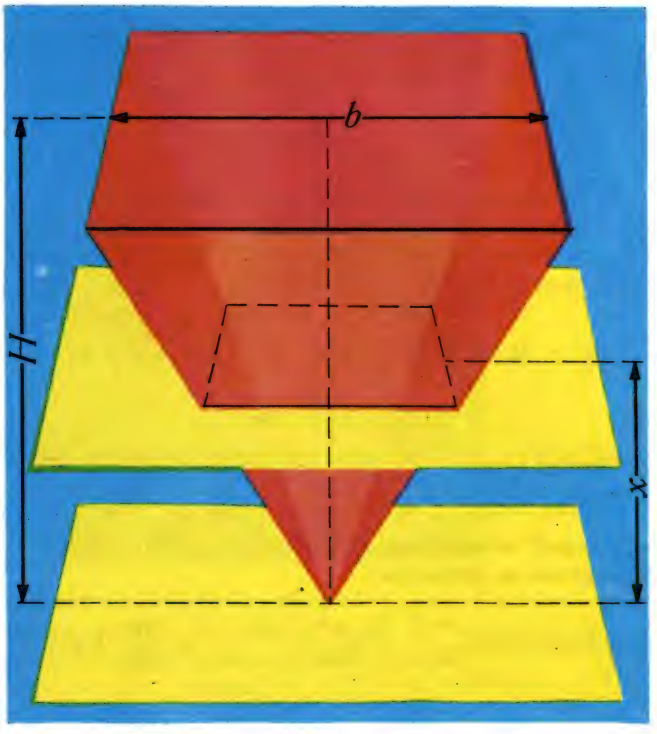


Рис. 13.

(h — постоянная). В частности, при $h=1$ получаем:

$$\int_0^b dx = b \qquad (5)$$

Вспомним теперь формулу площади прямоугольного треугольника: $S = \frac{1}{2} hb$, где h и b — катеты. Из рис. 12 видно, что треугольник можно рассматривать как криволинейную трапецию, высота y которой в точке с абсциссой x равна $\frac{hx}{b}$ (это вытекает из подобия треугольников OAB и OCD). Поэтому площадь треугольника может быть записана в виде интеграла:

$$S = \int_0^b \frac{hx}{b}\, dx.$$

Таким образом, мы доказали, что

$$\int_0^b \frac{hx}{b}\, dx = \frac{1}{2} hb.$$

Если треугольник OAB равнобедренный, т. е. если $h=b$, то получаем формулу:

$$\int_0^b x dx = \frac{1}{2} b^2. \qquad (6)$$

Наконец, рассмотрим еще один пример. Возьмем правильную четырехугольную пирамиду с ребром в основании, равным b, и высотой, равной этому ребру (рис. 13). Поставим пирамиду на вершину (так, чтобы ось ее была вертикальной) и проведем плоскость параллельно основанию пирамиды на расстоянии x от вершины. Тогда в сечении получится квадрат со стороной, тоже равной x, а площадь его $S(x)$ будет равна x^2. Поэтому по формуле (1) объем V пирамиды выразится интегралом:

$$V = \int_0^b x^2 dx.$$

Сравнивая эту формулу с известной из школьного курса формулой объема пирамиды, получим:

$$\int_0^b x^2 dx = \frac{1}{3} b^2 \cdot b,$$

или

$$\int_0^b x^2 dx = \frac{1}{3} b^3. \qquad (7)$$

Найденные выше формулы (5), (6), (7), очевидно, можно объединить в одну общую формулу:

$$\int_0^b x^n dx = \frac{b^{n+1}}{n+1} \qquad (8)$$

при $n=0, 1, 2$.

Эта формула, как доказывается в математике, справедлива не только при $n=0, 1, 2$, но и при любых отличных от -1 значениях показателя n, например:

$$\int_0^b x^{10} dx = \frac{b^{11}}{11}; \quad \int_0^b \sqrt{x}\, dx = \int_0^b x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{2}{3} b^{\frac{3}{2}}$$

Часто бывает нужно найти интеграл от многочлена. Оказывается, что многочлены можно интегрировать почленно, а числовой множитель можно выносить за знак интеграла. Например:

$$\int_0^b (x^2 - 3x + 5)dx = \int_0^b x^2 dx - 3\int_0^b x dx + 5\int_0^b dx = \\ = \frac{b^3}{3} - 3\frac{b^2}{2} + 5b.$$

Вообще если

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n —$$

некоторый многочлен n-й степени, то его интеграл находится по формуле:

$$\int_0^b f(x)dx = a_0\frac{b^{n+1}}{n+1} + a_1\frac{b^n}{n} + \quad + a_{n-1}\frac{b^2}{2} + a_nb.$$

Применение интегралов

Мы научились вычислять интегралы от многочленов. Этого уже достаточно, чтобы иметь возможность решать многие математические и физические задачи.

Покажем для начала, как просто получаются с помощью интегралов некоторые формулы, изучаемые в школе.

Выведем формулу пути равноускоренного движения. Если начальная скорость тела в момент $t=0$ равна v_0, а ускорение движения равно a, то в момент времени t скорость тела составит $v(t)=v_0+at$. Поэтому по формуле (3) путь, пройденный телом с начала движения до момента T, выражается формулой:

$$s = \int_0^T v(t)dt = \int_0^T (v_0 + at)\,dt = v_0T + \frac{aT^2}{2}.$$

Выведем теперь некоторые геометрические формулы. Сначала найдем, чему равен объем шара радиуса R. Конечно, нам достаточно найти объем полушара, а потом его удвоить. Рассечем полушар плоскостью, параллельной его основанию и отстоящей на x от основания (рис. 14). В сечении получится круг радиуса $AB = \sqrt{R^2 - x^2}$ (это получается, если применить теорему Пифагора к треугольнику OAB). Поэтому площадь получившегося сечения равна:

$$\pi\left(\sqrt{R^2 - x^2}\right)^2 = \pi R^2 - \pi x^2.$$

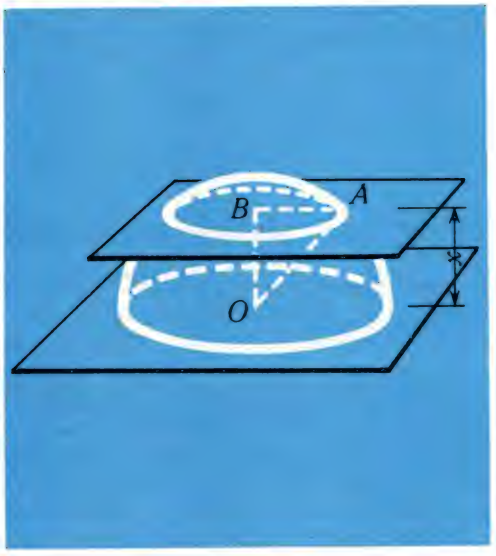


Рис. 14.

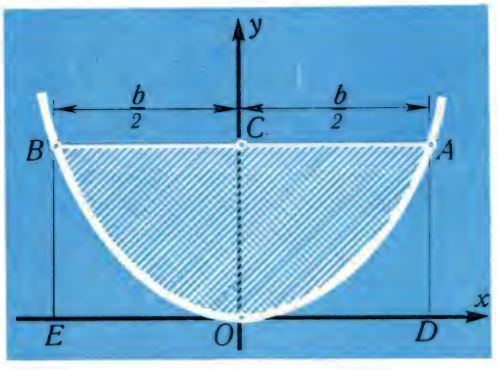


Рис. 15.

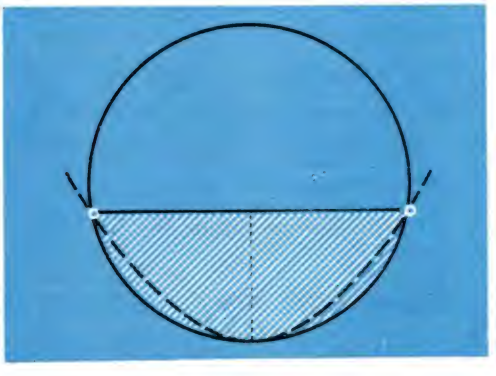


Рис. 16.

Но тогда объем полушара (высота его равна R) выражается формулой:

$$V_{\text{полушара}} = \int_0^R (\pi R^2 - \pi x^2)\,dx = \pi R^2 R - \pi\frac{R^3}{3} = \frac{2}{3}\pi R^3.$$

Следовательно, объем всего шара равен $\frac{4}{3}\pi R^3$.

Но с помощью интегрального исчисления можно найти и такие площади и объемы, которые не изучаются в школе. Найдем, например, площадь параболического сегмента $AOBA$, у которого хорда AB

равна b, а стрелка OC равна h (рис. 15). Уравнение параболы имеет вид $y=ax^2$. В точке с абсциссой $x=\frac{b}{2}$ ордината AD должна равняться длине стрелки h. Поэтому $h=\frac{ab^2}{4}$ Но это значит, что $a=\frac{4h}{b^2}$. Итак, наш параболический сегмент ограничен снизу параболой, у которой в точке с абсциссой x ордината $y=\frac{4hx^2}{b^2}$ Мы легко можем теперь найти площадь криволинейного треугольника OAD.

По формулам (2) и (7) она равна:

$$S=\int_0^{\frac{b}{2}}\frac{4hx^2}{b^2}\,dx=\frac{4h}{3b^2}\left(\frac{b}{2}\right)^3=\frac{hb}{6}.$$

Площадь же прямоугольника $ABED$ равна bh. Но площадь параболического сегмента получится, если из площади прямоугольника вычесть удвоенную площадь треугольника OAD, т. е. она равна $\frac{2bh}{3}$.

Круговой сегмент, имеющий небольшой центральный угол, можно приближенно заменить параболическим сегментом с той же хордой и той же стрелкой (рис. 16). Поэтому для площади кругового сегмента имеет место приближенная формула:

$$S_{\text{круг. сегм}}\approx\frac{2}{3}bh.$$

Например, если центральный угол равен 60°, то приближенная формула дает результат $0{,}0893...R^2$, а точная $0{,}0906...R^2$. Таким образом даже для такого сравнительно большого центрального угла, как 60°, приведенная формула дает точность до 1,5%.

Чудесная формула

Тот же прием, который мы применили для приближенного вычисления площади кругового сегмента, можно, конечно, применить и для случая произвольной криволинейной трапеции, ограниченной сверху кривой CD с уравнением $y=f(x)$ (рис. 17). Обозначим через M середину отрезка AB и восставим в точках A, M и B ординаты AD, MN, BC кривой CD. Длины этих ординат обозначим через y_0, y_1, y_2. Проведем через точки C, N и D дугу параболы, имеющей вертикальную ось (такую дугу можно провести всегда, и притом только одну; иногда она превращается в отрезок прямой).

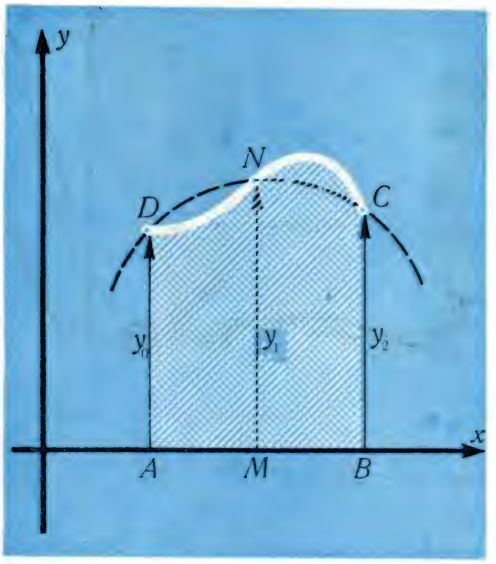


Рис. 17.

Довольно простые подсчеты, использующие формулы (5), (6), (7), показывают, что площадь, лежащая под этой дугой параболы, равна

$$\frac{b-a}{6}(y_0+4y_1+y_2),$$

где b и a — абсциссы точек B и A. Без большой ошибки можно принять, что этому же равна и площадь криволинейной трапеции $ABCD$, т. е. что

$$S_{ABCD}\approx\frac{b-a}{6}(y_0+4y_1+y_2).$$

Поскольку площадь криволинейной трапеции выражается интегралом $\int_a^b f(x)dx$, то найденная формула дает приближенное значение этого интеграла. Иными словами:

$$\int_a^b f(x)dx\approx\frac{b-a}{6}(y_0+4y_1+y_2),$$

где y_0, y_1, y_2 — значения функции $f(x)$ в точках с абсциссами a, $\frac{a+b}{2}$ и b.

Объем любого тела можно приближенно вычислять по такой же формуле:

$$V=\int_0^H S(x)\,dx\approx\frac{H}{6}(S_0+4S_1+S_2),$$

где H — высота тела, S_0 — площадь нижнего сечения, S_1 — площадь среднего сечения, S_2 — площадь верхнего сечения. К этой формуле прибегают для приближенного вычисления объема дерева, стога, бочки и других фигур более или менее сложной формы. Замечательно, что для всех фигур, изучаемых в школе (призмы, цилиндра, пирамиды, конуса, усеченной пирамиды, усеченного конуса, шара, шарового слоя, шарового сегмента), эта формула дает не приближенный, а совершенно точный результат. Проверьте это утверждение.

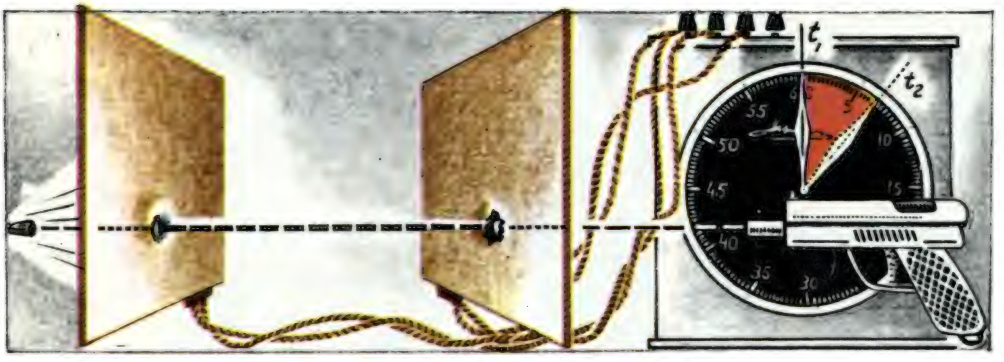


Рис. 18.

Как измерить скорость полета пули

Мы часто говорили о скорости движения (например, автомобиля). Мы имели формулу:

$$s = \int_0^T v(t)dt,$$

в которой $v(t)$ означает скорость движения тела *в момент времени* t. Такую скорость в физике называют *мгновенной скоростью*. Каким же образом можно измерить мгновенную скорость движения? Если речь идет о скорости движения автомобиля, в кабине которого мы едем, то все обстоит очень просто — надо лишь посмотреть на стрелку спидометра, и мы будем знать скорость движения. Но как узнать скорость движения автомобиля, проезжающего мимо нас по улице, или скорость полета пули? Мы знаем, что существуют приборы для измерения расстояний (линейки, рулетки и др.). Приложим такой прибор к измеряемому расстоянию, и ответ сразу виден. Есть приборы и для измерения времени (часы, хронометры). Но «скоростемеров» — приборов, которые можно было бы «приложить» к движущемуся мимо нас телу, чтобы непосредственно по его показанию узнать скорость движения тела, нет. Да и как «приложить» прибор к мчащемуся мимо автомобилю или летящей пуле?

До некоторой степени нам могут помочь приборы, измеряющие расстояние и время. Эти приборы позволяют измерить путь, который пролетела пуля, и время, которое она на это затратила. Разделив путь на время, мы и узнаем скорость полета пули. Однако таким образом мы получаем лишь *среднюю скорость* полета пули, которая мало о чем говорит: ведь сопротивление воздуха постепенно замедляло движение пули, и потому в конце пути она летела с меньшей скоростью, чем в его начале. Поэтому для определения скорости пули в некоторой точке ее пути поступают иначе. В этой точке ставят лист тонкого материала, соединенный с часами таким образом, что они отмечают момент времени t_1, когда пуля пробивает этот лист. На небольшом расстоянии от него ставят второй лист, также соединенный с часами, так что они отмечают момент t_2, когда пуля его пробивает (рис. 18). Пусть первый лист находится на расстоянии s_1 от линии огня, а второй — на расстоянии s_2. Тогда расстояние $s_2 - s_1$ пуля пролетает за время $t_2 - t_1$. Значит, средняя скорость полета пули за это время равна:

$$v_{ср} = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1}.$$

Но и это измерение не дает точного значения мгновенной скорости в момент t_1. Ведь воздух тормозил пулю, когда она летела между листами, и ко второму листу пуля подлетела с несколько меньшей скоростью, чем к первому. Чтобы уменьшить влияние сопротивления воздуха на скорость пули, надо ставить листы ближе друг к другу. И чем ближе будет второй лист к первому, тем точнее измерим мы мгновенную скорость полета пули в момент t_1 (мы считаем, конечно, что у нас совершенно точные часы и безукоризненные линейки). При этом чем ближе друг к другу расположены листы, тем за меньший промежуток времени $t_2 - t_1$ пролетает пуля расстояние между ними. Мы можем сказать, таким образом, что мгновенная скорость полета пули равна:

$$v(t_1) = \lim \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1},$$

где предел берется при условии, что значение s_2 приближается к значению s_1 (или, что то же самое, при условии, что t_2 приближается к t_1).

Скорость радиоактивного распада

Различные радиоактивные вещества распадаются неодинаково быстро.

В каком же смысле можно говорить о том, что распад происходит быстро или медленно? Как можно измерить скорость распада куска радиоактивного вещества в данный момент времени? Легко измерить среднюю скорость распада за 1 год: количество вещества, распавшегося за 1 год, разделить на число секунд в году. Это и даст среднюю скорость распада,

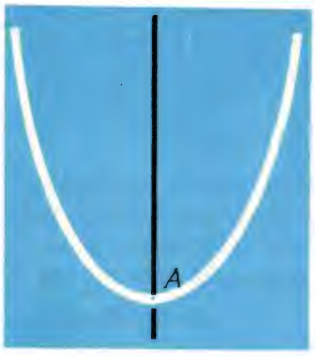


Рис. 19 (левый).

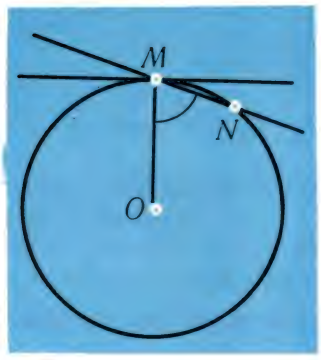


Рис. 21 (рядом с рис. 19).

Рис. 20.

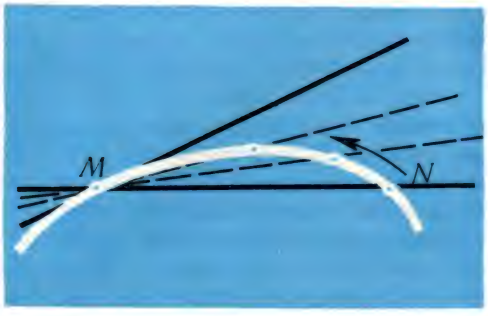
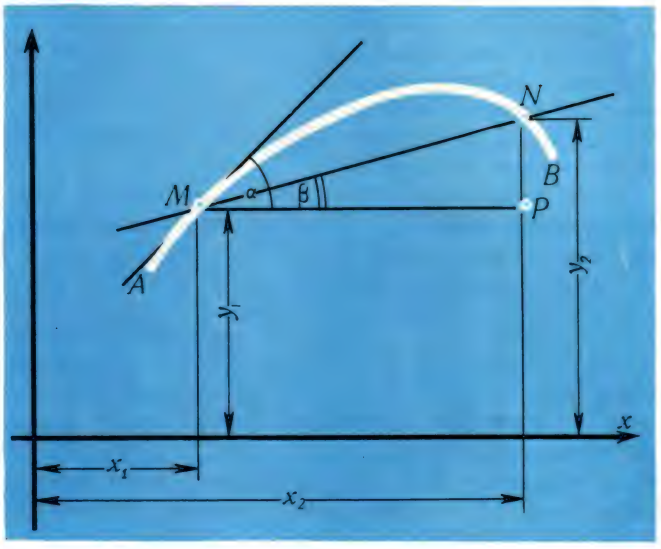


Рис. 22.



выраженную в граммах в секунду. Однако для нахождения мгновенной скорости распада этот расчет мало пригоден, ведь в течение года количество радиоактивного вещества постепенно уменьшалось, поэтому оно распадалось все медленнее и медленнее. Чтобы поточнее определить скорость распада в данный момент времени, надо измерить среднюю скорость распада не за год, а за месяц или, еще лучше, за сутки, час, минуту и т. д. Каждый раз надо брать количество вещества, распавшегося за это время, и делить на число секунд в выбранном промежутке времени. Так, уменьшая промежутки времени между двумя измерениями массы вещества, мы будем приближаться к какому-то числу. Это число и даст скорость распада в данный момент времени.

Формулой это можно записать следующим образом. Предположим, что в момент времени t_1 масса еще не распавшегося радиоактивного вещества в пробирке была равна m_1, а через некоторое время, в момент t_2, масса его уменьшилась (так как часть вещества превратилась в продукт распада) и стала равной m_2. Таким образом, за время t_2-t_1 масса имевшегося в пробирке радиоактивного вещества изменилась на m_2-m_1 (это число отрицательное — ведь масса нераспавшегося радиоактивного вещества с течением времени уменьшается). Отношение

$$\frac{m_2-m_1}{t_2-t_1}$$

представляет собой среднюю скорость изменения массы радиоактивного вещества в пробирке за рассматриваемый промежуток времени, т. е. среднюю скорость распада. Чем меньше промежуток времени t_2-t_1, тем точнее это отношение выражает мгновенную скорость распада. Мы можем сказать, таким образом, что *мгновенная скорость распада* $u(t_1)$ в момент t_1 равна:

$$u(t_1) = \lim \frac{m_2-m_1}{t_2-t_1},$$

где предел берется при условии, что значение t_2 приближается к t_1. Совершенно аналогично можно определить мгновенную скорость химической реакции.

Умеете ли вы проводить касательную?

Услышав такой вопрос, вы, вероятно, вспомните построение касательной к окружности и дадите утвердительный ответ. Но речь идет о касательной к любой кривой, а не только к окружности. А в школьных учебниках не только ничего не сказано о проведении касательной к любой кривой, но даже не определяется, что это такое. Нельзя, разумеется, определять касательную как прямую, имеющую с кривой лишь одну общую точку: ось параболы пересекается с ней только в одной точке A (рис. 19), но вряд ли кто-нибудь может подумать, что это касательная.

Что же такое касательная к кривой и как ее провести? Постараемся ответить на эти вопросы. Проведем через точку M, лежащую на кривой, секущую MN (рис. 20). Если теперь точку N приближать по кривой к точке M, то секущая будет поворачиваться вокруг точки M, все более приближаясь к некоторой прямой. Эта прямая и есть касательная к кривой в точке M.

Для окружности это определение касательной совпадает с обычным (рис. 21): по мере приближения точки N к точке M угол OMN приближается к прямому углу, и потому касательная к окружности перпендикулярна радиусу.

Итак, *касательная — это прямая, к которой приближается секущая MN, когда точка N приближается (по рассматриваемой кривой) к точке M.*

Теперь нетрудно будет описать положение касательной с помощью некоторой формулы. Для этого будем считать, что кривая AB является графиком некоторой функции $y=f(x)$. Обозначим ординаты точек M и N через y_1 и y_2, а их абсциссы — через x_1 и x_2. Рассматривая прямоугольный треугольник MPN с гипотенузой MN и катетами, параллельными осям координат (рис. 22), мы можем легко определить угол β, под которым секущая наклонена к оси x:

$$\operatorname{tg}\beta=\frac{PN}{MP}.$$

Но из рис. 22 ясно, что $PN=y_2-y_1$, $MP=x_2-x_1$. Таким образом,

$$\operatorname{tg}\beta=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}.$$

Если теперь точка N начнет по кривой AB приближаться к точке M, то секущая MN будет, поворачиваясь, приближаться к положению касательной, так что в пределе мы получим тангенс угла, под которым касательная наклонена к оси x:

$$\operatorname{tg}\alpha=\lim\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}.$$

Предел берется при условии, что точка N приближается к точке M, т. е. что значение x_2 приближается к x_1.

Производная

Мы рассмотрели несколько задач из физики и геометрии. Несмотря на внешнее различие этих задач, у них было много общего. В первых двух задачах (скорость движения, скорость распада) это общее заключалось в том, что мы в обоих случаях имели *скорость изменения некоторой величины:* скорость движения есть скорость изменения пути с течением времени, скорость распада есть скорость изменения массы радиоактивного вещества. Но и в третьем примере мы имели некоторую скорость изменения: тангенс угла наклона касательной есть скорость изменения ординаты, когда мы перемещаемся по оси x. Действительно, отношение $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ представляет собой среднюю скорость возрастания ординаты при перемещении от точки x_1 к точке x_2, а предельное значение этого отношения (равное $\operatorname{tg}\alpha$) дает мгновенную скорость изменения ординаты.

Итак, во всех рассмотренных задачах мы имели мгновенную скорость изменения некоторой величины; этим и объясняется, что при определении этих на первый взгляд очень непохожих величин получались очень похожие формулы. Чисто математически скорость изменения можно определить следующим образом. Пусть мы имеем функцию $y=f(x)$. Обозначим те значения, которые эта функция принимает в двух точках x_1 и x_2, через y_1 и y_2. Тогда разность y_2-y_1 показывает, на сколько изменилось значение рассматриваемой функции при переходе от значения x_1 к значению x_2, а отношение $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ представляет собой среднюю скорость изменения функции $y=f(x)$ на промежутке от x_1 до x_2. Если теперь уменьшать этот промежуток, приближая значение x_2 к x_1, то мы получим в пределе *мгновенную скорость изменения рассматриваемой функции в точке* x_1; она равна:

$$\lim\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1},$$

где предел берется при условии, что значение x_2 приближается к x_1. Эта мгновенная скорость изменения называется *производной* от функции $y=f(x)$ по аргументу x в точке x_1; она обозначается через $f'(x_1)$.

В этих обозначениях явно указывается, в какой точке берется мгновенная скорость изменения (т. е. производная). Есть и другие обозначения для производной, но мы их не будем указывать. Конечно, производную можно находить в различных точках, так что производная $f'(x)$ есть опять некоторая функция от x. Теперь ясно, что рассмотренные выше задачи из физики и геометрии могут быть сформулированы с помощью производной.

Скорость движения $v(t)$ есть производная от пути $s(t)$ по времени:

$$v(t)=s'(t). \tag{9}$$

Скорость $u(t)$ радиоактивного распада есть производная от массы радиоактивного вещества $m(t)$ по времени:

$$u(t)=m'(t). \tag{10}$$

Наконец, тангенс угла наклона касательной к графику функции $y=f(x)$, проведенной в точке с абсциссой x, есть производная от функции $f(x)$:

$$\operatorname{tg} \alpha|_{\text{в точке } x} = f'(x). \qquad (11)$$

Производные многочленов

Из сказанного выше ясно, что для решения ряда задач физики, геометрии и других наук весьма важно уметь находить производные различных функций (нахождение производных называется *дифференцированием*). Мы рассмотрим сейчас пример непосредственного вычисления производной.

Возьмем функцию $y=x^3$. Отношение, которое нужно рассмотреть при вычислении этой производной, имеет такой вид:

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{x_2^3 - x_1^3}{x_2 - x_1} = \frac{(x_2 - x_1)(x_2^2 + x_2x_1 + x_1^2)}{x_2 - x_1} = x_2^2 + x_2x_1 + x_1^2$$

Если теперь x_2 будет приближаться к x_1, то последнее выражение будет, очевидно, приближаться к значению $x_1^2+x_1^2+x_1^2=3x_1^2$. Таким образом, производная от функции $y=x^3$ имеет в точке $x=x_1$ значение $3x_1^2$, т. е. $(x^3)'|_{\text{при } x=x_1} = 3x_1^2$. Более кратко это записывают так:

$$(x^3)'=3x^2.$$

Предоставляем читателю таким же образом найти производные от функций $y=x^2$ и $y=x$. Результаты получаются такие:

$$(x^2)' = 2x; \quad (x)' = 1.$$

Эти формулы вычисления производных объединяются, очевидно, одной общей формулой:

$$(x^n)' = nx^{n-1}. \qquad (12)$$

В математике доказывается, что формула (12) верна при любом n.

Заметим теперь, что производная обладает следующими простыми, но важными свойствами: *постоянный множитель можно выносить за знак производной;* кроме того, *производная суммы двух (или нескольких) функций равна сумме производных от слагаемых:*

$$[kf(x)]' = k \cdot f'(x),$$
$$[f_1(x) + f_2(x)]' = f'_1(x) + f'_2(x).$$

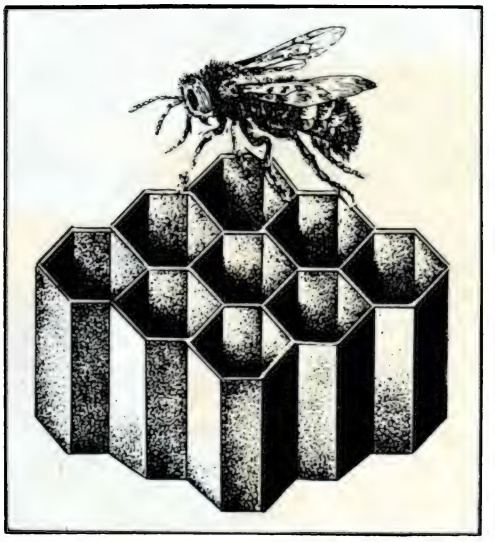


Рис. 23.

Теперь уже легко можно находить производные любых многочленов, например:

$$(3x^3 - 2x^2 + 5x - 4)' = (3x^3)' + (-2x^2)' + (5x)' + (-4)' = 3(x^3)' - 2(x^2)' + 5(x)' - 4(1)' = 3 \cdot 3x^2 - 2 \cdot 2x + 5 \cdot 1 - 4 \cdot 0 = 9x^2 - 4x + 5.$$

Вообще, если

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$$

многочлен n-й степени, то его производная вычисляется по формуле:

$$f'(x) = na_0x^{n-1} + (n-1)a_1x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}.$$

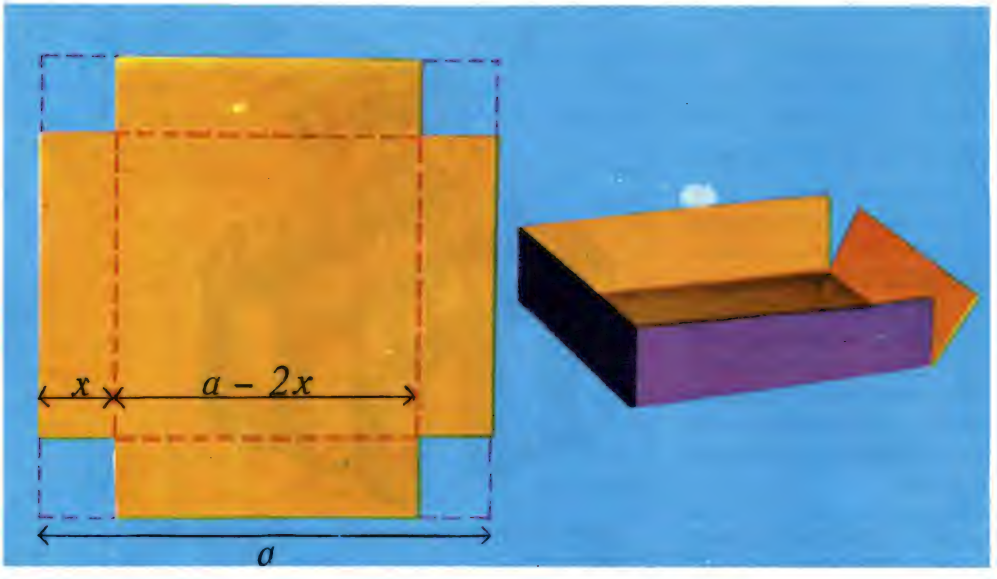
Пчелы-математики

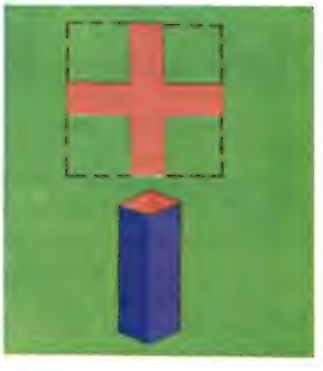
Русский математик П. Л. Чебышёв в своей работе «Черчение географических карт» писал, что особенную важность имеют те методы науки, которые позволяют решать задачу, общую для всей практической деятельности человека: как располагать своими средствами для достижения по возможности большей выгоды. Так, рабочий-металлист старается из куска металла получить как можно больше деталей; раскройщик на обувной фабрике старается из куска кожи выкроить как можно больше заготовок; технолог старается так расставить станки на заводе, чтобы обработка деталей заняла как можно меньше времени, и т. д.

Рис. 24 (левый).

Рис. 25 (верхний правый).

Рис. 26 (под рис. 25).





Да и не только человеку приходится решать такие задачи. Пчелы бессознательно решают одну из таких задач — они стараются придать сотам такую форму, чтобы при заданном объеме на них шло как можно меньше воска. И хотя они не знают математики, но точно решают эту задачу (рис. 23).

Пчелам помогает решать эту задачу инстинкт. Человек же действует не по инстинкту, а по разуму. Маркс говорил, что «самый плохой архитектор от наилучшей пчелы с самого начала отличается тем, что, прежде чем строить ячейку из воска, он уже построил ее в своей голове».

И большую помощь в решении таких задач оказывает человеку математика, в особенности понятие производной. Чтобы понять, как же математики решают такие задачи, рассмотрим одну из них.

Как сделать самую большую коробку

Пусть перед нами квадратный кусок картона со стороной a. Из него надо сделать коробку без крышки. Вырежем по углам куска квадратики и согнем по линиям, отмеченным пунктиром (рис. 24). У нас получилась коробка; но много ли в нее можно положить? Это зависит от того, какие квадратики мы вырезали из этой коробки. Если они были очень маленькие, то коробка получится низкая (рис. 25) и в нее много не положишь. А если они будут слишком большие (рис. 26), то коробка получится слишком узкая и в нее тоже войдет довольно мало. Найдем, при какой стороне x вырезанного квадратика объем $V(x)$ сделанной коробки будет наибольшим. Из рис. 24 видно, что $V = x(a-2x)^2 = 4x^3 - 4ax^2 + a^2x$. График этой функции имеет вид, указанный на рис. 27. При этом x должен лежать между 0 и $\frac{a}{2}$, так как вырезать из куска картона со стороной a четыре квадрата со стороной, большей чем $\frac{a}{2}$, нельзя. Из рис. 27 видно, что в той точке, где значение объема наибольшее, касательная идет горизонтально, т. е. образует с осью x угол, равный нулю. Но это значит, что в этой точке производная равна нулю. Таким образом, чтобы найти значение x_{max}, при котором объем коробки будет самым большим, надо найти все значения x, при которых производная функции

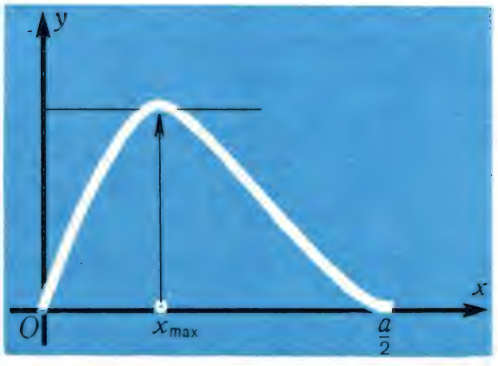


Рис. 27.

$$V(x) = 4x^3 - 4ax^2 + a^2x$$

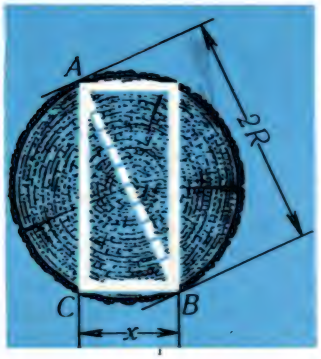


Рис. 28.

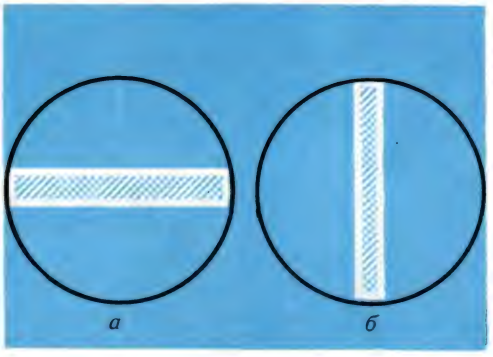


Рис. 29.

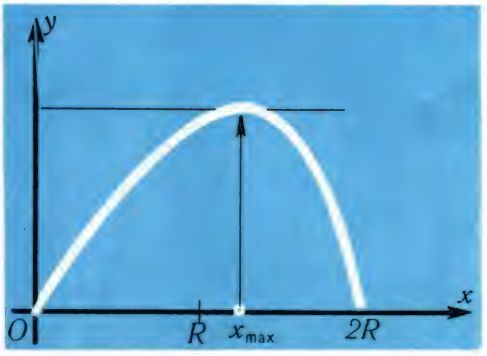


Рис. 30.

обращается в нуль; среди них обязательно будет и искомое значение x_{max}. По формуле дифференцирования многочлена находим:

$$V'(x) = 12x^2 - 8ax + a^2.$$

Приравниваем производную к нулю и находим два корня: $x_1 = \frac{a}{2}$, $x_2 = \frac{a}{6}$ Разумеется, корень $x_1 = \frac{a}{2}$ нас не устраивает: если мы вырежем квадраты со стороной $\frac{a}{2}$, то от листа картона ничего не останется. Значит, наибольшее значение объема получится, если за x_{max} примем оставшееся значение $\frac{a}{6}$, т. е. вырежем квадраты со стороной $x = \frac{a}{6}$. Объем коробки тогда будет равен $\frac{2a^3}{27}$. Сделать из данного куска картона коробку большего объема невозможно.

Балка наибольшей прочности

Основным элементом любой строительной конструкции является балка. Прочность балки зависит от того, какую форму имеет ее поперечное сечение. Инженерные расчеты показывают, что прочность балки с прямоугольным сечением пропорциональна ширине балки a и квадрату ее высоты h. Иными словами, прочность такой балки (измеренная в некоторых единицах) равна kah^2, где k — коэффициент, зависящий от длины балки, материала, из которого она сделана, и т. д.

Деревянные балки приходится обычно вытесывать из круглых бревен. В связи с этим возникает задача, как из бревна, имеющего радиус R, сделать балку наибольшей прочности. На рис. 28 изображено поперечное сечение бревна. Разумеется, прочность вырезанной балки будет функцией от ширины этой балки. Но если взять ширину слишком большой (почти равной диаметру бревна), то получится балка очень маленькой высоты и прочность ее будет мала (рис. 29, *а*). Мала будет прочность балки, если сделать ее слишком узкой (рис. 29, *б*). Чтобы найти, при каком соотношении длины и ширины прочность будет наибольшей, выразим прочность балки как функцию от ее ширины x. Из треугольника ABC, изображенного на рис. 28, видно, что высота балки, имеющей ширину x, равна $\sqrt{4R^2 - x^2}$ Поэтому прочность такой балки равна:

$$kx(4R^2 - x^2) = 4R^2kx - kx^3.$$

График функции $y = 4R^2kx - kx^3$ имеет вид, указанный на рис. 30, а ее производная равна $4R^2k - 3kx^2$ и обращается в нуль при

$$x_{1,2} = \pm\frac{2R\sqrt{3}}{3}.$$

Поскольку ширина балки должна быть положительной, получаем, что самая прочная балка будет, если ширина ее $a = \frac{2R\sqrt{3}}{3}$ высота балки определится по формуле:

$$h = \sqrt{4R^2 - a^2} = \frac{2R\sqrt{6}}{3}.$$

Отношение $\frac{h}{a}$ равно $\sqrt{2} \approx \frac{7}{5}$. Именно такое отношение высоты балки к ширине и предписано правилами производства строительных работ.

Формула Ньютона—Лейбница

Между дифференцированием и интегрированием (вычислением интегралов) имеется глубокая связь: формула (3) показывает, что путь находится по мгновенной скорости с помощью интегрирования, а формула (9) утверждает, что скорость находится по пути с помощью дифференцирования. Это наводит на мысль, что действия дифференцирования и интегрирования связаны друг с другом примерно так же, как действия сложения и вычитания, умножения и деления, возведения в степень и извлечения корня, т. е. что эти операции взаимно обратны.

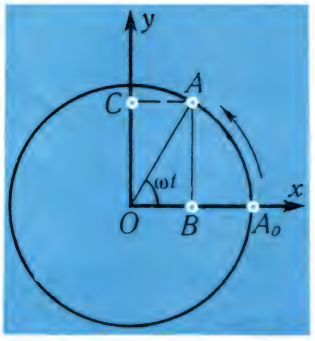


Рис. 31 (левый).

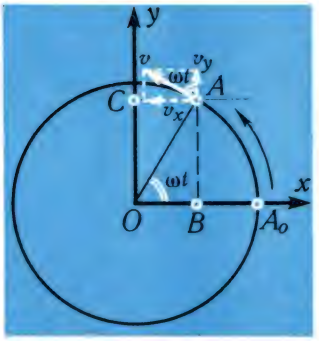


Рис. 32 (правый).

Например, пользуясь тем, что $v(t)=s'(t)$, можно записать формулу (3) в виде:

$$s=\int_0^T s'(t)\,dt.$$

Здесь s — путь, пройденный телом начиная с момента $t=0$.

Но может случиться и так, что пройденный путь отсчитывается не с момента $t=0$, а с какого-то более раннего момента (например, не с момента начала путешествия, а с момента выпуска автомобиля с завода). Тогда путь s придется записать в виде разности $s(T)-s(0)$ пути, пройденного к моменту $t=T$, и пути, пройденного к моменту $t=0$. Равенство (3) примет такой вид:

$$s(T)-s(0)=\int_0^T s'(t)\,dt.$$

Таким же образом для любых двух моментов времени $t=a$ и $t=b$ справедливо равенство:

$$s(b)-s(a)=\int_a^b s'(t)\,dt.$$

Вообще, для любой функции $F(x)$ имеет место равенство:

$$F(b)-F(a)=\int_a^b F'(x)\,dx.$$

Эта формула называется *формулой Ньютона — Лейбница*, в честь знаменитых математиков И. Ньютона и Г. Лейбница, почти одновременно установивших ее в конце XVII в. (примерно через 70 лет после выхода в свет книги И. Кеплера «Новая стереометрия винных бочек»). Следует сказать, что в геометрической форме эту формулу высказал учитель Ньютона И. Барроу в 1670 г. Он указал, что вычисление площадей—действие, обратное проведению касательных.

Значение формулы Ньютона — Лейбница состоит в следующем: если мы знаем какую-нибудь функцию $F(x)$, производная которой равна $f(x)$, т. е. $F'(x)=f(x)$, то легко вычислить интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ — он равен разности значений функции $F(x)$ в точках b и a. Каждую функцию $F(x)$, для которой $F'(x)=f(x)$, называют *первообразной* для функции $f(x)$. Значит, если функция $F(x)$ первообразная для функции $f(x)$, то $f(x)$ — производная для функции $F(x)$.

Рис. 33 (на стр. 347 левый).

Рис. 34 (на стр. 347 правый).

Таким образом, вычисление интегралов сводится в основном к нахождению первообразных. А нахождение первообразных есть задача, обратная дифференцированию. Поэтому чем большее число функций мы будем уметь дифференцировать, тем больше первообразных будем знать и тем больше интегралов сможем найти. Пока что мы умеем дифференцировать только многочлены. Этого уже достаточно, чтобы интегрировать любые многочлены (не прибегая к примененным выше геометрическим приемам).

Но во многих задачах встречаются функции, отличные от многочленов. Мы научимся сейчас дифференцировать тригонометрические и показательную функции.

Производные синуса и косинуса

Производные от тригонометрических функций проще всего вычислить исходя из физических соображений. Рассмотрим точку A, движущуюся по окружности радиуса R со скоростью ωR. Будем считать, что при $t=0$ точка A находилась в положении A_0 (рис. 31).

Через t секунд точка пройдет путь длиной ωRt и окажется в положении A. Дуга A_0A имеет длину ωRt, т. е. содержит ωt радианов, значит, и угол AOA_0 равен ωt радианам. Поэтому координаты точки A равны $x=R\cos\omega t$ и $y=R\sin\omega t$ (это легко выводится из треугольника ABO). Иными словами, проекция B точки A на ось Ox движется по закону $x=R\cos\omega t$, а проекция C этой же точки на ось Oy движется по закону $y=R\sin\omega t$. Найдем скорости этих колебаний.

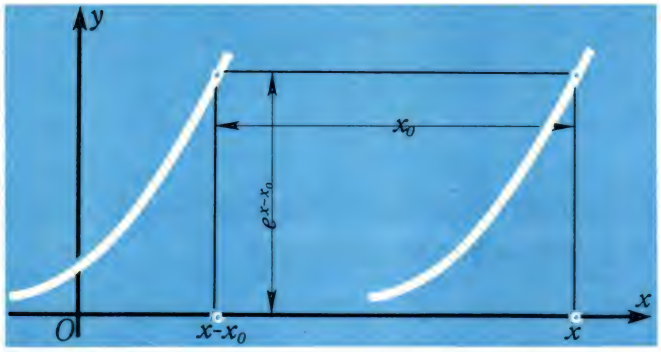
Для этого разложим скорость движения точки A на две составляющие: горизонтальную и вертикальную. Вектор скорости точки A (имеющий длину ωR) направлен по касательной к окружности, проведенной в точке A, и потому образует с осью Ox угол $\omega t+\frac{\pi}{2}$, а с осью Oy — угол ωt (рис. 32). Следовательно, его проекция на ось Ox (т. е. скорость движения точки B) равна:

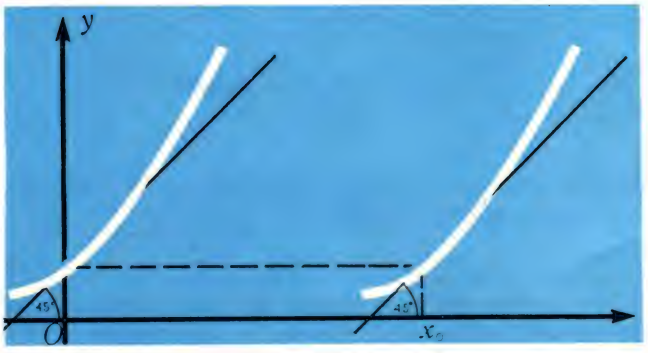
$$v_x=\omega R\cos\left(\omega t+\frac{\pi}{2}\right)=-\omega R\sin\omega t,$$

а его проекция на ось Oy (т. е. скорость движения точки C) равна:

$$v_y=\omega R\cos\omega t.$$

Мы доказали, что скорость колебания, происходящего по закону $x=R\cos\omega t$, равна: $v_x=-\omega R\sin\omega t$.





Так как скорость является производной от пути по времени, это означает, что

$$(R\cos\omega t)' = -\omega R\sin\omega t,$$

или при $R=1$

$$(\cos\omega t)' = -\omega\sin\omega t. \qquad (13)$$

Точно так же доказывается (из рассмотрения движения точки C), что

$$(\sin\omega t)' = \omega\cos\omega t. \qquad (14)$$

В частности, при $\omega = 1$ получаем:

$$(\cos t)' = -\sin t; \quad (\sin t)' = \cos t.$$

Производная показательной функции

Теперь продифференцируем показательную функцию $y=e^x$. Мы уже знаем (см. статью «Функции в природе и технике»), что касательная к кривой $y=e^x$, проведенная в точке пересечения ее с осью ординат, наклонена к осям под углом 45°. Вспоминая геометрический смысл производной (см. стр. 343), мы можем сказать, что производная функции $y=e^x$ в точке $x=0$ равна tg45°, т. е. 1. Итак, $(e^x)' \mid_{\text{при } x=0} = 1$.

Чтобы вычислить производную функцию $y=e^x$ в какой-либо точке x_0, сдвинем график этой функции на отрезок x_0. После сдвига в точке x ордината станет равной не e^x, а e^{x-x_0}, т. е. сдвинутая кривая является графиком функции $y=e^{x-x_0}$ (рис. 33). При сдвиге графика касательная, проведенная к кривой $y=e^x$ в точке $x=0$, перейдет в касательную, проведенную к сдвинутой кривой (т. е. кривой $y=e^{x-x_0}$) в точке $x=x_0$ (рис. 34).

Таким образом, касательная к кривой $y=e^{x-x_0}$ в точке x_0 наклонена к оси x под углом 45°, т. е.

$$(e^{x-x_0})' \mid_{\text{при } x\,=\,x_0} = 1.$$

Теперь легко найти производную функции $y=e^x$ в точке $x=x_0$. В самом деле, так как постоянный множитель e^{x_0} можно вынести за знак производной, получим:

$$(e^x)' \mid_{\text{при } x\,=\,x_0} = (e^{x_0}e^{x-x_0})' \mid_{\text{при } x\,=\,x_0} = e^{x_0}(e^{x-x_0})' \mid_{\text{при } x\,=\,x_0} = e^{x_0}\cdot 1 = e^{x_0}.$$

Этим доказано, что производная от функции e^x в точке $x=x_0$ равна e^{x_0}. Так как x_0 — произвольная точка, то мы можем просто написать:

$$(e^x)' = e^x$$

С помощью несложных рассуждений можно вывести следующую формулу:

$$(e^{Cx})' = Ce^{Cx}. \qquad (15)$$

Радиоактивный распад

Многие физические законы связывают между собой некоторую величину и скорость ее изменения. Рассмотрим, например, радиоактивный распад. Скорость распада тем больше, чем больше взято радиоактивного вещества. Это и понятно: если, скажем, в каждом грамме взятого радиоактивного вещества за 1 с распадается 0,0001 г, то в двух граммах этого вещества за 1 с распадается 0,0002 г, в семи граммах распадается за 1 с 0,0007 г и т. д. Иначе говоря, скорость распада (мы ее обозначали выше буквой u; см. формулу (10)) прямо пропорциональна массе m имеющегося радиоактивного вещества:

$$u = -km. \qquad (16)$$

Здесь k — положительный коэффициент пропорциональности, а знак «—» поставлен потому, что вещество распадается и его становится меньше, т. е. скорость распада отрицательная. (Этот закон, связывающий массу радиоактивного вещества и скорость распада, справедлив лишь в случае, если масса радиоактивного вещества не слишком велика и не происходит цепной реакции.)

На первый взгляд кажется, что из уравнения (16) ничего нельзя определить: ведь это одно уравнение с двумя неизвестными u и m (коэффициент пропорциональности k для каждого вида радиоактивного вещества определяется из опыта), а для нахождения двух неизвестных надо иметь два уравнения. Однако второе уравнение легко найти: ведь u — это скорость изменения массы m, а потому и $u=m'$. Поэтому мы

можем переписать закон радиоактивного распада, т. е. формулу (16), в виде:

$$m' = -km. \qquad (17)$$

Мы получили одно уравнение для определения одного неизвестного m. Только это уравнение не такое, какие изучаются в школе: оно связывает величину m и ее скорость изменения (производную). Уравнения, связывающие величины и их производные, называются *дифференциальными уравнениями*. Легко проверить, что функция $m=Ce^{-kt}$, где C — любое число, является решением дифференциального уравнения (17) (т. е. если подставить в это уравнение вместо m эту функцию, то оно обратится в тождество). В самом деле:

$$m' = (Ce^{-kt})' = -Cke^{-kt} = -km.$$

Можно показать, что других функций (кроме $m(t)=Ce^{-kt}$), удовлетворяющих уравнению (17), не существует, т. е. что всякое решение уравнения (17) имеет вид: $m(t)=Ce^{-kt}$. Это и есть закон уменьшения массы радиоактивного вещества с течением времени.

У нас остался невыясненным один вопрос: чему равна постоянная C? На этот вопрос нетрудно ответить. Из формулы $m(t)=Ce^{-kt}$ находим (полагая $t=0$), что масса радиоактивного вещества в начальный момент времени $t=0$ была равна $Ce^0=C$. Таким образом, C — это масса радиоактивного вещества в начальный момент времени; ее принято обозначать через m_0. Поэтому, заменяя C на m_0, получаем окончательный вид закона радиоактивного распада:

$$m(t) = m_0e^{-kt} \qquad (18)$$

Найдем теперь, через сколько лет количество радиоактивного вещества уменьшится вдвое. Для этого нужно определить число T_0 из уравнения $e^{-kT_0} = \frac{1}{2}$. После логарифмирования (по основанию e) находим, что $T_0 = \frac{1}{k}\ln 2 \approx \frac{0{,}69}{k}$ (через $\ln x$ мы обозначаем логарифм числа x по основанию e). Этот промежуток времени T_0 называют *периодом полураспада* данного радиоактивного вещества. Он не зависит от того, сколько было взято радиоактивного вещества, а зависит только от k, т. е. от того, какое взято вещество. Например, период полураспада радия равен 1590 годам, урана-238 — 4,5 млрд. лет, тория G — всего 0,0000003 с.

С помощью числа T_0 закон радиоактивного распада можно записать так:

$$m(t) = m_0\left(e^{-kT_0}\right)^{\frac{t}{T_0}} = m_0\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T_0}}$$

В этой форме его обычно и используют в физике.

Показательная функция в природе и технике

Существует огромное количество процессов в природе, которые описываются такими же дифференциальными уравнениями, как уравнение (17) для радиоактивного распада. Общим для всех этих процессов является то, что скорость изменения рассматриваемой величины y прямо пропорциональна значению этой величины в данный момент времени, т. е.

$$y' = cy. \qquad (19)$$

Коэффициент пропорциональности c положителен или отрицателен в зависимости от того, увеличиваются или уменьшаются с течением времени значения величины y. Дифференциальное уравнение (19) имеет точно такой же вид, как и уравнение радиоактивного распада (только коэффициент пропорциональности здесь обозначается через c, а не через $-k$). Так как одинаковые уравнения имеют одинаковые решения, то для всех таких процессов значения y_0 в любой момент времени t выражаются формулой:

$$y(t) = y_0e^{ct},$$

где y_0 — значение величины y при $t=0$.

Теперь становится понятным, почему в природе и технике встречается так много величин, изменяющихся по показательному закону (ток самоиндукции, протекающий в катушке после выключения постоянного напряжения; изменение давления с высотой подъема и т. д.; см. статью «Функции в природе и технике»). Все эти величины удовлетворяют дифференциальным уравнениям вида (19).

Леверье и Адамс открывают новую планету

По второму закону Ньютона сила равна произведению массы на ускорение:

$$F = ma.$$

Но ускорение тела, движущегося прямолинейно, представляет собой скорость изменения скорости, т. е. является производной от скорости: $a=v'$. Сама же скорость является производной от пройденного пути: $v=s'$. Таким образом, чтобы найти ускорение движущегося тела, надо *два раза* продифференцировать функцию $s(t)$. Поэтому ускорение называют

второй производной от пути по времени. Обозначают это так:

$$a(t) = s''(t).$$

Пользуясь этим обозначением, мы можем записать второй закон Ньютона в следующем виде:

$$F = ms''$$

Сила F зависит от многих обстоятельств: от времени, от скорости движения, от того, в какой точке пространства находится движущееся тело. Например, на парашютиста, спускающегося с раскрытым парашютом, действуют сила тяжести mg и сила сопротивления воздуха, которую можно считать пропорциональной скорости падения, т. е. равной $-kv$. Таким образом, общая сила, действующая на парашютиста, равна:

$$F = mg - kv = mg - ks'$$

Следовательно, движение парашютиста описывается дифференциальным уравнением:

$$ms'' = mg - ks'$$

Иной вид имеет уравнение движения ракеты, вертикально поднимающейся по инерции после полного сгорания горючего. Сила притяжения ракеты к Земле обратно пропорциональна квадрату расстояния ракеты от центра Земли, т. е.

$$F = -\frac{k}{s^2}$$

(мы считаем, что ракета вышла из земной атмосферы и потому на нее не действует сила сопротивления воздуха).

Таким образом, указанное движение ракеты описывается дифференциальным уравнением:

$$ms'' = -\frac{k}{s^2},$$

где m — масса ракеты. (Этим уравнением описывается также вертикальное падение метеорита на Землю до вхождения его в атмосферу.)

Вообще второй закон Ньютона позволяет описывать самые разнообразные движения тел с помощью дифференциальных уравнений. Можно написать дифференциальные уравнения для движения поршня паровой машины, корабля в море, планеты вокруг Солнца, искусственного спутника вокруг Земли.

Решая дифференциальные уравнения движения планет и их спутников (эти уравнения весьма сложны, так как планеты притягиваются не только к Солнцу, но и друг к другу), ученые предсказыва-

Развлечение с числами

В последовательности натуральных чисел зачеркните простое число p и все кратные ему. Из оставшихся чисел образуйте такую последовательность:

единица, сумма первых двух чисел, сумма первых трех чисел и т. д.

В получившейся последовательности снова зачеркните числа, кратные p, и опять образуйте последовательность сумм таким же способом, как первый раз.

Если указанную операцию выполнить p раз, причем в последний раз уже не производить никаких вычеркиваний, то образовавшиеся числа будут p-ми степенями натуральных чисел.

Пример. Пусть $p=3$. Тогда из последовательности натуральных чисел надо вычеркнуть числа

3, 6, 9, 12, ...;

из оставшейся последовательности

1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 11, ...

образуем новую последовательность, как указано:

1, 3, 7, 12, 19, 27, 37, 48, ...;

вычеркивая числа, кратные 3, составляем третью последовательность:

1, 8, 27, 64, ...,

а это и есть последовательность кубов чисел натурального ряда:

$1^3, 2^3, 3^3, 4^3, \ldots,$

как и было обещано!

Игра с кубами чисел

У каждого участника игры должна быть таблица кубов. Назначаем какое-нибудь целое число и ставим задачу: представить это число как алгебраическую сумму пяти кубов.

Пусть назначено, например, число 1. Рассматриваем таблицу кубов и подбираем:

$1 = 4^3 - 3^3 - 3^3 - 2^3 - 1^3$ или

$1 = 6^3 - 5^3 - 4^3 - 3^3 + 1^3.$

Цель игры: за отведенный промежуток времени подобрать как можно больше решений задачи.

У вас, очевидно, возникнет такой вопрос: «Разве любое целое число может быть представлено в виде алгебраической суммы пяти кубов натуральных чисел, да еще несколькими способами?»

Да, любое, и даже бесконечным числом способов. Это доказал польский математик В. Серпинский.

ют их будущее движение, узнают моменты солнечных и лунных затмений. Когда однажды оказалось, что планета Уран отклоняется от заранее вычисленной орбиты, ученые нисколько не усомнились в «правильности» математики. В середине XIX в. французский астроном У. Леверье и английский астроном Дж. Адамс одновременно и независимо один от другого сделали смелое предположение, что отклонение Урана вызывается притяжением новой, до тех пор неизвестной планеты. С помощью дифференциальных уравнений они высчитали положение этой новой планеты и указали, где нужно ее искать на небе. Точно в указанном месте эта планета (ее назвали Нептуном) была затем обнаружена.

Уравнение гармонических колебаний

Во многих случаях тела совершают колебания около положения равновесия под действием силы, величина которой пропорциональна отклонению тела от положения равновесия и которая стремится возвратить это тело в положение равновесия. Например, это имеет место для груза, подвешенного на пружине. Иначе говоря, сила, действующая на тело, выражается формулой:

$$F = -ks,$$

где s — отклонение тела от положения равновесия, а k — жесткость пружины. Поэтому (в силу второго закона Ньютона) дифференциальное уравнение движения тела имеет такой вид:

$$ms'' = -ks.$$

Обозначив положительное число $\frac{k}{m}$ через ω^2, мы сможем записать это уравнение в виде:

$$s'' = -\omega^2 s.$$

Это уравнение называется *уравнением гармонических колебаний*, так как функция

$$s = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t \qquad (20)$$

при любых C_1 и C_2 является решением этого уравнения.

В самом деле, по формулам (13) и (14) скорость тела, движущегося по закону (20), равна:

$$v = s' = -C_1 \omega \sin \omega t + C_2 \omega \cos \omega t.$$

Продифференцировав еще раз, найдем ускорение:

$$s'' = -C_1 \omega^2 \cos \omega t - C_2 \omega^2 \sin \omega t = -\omega^2 (C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t).$$

Но выражение, стоящее в скобках, равно s. Таким образом, взятая функция s действительно удовлетворяет уравнению $s'' = -\omega^2 s$. Можно доказать, что всякое решение этого уравнения имеет такой вид.

Итак, сила, пропорциональная отклонению тела от положения равновесия и стремящаяся вернуть его в это положение, вызывает гармонические колебания частоты ω, где $\omega^2 = \frac{k}{m}$ (m — масса тела, k — коэффициент пропорциональности).

Для колебаний электрической цепи можно также записать аналогичный закон, только надо заменить массу тела самоиндукцией катушки, путь, пройденный телом, — напряжением на конденсаторе, а скорость тела — током. Поскольку законы, управляющие этими явлениями, совершенно аналогичны, то и колебания, возникающие в обоих случаях, записываются одними и теми же формулами. А затухающие колебания возникают, если кроме силы, стремящейся вернуть тело в положение равновесия, действует еще сопротивление среды, пропорциональное скорости движения тела (или сопротивление электрической цепи).

Моделирование

Тот факт, что самые различные явления описываются одинаковыми дифференциальными уравнениями, часто используется на практике. Он позволяет изучать одни явления, наблюдая другие, если только оба явления описываются одинаковыми уравнениями. Пусть, например, надо выяснить, как будет двигаться под землей нефть в районе буровых скважин.

Наблюдать движение нефти под землей было бы очень затруднительно. Но движения жидкости описываются теми же самыми дифференциальными уравнениями, что и движения электричества. Поэтому собирают электрическую цепь, в которой движения электричества происходят так же, как изучаемые движения нефти.

Измеряя напряжение и ток в разных точках собранной цепи, можно узнать, где выгоднее всего поставить буровую вышку, куда надо накачивать воду, чтобы усилить выход нефти, и т. д.

Такое изучение одних явлений при помощи других, описываемых теми же самыми уравнениями, называется *моделированием явлений*. К нему часто прибегают в самых различных вопросах техники.

Множества и операции

Понятие множества

Множества конечные и бесконечные

Обычно арифметику определяют как науку о числах. Числа в простейшем смысле слова, т. е. так называемые натуральные числа: 1, 2, 3, 4, 5, ..., отвечают на вопрос «сколько?». Сколько учеников в классе? Сколько книг на столе? Сколько гусей на пруду?

Но каждый раз, когда мы спрашиваем: «Сколько предметов?», мы должны иметь эти предметы, их *совокупность*. Вот мы и говорим о совокупности всех учеников, образующих данный класс, о совокупности книг, лежащих на столе, о совокупности гусей, плавающих на пруду.

Каждое натуральное число есть число предметов (одушевленных или неодушевленных), образующих некоторую совокупность. Иногда эти предметы легко сосчитать, например когда идет речь о числе книг, лежащих на столе, или о числе учеников, сидящих в классе.

Но значительно труднее ответить на вопрос, сколько в данный момент плавает китов в Мировом океане или даже сколько зайцев живет в подмосковных лесах. И уж совсем трудно точно сказать, сколько молекул в стакане воды или звезд в нашей Галактике.

Однако во всех этих случаях мы уверены, что число это конечное, хотя, может быть, и очень большое и недоступное для точного вычисления при данном состоянии наших научных познаний.

В математике рассматриваются не только конечные, но и бесконечные совокупности. Простейшим примером такой совокупности является совокупность, или, как принято говорить, *множество,* всех натуральных чисел: 1, 2, 3, 4, 5, ...

Мы уже сказали, что каждое натуральное число есть число предметов, образующих ту или иную совокупность, то или иное множество. Но множество *всех* натуральных чисел уже не есть конечное множество. На вопрос: «Сколько всего натуральных чисел?» — приходится ответить, что их бесконечно много. Какое бы большое число натуральных чисел мы ни задумали, всегда есть такие натуральные числа, которые не вошли в число задуманных.

В математике мы постоянно сталкиваемся с примерами бесконечных множеств. Возьмем, например, равносторонний треугольник T_1, впишем в него равносторонний треугольник T_2. Вершины треугольника T_2 суть середины сторон треугольника T_1. Таким же образом впишем в T_2 равносторонний треугольник T_3, в T_3 впишем T_4 и т. д. (рис. 1). Это построение

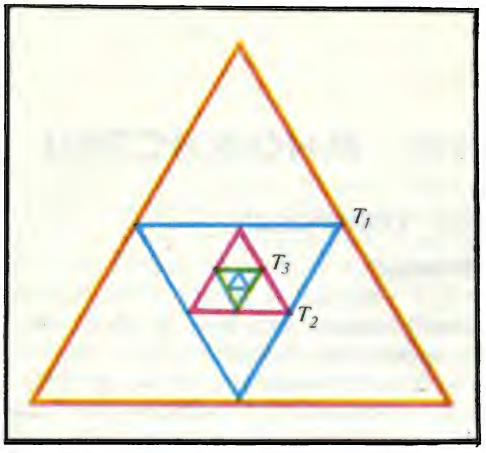


Рис. 1.

приводит к бесконечному множеству равносторонних треугольников:

$$T_1,\ T_2,\ T_3,\ T_4,\ T_5,\qquad T_n \qquad (1)$$

Тем более бесконечным является множество всех вообще равносторонних треугольников, лежащих в данной плоскости.

Последняя фраза несколько двусмысленна: слово «более» может быть воспринято в ней как составная часть выражения «тем более», употребленного в смысле «и подавно». Раз есть уже бесконечное множество равносторонних треугольников, получающихся при некотором определенном построении, то и подавно множество всех равносторонних треугольников бесконечно.

Но слово «более» может быть понято и как сравнительная степень прилагательного, и тогда высказанное выше суждение означает, что множество всех равносторонних треугольников, лежащих в данной плоскости, в каком-то смысле является «более бесконечным», чем бесконечное множество построенных нами треугольников:

$$T_1,\ T_2,\ T_3,\ldots\qquad T_n$$

Как видите, мы затронули интересный вопрос, долгое время отпугивавший ученых своей (впрочем, лишь кажущейся) парадоксальностью: существуют ли, если можно так выразиться, различные «степени» бесконечности? Возможна ли количественная оценка бесконечных множеств, позволяющая утверждать, что одно из двух бесконечных множеств является «более бесконечным», чем другое? Или же утверждение, что данное множество является бесконечным, окончательно в том смысле, что не дает возможности дальнейших различений или градаций количественного характера?

Первым, кто пытался ответить на этот вопрос, был знаменитый чешский математик и философ Б. Больцано (1-я половина XIX в.), но он не смог полностью преодолеть все трудности, которые при этом возникли.

Постараемся разобраться, в чем эти трудности и каково решение поставленного вопроса.

Бернард Больцано.

Взаимно однозначное соответствие между двумя множествами

Предположим, что мы имеем два конечных множества, например корзину яблок и корзину груш. Желая установить, чего у нас больше — яблок или груш, мы можем (и это будет самое простое решение вопроса) сосчитать число плодов в каждой корзине. Получим два числа, сравнение их и даст ответ на наш вопрос.

Но если мы имеем два бесконечных множества, то определить аналогичным образом, какое из них является «более бесконечным», а какое — «менее», нельзя по той простой причине, что бесконечное множество нельзя «сосчитать». Во всяком случае, мы не знаем, как это сделать. Поэтому постараемся ответить на вопрос, чего у нас больше — яблок или груш, не сосчитывая их, т. е. не пользуясь понятием числа. Вот какой представляется для этого путь.

Разложим наши яблоки, хотя бы на столе, и попробуем положить против каждого яблока по груше. Возможны три случая (рис. 2).

Первый случай: против каждого яблока окажется груша, и при этом не только все яблоки, но и все груши окажутся разложенными. В этом случае, очевидно, у нас столько же яблок, сколько и груш.

Второй случай: против каждого яблока окажется по груше, но при этом еще останется несколько «лишних» груш — в этом случае у нас больше груш, чем яблок.

Наконец, возможен последний, третий случай: стараясь разложить все груши так, чтобы против каждого яблока лежала груша, мы не достигнем цели — нам не хватит груш. Тогда, очевидно, груш меньше, чем яблок.

Как видите, мы смогли произвести количественную оценку двух множеств — корзины яблок и кор-

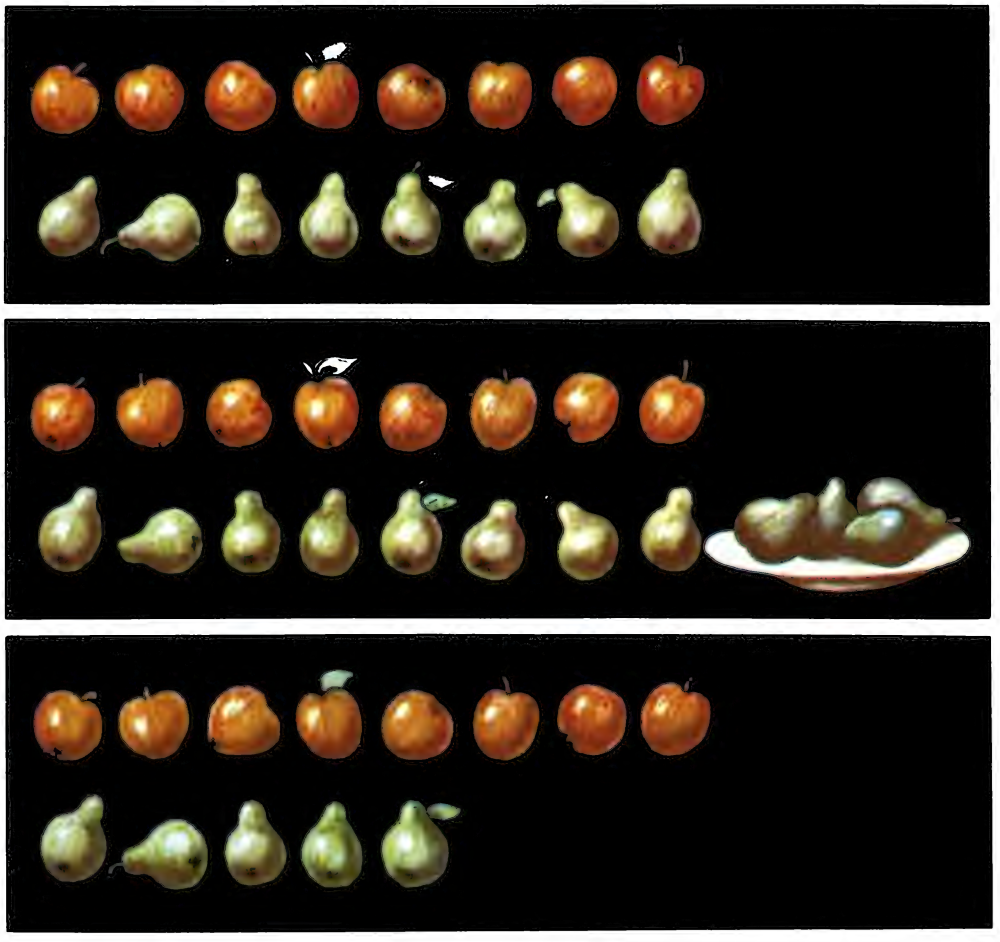


Рис. 2.

зины груш, не сосчитывая точно, сколько имеется тех и других плодов, т. е. установить, каких плодов больше, или убедиться, что их имеется одинаковое количество. Эту оценку мы произвели, установив, как говорят, *взаимно однозначное соответствие* между одним множеством и другим или частью другого. Для лучшего уяснения, что такое взаимно однозначное соответствие между двумя множествами, приведем еще несколько примеров.

Дается концерт. Чтобы на него пойти, надо купить билет. Перед нами два множества: множество людей, которые хотят пойти на этот концерт, — обозначим его через A — и множество билетов — обозначим его через B. Возможны разные случаи. Первый (не очень вероятный, но математически самый простой): все желающие пойти на концерт приобрели билеты, и все билеты при этом оказались проданными. Тогда каждому элементу множества A (т. е. каждому человеку, желающему пойти на концерт) соответствует определенный элемент множества B (купленный этим человеком билет). При этом каждый элемент множества B поставлен в соответствие одному-единственному элементу множества A (человеку, купившему этот билет). Установлено взаимно однозначное соответствие между множеством A и множеством B, или установлено взаимно однозначное *отображение* одного из этих множеств на другое.

Однако может случиться, что каждый человек, желавший пойти на концерт, купил себе билет, но в кассе остались еще не распроданные билеты. Опять получается взаимно однозначное отображение множества A, но уже не на все множество B, а только на некоторую его часть — на ту часть, или, как говорят, на то *подмножество* множества B, которое состоит из всех проданных билетов. Может, наконец, случиться, что все билеты проданы, но не все желающие пойти на концерт смогли купить билеты. Тогда обозначим через A' множество тех людей, которые не только хотели пойти на концерт, но и получили на него билет. Множество A' оказалось взаимно однозначно отображенным на множество B.

В математике можно найти многочисленные примеры взаимно однозначных соответствий. Например, каждой вершине треугольника или тетраэдра соответствует противоположная этой вершине сторона или грань. Таким образом, установлено взаимно однозначное соответствие между множеством всех вершин треугольника (тетраэдра) и множеством всех его сторон (граней). Множество всех сторон правильного многоугольника находится во взаимно однознач-

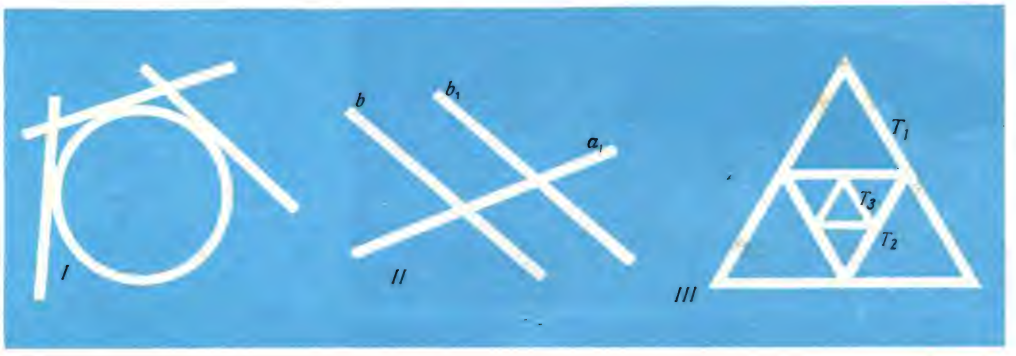


Рис. 3.

ном соответствии с множеством всех перпендикуляров, которые опущены на эти стороны из центра правильного многоугольника. Множество всех боковых граней пирамиды находится во взаимно однозначном соответствии с множеством апофем этой пирамиды и т. д.

Особенно существенным является тот факт, что взаимно однозначное соответствие возможно и между некоторыми бесконечными множествами. Приведем примеры. Обозначим через A множество всех точек данной окружности, а через B — множество всех прямых, являющихся касательными к этой окружности (рис. 3, I). Между множествами A и B установится взаимно однозначное соответствие, если мы каждой точке окружности поставим в соответствие касательную в этой точке. Таким образом, каждому элементу множества A соответствует единственный элемент множества B, и каждый элемент множества B (т. е. каждая касательная) при этом поставлен в соответствие единственному элементу множества A — точке прикосновения данной касательной.

Второй пример. Возьмем две пересекающиеся прямые a_1 и b_1 (рис. 3, II). Обозначим через A множество всех точек прямой a_1, а через B — множество, состоящее из прямой b_1 и из всех прямых, ей параллельных. Каждому элементу b множества B (т. е. каждой прямой b, параллельной прямой b_1 или совпадающей с ней) соответствует единственный элемент множества A — единственная точка прямой a_1, в которой ее пересекает прямая b.

В качестве третьего примера возьмем уже рассмотренное нами множество равносторонних треугольников

$$T_1,\ T_2,\ \ldots,\ T_n,\ \ldots,$$

В музее ... часов

Да, есть и такой музей. Часов там много всяких: старинных и современных, механических и электрических, огромных и крошечных, с боем и без боя, с циферблатом и без циферблата.

Первые механические часы были изобретены около середины X в. Очень долго часы имели лишь одну стрелку — часовую. Только в 1700 г. появилась и минутная стрелка, а еще через 60 лет — секундная.

400 лет часы приводятся в действие пружиной. Но эра пружины на исходе. Современные наручные электронно-механические часы совсем и заводить не надо.

В числе тикающих и безмолвствующих обитателей музея была пара действующих часов с боем, одинаковым по тембру. Однажды они ударили подряд, как я насчитал, 19 раз. Это произошло потому, что начало боя на первых часах опаздывало по отношению ко вторым часам на 2 секунды. Кроме того, первые часы, оказывается, ударяли через каждые 3 секунды, а вторые — через 4 секунды.

Который был час?

Решение на стр. 359.

Ответы и решения

Решение к стр. 336. Пусть число рыб в озере, годных для улова данной сетью, равно x. Тогда отношение числа меченых рыб к числу всех рыб равно $\frac{38}{x}$.

Во второй раз рыбовод выловил 53 рыбы, из них две меченые. Следовательно, отношение числа меченых рыб к числу выловленных равно $\frac{2}{53}$. Будем предполагать, что меченые рыбы равномерно распределились среди всех рыб в водоеме, тогда оба отношения одинаковы: $\frac{38}{x}=\frac{2}{53}$, откуда $x=1007$. Значит, в озере имеется примерно тысяча рыб, годных для улова данной сетью.

Ответ к стр. 323. $1\,000\,000\,000=10^9=(2\cdot 5)^9=2^9\cdot 5^9=512\cdot 1953125$.

$1\,000\,000\,000\,000\,000\,000=10^{18}=2^{18}\cdot 5^{18}=262\,144\cdot 3\,814\,697\,265\,625$.

каждый из которых, кроме первого, вписан в предыдущий (рис. 3, III). Множество всех этих треугольников обозначим через X. Каждый треугольник получил определенное натуральное число n в качестве своего номера.

Номером треугольника T_n является натуральное число n. Этим, очевидно, установлено взаимно однозначное соответствие между множеством X наших треугольников и множеством всех натуральных чисел.

Счетные множества

Вообще, если все элементы какого-нибудь множества X удается занумеровать посредством натуральных чисел так, что каждое натуральное число придано в качестве номера лишь одному элементу множества X, то такой нумерацией устанавливается взаимно однозначное соответствие между данным множеством X и множеством всех натуральных чисел. И обратно, всякое взаимно однозначное соответствие между каким-нибудь множеством X и множеством всех натуральных чисел можно рассматривать как нумерацию (сосчитывание) элементов множества X посредством натуральных чисел — мы просто приписываем каждому элементу множества X в качестве номера соответствующее ему натуральное число.

Мы здесь коснулись очень важного понятия. Ведь установление взаимно однозначного соответствия между некоторым множеством X и множеством всех натуральных чисел есть прямое перенесение в область бесконечных множеств пересчитывания какого-либо конечного множества (например, корзины яблок или стада гусей) с помощью натуральных чисел. Только в случае конечных множеств мы для сосчитывания его элементов нуждаемся лишь в конечном числе чисел (мы считаем: раз, два, три и т. д. — до того числа, которое показывает, сколько у нас яблок в корзине или гусей в стаде). В примере множества треугольников

$$T_1,\ T_2,\ T_3,\ldots\quad T_n,\ldots \qquad (1)$$

или вообще любого множества X, которое может быть приведено во взаимно однозначное соответствие с множеством всех натуральных чисел, мы вынуждены в качестве номеров воспользоваться *всеми* натуральными числами.

Но теперь возникает самый главный, основной для всей теории множеств вопрос. Всегда ли можно занумеровать элементы бесконечного множества натуральными числами так, чтобы каждый элемент данного множества получил определенный номер? Другими словами: можно ли установить взаимно однозначное соответствие между произвольным бесконечным множеством и множеством всех натуральных чисел?

Оказывается, ответ на этот вопрос отрицательный, и мы постараемся убедиться в этом. Но сначала несколько подготовимся. Прежде всего установим название для тех множеств, которые могут быть поставлены во взаимно однозначное соответствие с множеством всех натуральных чисел. Эти множества называются *счетными*. Это название естественно: счетное множество — это такое множество, которое может быть сосчитано посредством натуральных чисел. Наша задача — показать, что существуют несчетные множества, т. е. такие, которые не могут быть поставлены во взаимно однозначное соответствие с множеством всех натуральных чисел.

Множество всех рациональных чисел счетно

В поисках несчетного множества обратимся к множеству всех рациональных чисел (читатель, конечно, помнит, что рациональными числами называются все целые и все дробные числа). Посмотрим, можно ли занумеровать все рациональные числа с помощью натуральных. Для простоты рассмотрим сначала все положительные рациональные числа и попробуем их как-нибудь занумеровать. Сразу же сталкиваемся с трудностью: среди положительных рациональных чисел заведомо нет наименьшего числа, каким является единица среди натуральных чисел; ведь, каково бы ни было положительное рациональное число r, число $^1/_2 r$ также является положительным рациональным числом, и оно меньше, чем r. Предположим, мы обойдем эту трудность, начав счет с какого-нибудь рационального числа r_1, которое согласимся считать первым. Но тогда на следующем этапе возникает такая трудность: какое рациональное число считать вторым, т. е. непосредственно следующим в порядке нашего счета за числом r_1? Дело в том, что, какое бы рациональное число $r_2 > r_1$ мы ни взяли, имеются рациональные числа большие, чем r_1, и меньшие, чем r_2, и таких бесконечное множество, например числа:

$$r_3 = \frac{1}{2}(r_1 + r_2),\ r_4 = \frac{1}{2}(r_1 + r_3),\ldots$$

Таким образом, среди всех рациональных чисел, больших чем выбранное нами число r_1, нет наименьшего. Какое же объявить первым из следующих за r_1? Но возникшая трудность кажущаяся. Она показывает только, что невозможно занумеровать рациональные числа с помощью натуральных чисел таким образом, чтобы при этой нумерации возрастающим номерам соответствовали возрастающие числа. Придется попытаться занумеровать рациональные числа как-нибудь иначе, не стремясь к тому, чтобы число r_2, первое после r_1 в порядке нашего счета, было и первым по величине, т. е. наименьшим из всех следующих за r_1. А тогда нужная нам нумерация находится очень легко.

В самом деле, каждое положительное рациональное число однозначно записывается в виде несократимой дроби $\frac{p}{q}$ (целое число n будем при этом записывать в виде дроби $\frac{n}{1}$ и также считать ее несократимой). Назовем *высотой* дроби $\frac{p}{q}$ натуральное число $q+p$. Под высотой рационального числа будем понимать высоту той единственной несократимой дроби, которая является записью данного числа.

Посмотрим, сколько приходится рациональных чисел на каждую данную высоту. Высоту 1 не имеет ни одно положительное рациональное число (потому что, записывая рациональное число в виде несократимой дроби $\frac{p}{q}$, видим, что ее высота равна натуральному числу $p+q$, а так как $p \geqslant 1$, $q \geqslant 1$, то $p+q \geqslant 2$). Высоту 2 имеет, очевидно, единственное рациональное число $\frac{1}{1}=1$.

Высоту 3 имеют дроби $\frac{1}{2}$ и $\frac{2}{1}$, т. е. рациональные числа $\frac{1}{2}$ и 2.

Высоту 4 имеют дроби $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{2}$, $\frac{3}{1}$.

Среди них оставляем лишь несократимые $\frac{1}{3}$ и $\frac{3}{1}$

Итак, высоту 4 имеют рациональные числа $\frac{1}{3}$ и 3.

Высоту 5 имеют дроби $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{4}{1}$, среди которых нет сократимых, так что на высоту 5 приходится 4 числа.

Высоту 6 имеют дроби $\frac{1}{5}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{3}$, $\frac{4}{2}$, $\frac{5}{1}$, среди которых несократимы лишь первая и последняя; следовательно, высоту 6 имеют числа $\frac{1}{5}$ и 5.

Продолжая рассуждать таким образом дальше, мы прежде всего убеждаемся в том, что, каково бы ни было натуральное число $h>1$, есть лишь конечное число рациональных чисел с этой высотой.

В самом деле, дроби с высотой h — это, очевидно,

$$\frac{1}{h-1}, \quad \frac{2}{h-2}, \ldots, \quad \frac{h-1}{1}$$

Их конечное число: $h-1$. Среди этих дробей некоторые могут оказаться сократимыми, а остальные дадут рациональные числа с высотой h.

Теперь уже очень легко занумеровать все положительные рациональные числа: мы начинаем с наименьшей высоты 2 и идем дальше, все время увеличивая на единицу высоту и сосчитывая то (всегда конечное) число рациональных чисел, которое приходится на данную высоту. Таким образом, число $1=r_1$ получает номер 1. Далее идут два числа: $r_2=\frac{1}{2}$ и $r_3=2$ высоты 3, потом два числа: $r_4=\frac{1}{3}$ и $r_5=3$ высоты 4, потом четыре числа: $r_6=\frac{1}{4}$, $r_7=\frac{2}{3}$, $r_8=\frac{3}{2}$, $r_9=4$ высоты 5, два числа: $r_{10}=\frac{1}{5}$, $r_{11}=5$ высоты 6 и т. д. Получаем таблицу (через n_h обозначено число рациональных чисел высоты h):

Высота	Числа данной высоты
2	r_1 ($n_2=1$)
3	r_2, r_3 ($n_3=2$)
4	r_4, r_5 ($n_4=2$)
5	r_6, r_7, r_8, r_9 ($n_5=4$)

Так как каждое рациональное число имеет своей высотой некоторое натуральное число h, оно найдет свое место в строке, соответствующей этой высоте, и получит определенный номер, не больший чем число $n_2+n_3+\ldots+n_{h-1}+n_h$.

Итак, множество всех положительных рациональных чисел есть счетное множество.

Множество всех действительных чисел несчетно

И тем не менее несчетные множества существуют. Оказывается, множество всех действительных чисел *несчетно*. Этот замечательный факт, как и теорема о счетности множества всех рациональных чисел, впервые в 1874 г. был доказан знаменитым немец-

ким математиком Г. Кантором, основателем теории множеств. Воспроизводим доказательство Кантора. Доказываем, что несчетным является уже множество всех действительных чисел интервала (0; 1).

Под интервалом $(a; b)$ числовой прямой понимается множество всех действительных чисел x, удовлетворяющих неравенству $a<x<b$.

Каждое такое действительное число может быть записано в виде бесконечной десятичной дроби с целой частью нуль. При этом каждому действительному числу соответствует лишь одна такая запись, за исключением действительных чисел, выражаемых конечными десятичными дробями: каждое такое число, например 0,2476622021711, может быть записано двумя способами в виде бесконечной десятичной дроби:

$$0{,}2476622021711000000000.$$
$$0{,}2476622021710999999999.$$

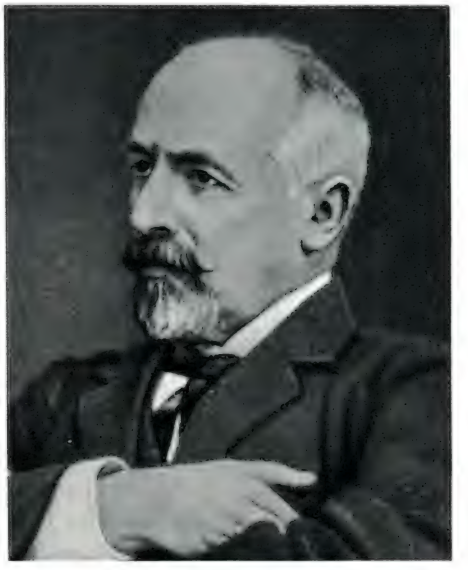
Одна из этих записей начиная с некоторого момента содержит одни лишь нули, а другая — одни девятки. Если мы согласимся не употреблять записей, в которых начиная с какого-нибудь места идут одни девятки, то каждое действительное число будет иметь лишь единственную запись в виде бесконечной десятичной дроби. Докажем теперь теорему о несчетности множества действительных чисел от противного: предположим, что множество действительных чисел (мы говорим все время о числах X интервала (0; 1) счетно, т. е. может быть занумеровано посредством натуральных чисел. Тогда вся совокупность действительных чисел интервала (0; 1) может быть записана в виде последовательности: $x_1, x_2,$ Запишем разложение числа x_n в бесконечную десятичную дробь:

$$x_n = 0,\ a_1^{(n)},\ a_2^{(n)},\ a_3^{(n)},\ a_4^{(n)},\quad .a_n^{(n)},$$
где $a_1^{(n)},\ a_2^{(n)},\ a_3^{(n)}$

суть последовательные десятичные знаки числа x_n, причем, согласно заключенному нами условию, не может случиться, что все десятичные знаки начиная с некоторого суть девятки.

Итак, все действительные числа x (интервала (0; 1) предполагаются записанными в виде:

$$\begin{aligned}
x_1 &= 0,\ a_1^{(1)}\, a_2^{(1)}\, a_3^{(1)}\, a_4^{(1)}\, a_5^{(1)} \qquad a_n^{(1)}\\
x_2 &= 0,\ a_1^{(2)}\, a_2^{(2)}\, a_3^{(2)}\, a_4^{(2)}\, a_5^{(2)} \qquad a_n^{(2)}\\
x_3 &= 0,\ a_1^{(3)}\, a_2^{(3)}\, a_3^{(3)}\, a_4^{(3)}\, a_5^{(3)} \qquad a_n^{(3)}\\
x_4 &= 0,\ a_1^{(4)}\, a_2^{(4)}\, a_3^{(4)}\, a_4^{(4)}\, a_5^{(4)} \qquad a_n^{(4)}\\
&\cdots\\
x_n &= 0,\ a_1^{(n)}\, a_2^{(n)}\, a_3^{(n)}\, a_4^{(n)}\, a_5^{(n)} \qquad a_n^{(n)}
\end{aligned} \tag{1}$$



Георг Кантор.

Приведем наше предположение к противоречию, найдя действительное число c, заключенное между 0 и 1 и заведомо не входящее в табл. (1). Для этого рассмотрим цифры, стоящие по диагонали в табл. (1), а именно

$$a_1^{(1)},\ a_2^{(2)},\ a_3^{(3)},\ a_4^{(4)},\ a_5^{(5)},\quad .,\ a_n^{(n)},$$

и выберем для каждого n натуральное число b_n, не превосходящее число 8 и отличное от числа $a_n^{(n)}$ (например, при $a_n^{(n)}<8$ полагаем $b_n=a_n^{(n)}+1$, а при $a_n^{(n)}=8$ полагаем $b_n=7$).

Рассмотрим бесконечную десятичную дробь

$$0,\ b_1\, b_2\, b_3\, b_4\, b_5 \qquad b_n$$

Она не содержит ни одной девятки и выражает число c, заключенное между 0 и 1, заведомо отличное от всех чисел $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n,$ В самом деле, если бы было:

$$c = x_n = 0,\ a_1^{(n)}\, a_2^{(n)} \qquad a_n^{(n)}$$

то на n-м месте в разложении числа c мы должны были бы иметь цифру $a_n^{(n)}$, тогда как в действительности имеем $b_n \neq a_n^{(n)}$. Теорема доказана.

Мощность множества

Нам нужно осмыслить полученный результат и подвести некоторые итоги всему до сих пор сказанному. Мы начали с понятия взаимно однозначного соответствия между двумя множествами, возможность которого (в случае конечных множеств) равносильна тому, что оба множества состоят из одного и того же числа элементов. Это обстоятельство указывает путь

и к установлению количественного равенства, или *количественной эквивалентности*, между двумя бесконечными множествами. Мы скажем, что два (конечных или бесконечных) множества количественно эквивалентны, или имеют одну и ту же *мощность*, если между ними возможно установить взаимно однозначное соответствие. Понятие «одинаковая мощность» означает для конечных множеств, что они состоят из одного и того же числа элементов.

Далее скажем, что множество A имеет бóльшую мощность, чем множество B, если можно множество B отобразить взаимно однозначно на часть множества A и в то же время нельзя отобразить множество A на часть множества B. Теперь можем сказать, что счетные множества — это множества, количественно эквивалентные множеству натуральных чисел. Но существуют множества и несчетные, например множество всех действительных чисел, интервала (0; 1) и любого другого интервала.

Всякий интервал числовой прямой может быть взаимно однозначно отображен на интервал (0; 1). (Докажите это!)

Для того чтобы убедиться в том, что всякое несчетное множество имеет бóльшую мощность, чем каждое счетное множество (все счетные множества имеют, очевидно, одну и ту же мощность), надо доказать следующие два предложения:

1. *Всякое подмножество счетного множества или конечно, или счетно.*

2. *Всякое бесконечное (значит, в частности, всякое несчетное) множество содержит счетное.*

Доказательство первого утверждения. Пусть X — счетное множество, X_0 — какое-нибудь подмножество (т. е. часть) множества X. Элементы множества X могут быть занумерованы посредством натуральных чисел, т. е. записаны в виде:

$$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots \qquad (2)$$

Среди этих элементов содержатся и все элементы множества X_0. Пусть это будут — в порядке возрастания номеров в последовательности (2) — элементы:

$$x_{n_1}, x_{n_2}, x_{n_3}, \ldots, x_{n_k}, \ldots \qquad (3)$$

Возможно одно из двух: или последовательность (3) обрывается на каком-то конечном шаге k, т. е. множество X_0 состоит из конечного числа элементов: $x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots, x_{n_k}$, или же мы имеем бесконечную последовательность: $x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots, x_{n_k}, \ldots$, которую можем переписать, полагая $y_1 = x_{n_1}$, $y_2 = x_{n_2}$, $y_k = x_{n_k}$ в виде

$$y_1, y_2, \ldots, y_k, \ldots$$

непосредственно показывающем, что X_0 — счетное множество.

Доказательство второго утверждения. Пусть X — бесконечное множество. Выбираем в X какой-нибудь элемент x_1.

Несомненно, в X имеются элементы, отличные от x_1 (иначе X состояло бы из одного элемента и было бы конечным). Возьмем один из таких элементов и обозначим его через x_2. Элементы x_1 и x_2 не исчерпывают множества X, поэтому существует элемент x_3 множества X, отличный как от x_1, так и от x_2. И так далее. Продолжая этот процесс, получим счетное множество: $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots$, содержащееся в X.

Итак, на вопрос, поставленный в начале нашего изложения: «Существуют ли бесконечные множества разных «степеней бесконечности» (т. е. разных мощностей)?» — мы можем ответить утвердительно. Существуют состоящие из действительных чисел множества по крайней мере двух различных мощностей: множество всех действительных чисел какого-нибудь интервала, с одной стороны, и любое счетное множество действительных чисел (например, множество положительных рациональных чисел) — с другой. К этому выводу мы пришли, обосновывая количественную оценку бесконечных множеств при помощи понятия взаимно однозначного соответствия. Однако не следует думать, что взаимно однозначное соответствие между бесконечными множествами во всем похоже на взаимно однозначное соответствие между множествами конечными.

Очевидно, никакое конечное множество нельзя взаимно однозначно отобразить на его часть (часть никогда не равна целому). Уже простейшие примеры показывают, что это утверждение решительно перестает быть верным в области бесконечных множеств: мы видели, что всякое бесконечное подмножество счетного множества счетно, т. е. счетное множество может быть взаимно однозначно отображено на всякую его бесконечную часть. Например, подписывая под всеми натуральными числами подряд все четные:

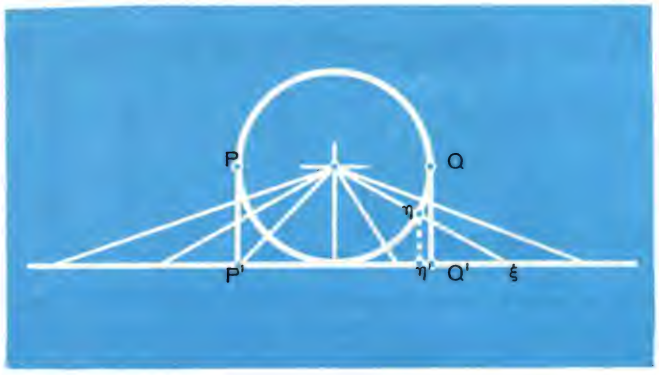
1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10
2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, ...,

получим взаимно однозначное соответствие между множеством всех натуральных чисел и его частью — множеством одних лишь четных чисел.

Другой пример. Существует взаимно однозначное отображение между множеством всех действительных чисел (между всей числовой прямой) и любым его интервалом.

Для того чтобы получить такое соответствие, можно поступить так. Построим в плоскости окружность,

Рис. 4.



касающуюся оси абсцисс, и возьмем нижнюю полуокружность PQ этой окружности (рис. 4). Концы P и Q полуокружности к ней не причисляются. Установим взаимно однозначное соответствие между всеми точками полуокружности PQ и всеми точками числовой прямой. Для этого сначала поставим в соответствие каждой точке ξ прямой ту точку η полуокружности, в которой ее пересекает луч, идущий из центра окружности в точку ξ.

Теперь спроектируем полуокружность PQ на интервал $P'Q'$ оси абсцисс и поставим в соответствие точке η полуокружности ее проекцию η'.

В результате каждой точке ξ прямой оказалась поставленной в соответствие точка η' интервала $P'Q'$, и полученное соответствие есть взаимно однозначное отображение всей числовой прямой на интервал $P'Q'$.

Можно доказать и другие, кажущиеся на первый взгляд парадоксальными, теоремы о мощности различных множеств. Упомянем лишь одну из них:

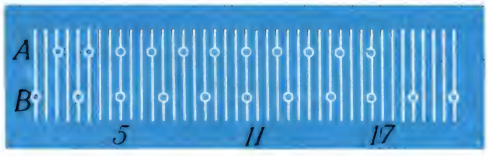
Существует взаимно однозначное соответствие между всеми точками прямой и всеми точками плоскости.

Заметим, наконец, следующее. В математике наибольшее значение имеют так называемые числовые множества, т. е. множества, элементами которых являются действительные числа. Все известные в настоящее время числовые множества или счетны, или имеют ту же мощность, что и вся числовая прямая. Возникла, таким образом, гипотеза, что всякое несчетное числовое множество имеет ту же мощность, что и вся числовая прямая. Эта гипотеза была высказана еще Кантором и известна под названием континуум-гипотезы. Трудности, связанные с континуум-гипотезой, получают свое освещение в так называемой *математической логике,* и мы о них здесь говорить не можем.

Эта статья имеет своей целью дать лишь начальное представление о некоторых простейших понятиях обширной области математики — *теории множеств,* области, возникшей менее чем сто лет назад.

Решение к стр. 354. Построим ряд параллельных отрезков, промежутки между которыми будем считать изображением секунд. Точками изобразим удары боя первых (A) и вторых (B) часов соответственно условию задачи (см. рис. справа).

Схема показывает, что под номерами 5, 11, 17 удары происходят одновременно и на слух сливаются каждый раз в один удар. Максимальное число ударов для каждых часов в отдельности равно 12, но если бы это было так, то мы насчитали бы



21 удар. На схеме изображены 19 ударов, что соответствует 11 раздельным ударам часов А и В. Значит, часы показывали 11.

Ну и дроби!

Беру две дроби, каждую возвожу в квадрат, результаты складываю, получаю некоторое число S.

Теперь каждую из первоначальных дробей возвожу в куб, результаты складываю и... получаю то же самое число S.

Выходит, что сумма квадратов двух чисел равна сумме кубов тех же чисел. Такое заключение кажется неправдоподобным. И все же это не фокус, не трюк. Есть много пар таких дробей. Попробуйте найти их.

Решение на стр. 403.

Кто сильнее!

Борис взялся за один конец каната, а Аркадий и Николай вместе — за другой. Перетянул Борис, хотя и с большим трудом.

Когда с одной стороны встали Борис и Аркадий, а с другой Владимир с Николаем, то ни та ни другая пара не смогла перетянуть канат на свою сторону. Но стоило только Николаю и Аркадию поменяться местами, как победу одержала пара Владимир и Аркадий.

По нашему убеждению, основанному на точных рассуждениях, самый сильный из этих четырех друзей — Владимир, следующий по силе — Борис, а на последнем, четвертом месте — Николай. Тот из читателей, кто согласен с нашим заключением, должен уметь обосновать его.

Алгебра множеств и алгебра логики

Алгебра чисел

В арифметике и алгебре рассматривают числа разной природы — целые числа, рациональные числа (дроби) и другие. Во всех случаях с каждыми двумя числами a и b сопоставляются еще два числа: $a+b$ и ab, называемые *суммой* и *произведением* чисел a и b. Определение суммы и произведения двух чисел различно для чисел разной природы. Так, если a есть целое положительное число, то его можно представлять себе как число предметов в некотором наборе. При этом сумма $a+b$ означает число предметов, которые мы получим, если объединим первый набор, содержащий a предметов, и второй набор, содержащий b предметов (рис. 1). Если же объединим b наборов, каждый из которых содержит по a предметов, то всего мы получим ab предметов (рис. 2). Более сложно определяются сумма и произведение дробей, например так:

$$\frac{a_1}{a_2}+\frac{b_1}{b_2}=\frac{a_1b_2+a_2b_1}{a_2b_2}$$

и

$$\frac{a_1}{a_2}\,\frac{b_1}{b_2}=\frac{a_1b_1}{a_2b_2}.$$

(Здесь числа a_1, a_2, b_1, b_2 целые.) Иные правила относятся к сложению и умножению отрицательных чисел, среди этих правил есть, скажем, такое:

$$(-a)(-b)=-ab.$$

Но независимо от природы рассматриваемых чисел и от определения суммы и произведения чисел общие законы действия над числами остаются одни и те же. Вот эти законы:

$$a+b=b+a$$

(*коммутативный*, или *переместительный*, закон для *сложения*);

$$ab=ba$$

(*коммутативный*, или *переместительный*, закон для *умножения*);

$$(a+b)+c=a+(b+c)$$

(*ассоциативный*, или *сочетательный*, закон для *сложения*);

$$(ab)c=a(bc)$$

(*ассоциативный*, или *сочетательный*, закон для *умножения*);

$$(a+b)c=ac+bc$$

(*дистрибутивный*, или *распределительный*, закон для *умножения* (относительно сложения)).

При этом сразу бросается в глаза, что правила, относящиеся к сложению чисел, очень похожи на правила умножения.

Например:

$$a+b=b+a \text{ и } ab=ba,$$
$$(a+b)+c=a+(b+c) \text{ и } (ab)c=a(bc).$$

Это сходство между действиями сложения и умножения находит отражение и в существовании двух замечательных чисел 0 и 1, таких, что прибавление одного из них и умножение на второе не меняют ни одного числа:

$$a+0=a \text{ и } a\cdot 1=a.$$

Следует, впрочем, заметить, что сходство между действиями сложения и умножения не простирается особенно далеко. Так, например, число 0 играет особую роль не только по отношению к сложению, но и по отношению к умножению: эта особая роль числа 0 определяется замечательным равенством $a\cdot 0=0$. (Из этого равенства, в частности, вытекает, что делить на 0 число $a=0$ нельзя.) В противоположность этому числу 1 по отношению к операции сложения не играет никакой особой роли: равенство, которое получается из равенства $a\cdot 0=0$ заменой числа 0 на число 1 и операции умножения — операцией сложения:

$$a+1=1,$$

почти никогда не будет верным. (Это равенство справедливо лишь при $a=0$.)

Так же и дистрибутивный закон

$$(a+b)c=ac+bc$$

подчеркивает различие между действиями сложения и умножения. Если заменить в записи этого закона сложение умножением и наоборот, то получим курьезное «равенство»:

$$(a\cdot b)+c=(a+c)\cdot(b+c),$$

как правило, не выполняющееся: так, $1\cdot 2+3=5$, а $(1+3)\cdot(2+3)=20$. (Нетрудно видеть, что равенство $(a\cdot b)+c=(a+c)\cdot(b+c)$ справедливо лишь при $c=0$ и при $a+b+c=1$.)

В математике, однако, операции сложения и умножения определяются не только для чисел. При этом иногда удается прийти к «алгебре», в которой сходство между операциями сложения и умножения оказывается бóльшим, чем в обычной «числовой» алгебре. В качестве примера можно указать «алгебру множеств».

Рис. 1. $a+b=c$

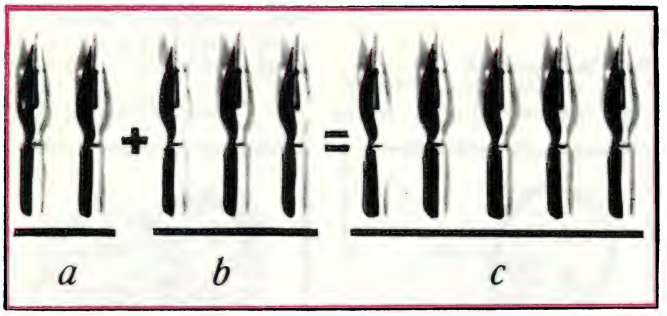
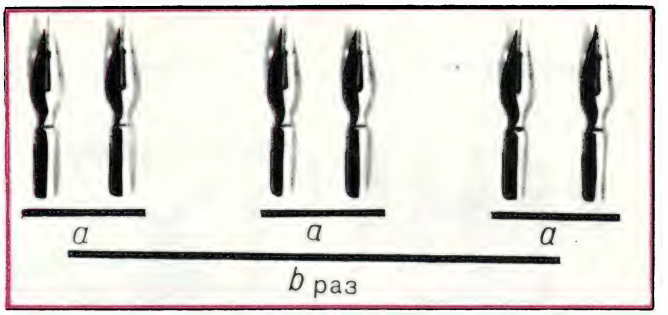


Рис. 2. $a \cdot b=c$



Алгебра множеств

Рассмотрим систему всевозможных множеств (совокупностей) тех или иных объектов; например, будем говорить о множествах учеников класса.

Сумму $A+B$ двух множеств A и B определим как такое множество, которое получается при *объединении* множеств A и B; другими словами, в множество $A+B$ входят все те, и только те, объекты, которые входят в множество A или в множество B. Так, например, если A есть множество отличников нашего класса, состоящее из учеников Пети, Саши, Веры, Кати и Наташи, а B — множество учеников, которые сидят в первом ряду, состоящее из школьников Илюши, Гриши, Зои, Кати, Наташи и Яши, то сумма $A+B$ этих двух множеств состоит из учеников, которые являются отличниками *или* сидят в первом ряду; в нее входят ученики Петя, Саша, Вера, Катя, Наташа, Илюша, Гриша, Зоя и Яша (рис. 3).

То обстоятельство, что мы назвали сложением совершенно новую операцию, не должно нас смущать, ведь мы и раньше каждый раз, когда переходили от чисел одной природы к числам другой природы, определяли сложение по-новому. Ясно, например, что сложение положительных и отрицательных чисел — это не то же самое, что сложение одних положительных чисел; так, *сумма* чисел 5 и (-3) — это то же самое, что *разность* чисел 5 и 3. Сложение дробей не то же самое, что сложение целых чисел; рис. 1, изображающий сложение чисел, становится непригоден, когда речь заходит о дробях. Однако, называя уже знакомым нам словом «сложение» новую операцию, мы каждый раз должны были лишь «доучиваться», но не «переучиваться» — навыки, выработавшиеся в процессе действий с натуральными числами (и нулем), оказываются полезными и при действиях с дробями, правила действий над положительными числами полезны и при действиях с относительными (положительными или неположительными!) числами и т. д. Это связано с тем, что общие законы, которым подчиняется операция сложения целых чисел, остаются в силе и в дальнейшем, скажем при переходе к дробным числам; так, например, в обоих случаях сложение коммутативно $(a+b=b+a)$ и ассоциативно $[(a+b)+c=a+(b+c)]$.

Посмотрим теперь, сохраняют ли силу эти законы и для множеств. При этом нам удобно будет использовать специальные диаграммы, иллюстрирующие действия над множествами. Условимся обозначать весь класс (точнее говоря, множество *всех* учеников класса) квадратом; в этом квадрате можно расставить ряд точек, по числу учеников (рис. 4). При этом отдельные множества учеников будут изображаться *частями* квадрата: так, например, изображенная на рис. 5а фигура графически иллюстрирует множество A отличников, а изображенная на рис. 5б — множество B учеников, сидящих в первом ряду. Под *суммой* двух множеств A и B понимается фигура, получаемая *объединением* фигур, изображающих множества A и B (рис. 6).

Такие диаграммы принято называть *диаграммами Эйлера* или *диаграммами Венна* (по имени английского логика Дж. Венна, 1834—1923). Они позволяют наглядно представить операцию сложения множеств и проверить ее свойства.

Ясно, например, что

$$A+B=B+A$$

(*коммутативный закон для сложения множеств*; рис. 7). Также ясно, что

$$(A+B)+C=A+(B+C)$$

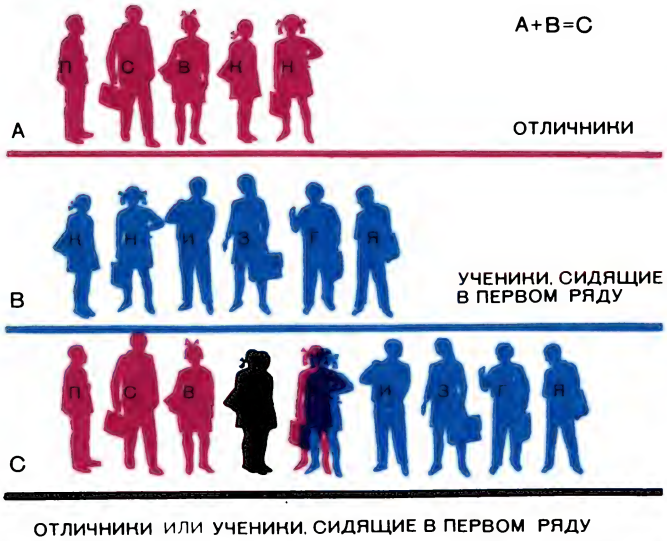
(*ассоциативный закон для сложения множеств*; рис. 8). Сумму $(A+B)+C=A+(B+C)$ естественно обозначать просто через $A+B+C$ (без скобок).

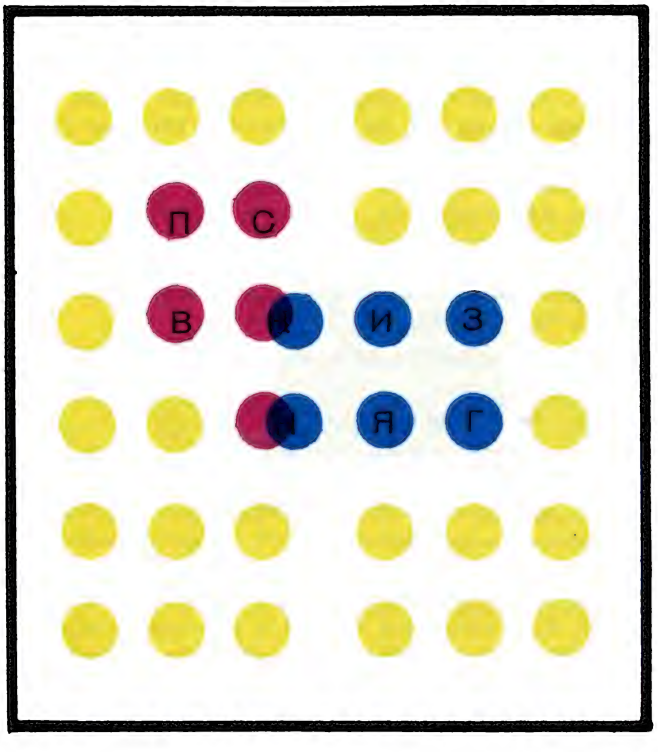
Определим теперь *произведение* $A \cdot B$, или AB, двух множеств A и B как множество, получаемое в *пересечении* множеств A и B; другими словами, в множество AB входят те, и только те, элементы, которые входят как в множество A, так и в множество B. Так, например, если A и B — указанные выше множество отличников и множество учеников, сидящих в классе в первом ряду, то множество AB состоит из тех учеников, которые являются отличниками *и* сидят в первом ряду; оно состоит всего из двух учеников — Кати и Наташи (рис. 9). На рис. 10 то же множество AB изображено на диаграмме как пересечение множеств A и B.

Использование термина «произведение» в совершенно новом смысле оправдывается тем обстоятельством, что, как и для обыкновенного умножения, мы имеем: $AB=BA$ (*коммутативный закон для умно-*

Рис. 3 (верхний).

Рис. 4 (нижний).





жения множеств; рис. 11) и $(AB)C=A(BC)$ (*ассоциативный закон для умножения множеств*; рис. 12). Множество $(AB)C=A(BC)$ естественно обозначать просто через ABC (без скобок).

Проверим теперь, выполняется ли для множеств *дистрибутивный* закон. На рис. 13а выделены мно-

Рис. 5а (верхний).

Рис. 5б (нижний).

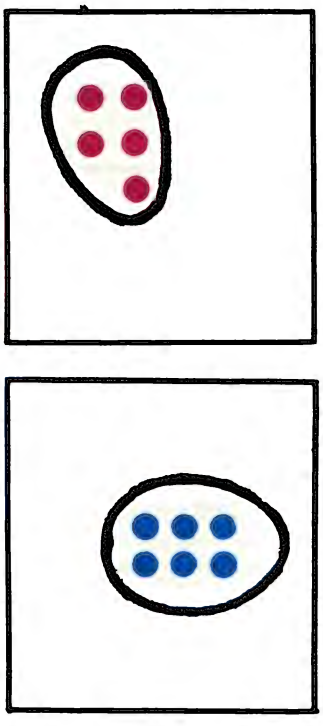
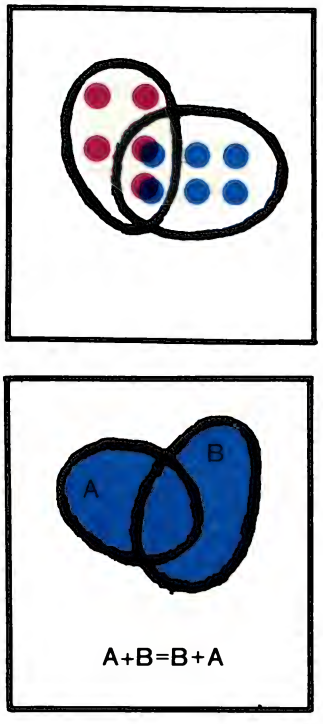


Рис. 6 (верхний). Сумма двух фигур — это их объединение.

Рис. 7 (нижний).



жества $A+B$ и C, синим цветом отмечено их произведение — множество $(A+B)C$. На рис. 13б красным и желтым цветом обозначены множества AC и BC, а синим цветом — их *сумма*, т. е. множество $AC+BC$. Но легко видеть, что множество, закрашенное синим цветом на рис. 13а, — это в точности то множество, которое отмечено синим цветом на рис. 13б. Отсюда заключаем: в «алгебре множеств» выполняется дистрибутивный закон:

$$(A+B)C=AC+BC$$

«Нуль» и «единица»

Выясним, существует ли в «алгебре множеств» такой элемент 0 («нуль»), что прибавление его к любому множеству A *не меняет* этого множества. Ясно, что последнее возможно только в том случае, если «множество 0» совсем не содержит элементов, является «пустым». Но в последнем случае не хочется даже говорить о «множестве»: какое же это множество, состоящее из отдельных элементов, если этих элементов вовсе нет?

Рис. 8 (верхний).

Рис. 9 (нижний).

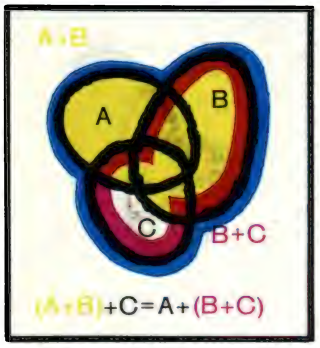
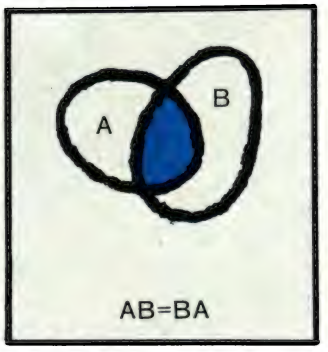


Рис. 10. Произведение двух фигур — это их пересечение.

Рис. 11 (верхний).

Рис. 12 (нижний).



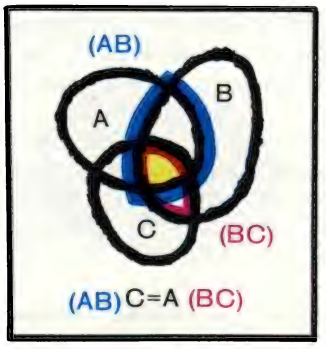
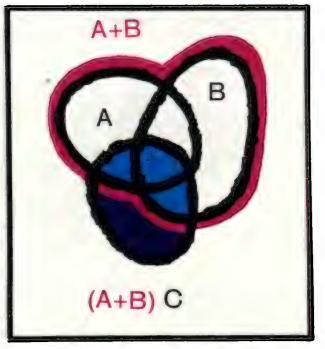
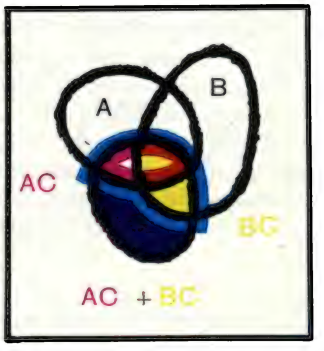


Рис. 13а (верхний).

Рис. 13б (нижний).





В учении о множествах, однако, целесообразнее причислять *пустое множество*, вовсе не содержащее элементов, к числу рассматриваемых множеств. Ведь в противном случае мы зачастую не сможем говорить о множестве, не выяснив предварительно, существует оно или нет. Так, прежде чем сказать: «Множество отличников из IX класса «А» школы № 13 Ленинграда», нам придется пойти в школу и справиться об успеваемости учеников этого класса. Гораздо удобнее спокойно говорить об этом множестве, оговорив только, что оно может быть и пустым, т. е. не содержать ни одного элемента. В ряде случаев мы можем заранее сказать, что то или иное множество не является пустым; так, не пустое, разумеется, множество самых высоких учеников класса (это множество может иногда содержать и больше одного ученика). В иных случаях мы сразу скажем, что множество, о котором идет речь, пустое. Так, конечно, пустым является множество обучающихся в вашем классе живых слонов или множество учеников, рост которых превышает 2,5 м. Однако в большинстве случаев лишь более тщательный анализ позволяет указать, является то или иное множество пустым или нет. Так, например, множество Семенов или множество левшей из вашего класса может оказаться пустым или не пустым.

Пустое множество в дальнейшем всегда будем обозначать знаком O. Таким образом, для каждого множества A будем иметь (рис. 14):

$$A+O=A.$$

Подобно известному правилу $a\cdot 0=0$ алгебры чисел, для любого множества A также имеем:

$$A\cdot O=O.$$

В самом деле, множество $A\cdot O$, по определению, состоит из всех элементов, принадлежащих и множеству A и множеству O. Но множество O вовсе не содержит элементов; поэтому не может содержать элементов также и множество $A\cdot O$ (или AO).

Теперь зададимся вопросом о «множестве 1», обладающем тем свойством, что произведение его на любое множество A дает A. Последнее означает, что пересечение или общая часть «множества 1» и множества A для любого множества A совпадает с самим этим множеством. Но это возможно, разумеется, лишь в том случае, если «множество 1» содержит *все* вообще существующие элементы. Так, если мы рассматриваем всевозможные множества учеников из нашего класса, то роль единицы будет играть множество *всех* обучающихся в классе учеников. Нетрудно понять, что, скажем, произведение этого множества и множества A отличников будет состоять из всех отличников (т. е. совпадать с A);

Рис. 14.

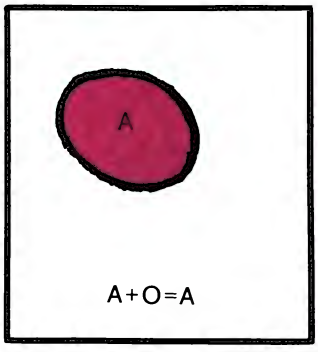


Рис. 15.

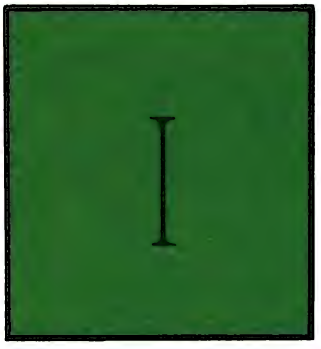


Рис. 16а.

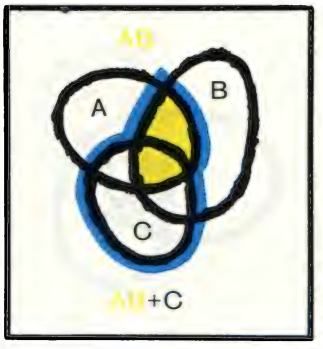
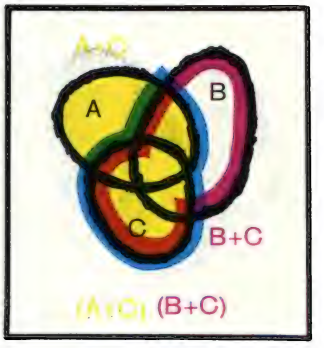


Рис. 16б.



произведение этого множества и множества B сидящих в первом ряду учеников будет состоять из всех учеников, сидящих в первом ряду (т. е. будет совпадать с множеством B).

Множество, состоящее из всех элементов всех рассматриваемых множеств, называется *полным, универсальным* или *единичным*; мы будем обозначать его знаком I. Таким образом, для любого множества A:

$$A \cdot I = A.$$

Универсальное множество I графически изображается *всем* квадратом, внутри которого мы рисуем фигуры, изображающие различные множества (рис. 15).

Удивительная алгебра

До сих пор все рассматриваемые законы действий над множествами совпадали с законами действий над числами. Однако на самом деле алгебра множеств вовсе не копирует в точности алгебру чисел; она обладает и многими удивительными свойствами, не имеющими места в обычной алгебре. Мы начнем со *второго дистрибутивного* закона, получаемого из первого дистрибутивного закона

$$(A+B)C = AC + BC$$

заменой сложения умножением и наоборот:

$$AB + C = (A+C)(B+C)$$

Как уже указывалось, в алгебре чисел этот «второй дистрибутивный закон», вообще говоря, места не имеет. По-другому обстоит дело с алгеброй множеств. На рис. 16а желтым цветом закрашено множество AB, а синим цветом отмечено объединение AB и C — множество $AB+C$. На рис. 16б желтым и красным цветом выделены множества $A+C$ и $B+C$, а синим цветом — их пересечение, т. е. множество $(A+C)(B+C)$. Но легко видеть, что множество, отмеченное синим цветом на рис. 16б, — это в точности то множество, которое выделено тем же цветом на рис. 16а. Таким образом, для любых трех множеств, A, B и C:

$$AB + C = (A+C)(B+C).$$

Далее, мы выше отмечали курьезное равенство: $a+1=1$, получаемое из равенства $a \cdot 0 = 0$ заменой нуля единицей и умножения сложением. Но курьезным это равенство является лишь в алгебре чисел. В алгебре множеств для любого множества A:

$$A + I = I$$

В самом деле, сумма $A+I$ представляет собой множество, получаемое объединением универсального множества I и множества A. Но уже множество I содержит все имеющиеся в нашем распоряжении элементы, так что прибавление к нему множества A ничего изменить не может: сумма $A+I$ — это то же самое универсальное множество I!

Отметим еще необычные равенства:

$$A + A = A \text{ и } AA = A,$$

также выполняющиеся для каждого множества A. В самом деле, сумма $A+A$ представляет собой объединение множества A с самим собой. Но при этом мы придем к тому же самому множеству A (рис. 17). Аналогично, произведение AA есть пересечение множества A с самим собой; но это пересечение не отличается от множества A (см. рис. 17).

Последние два равенства можно еще обобщить. Различные множества можно сравнивать друг с другом. Естественно считать, что множество A «больше» множества B, если все элементы множества B содержатся в множестве A. Это соотношение записывается так: $A \supset B$ или $B \subset A$; при этом говорят, что «множество A содержит множество B» или

Рис. 17.

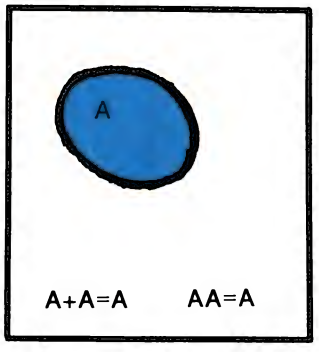


Рис. 18.

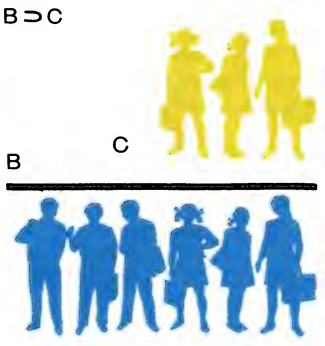


Рис. 19 (верхний).
Рис. 20 (нижний).

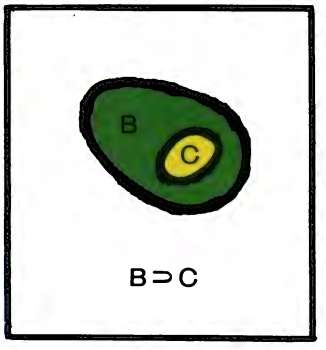
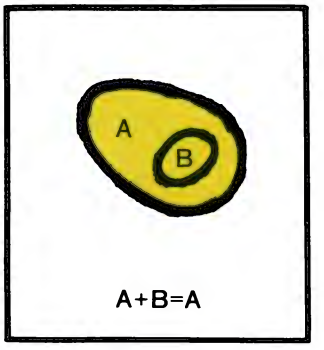


Рис. 21 а (верхний).
Рис. 21 б (нижний).



«множество B содержится в множестве A». Так, множество C девочек, сидящих в первом ряду (это множество состоит из школьниц Зои, Кати и Наташи), содержится в множестве B учеников, сидящих в первом ряду: $B \supset C$ (рис. 18). Графически соотношение $B \supset C$ изображается тем, что фигура C целиком заключается в фигуре B (рис. 19) или C совпадает с B.

Соотношение $A \supset B$, строго говоря, переносит в алгебру множеств не соотношение $a > b$ алгебры чисел, а соотношение $a \geqslant b$ («число a больше b или равно b»).

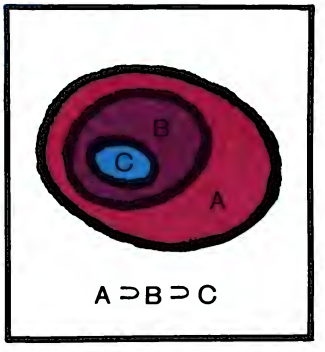
Ясно, что если $A \supset B$ и $B \supset C$, то $A \supset C$ (рис. 20); это утверждение аналогично известному свойству неравенств: если $a > b$ и $b > c$, то $a > c$.

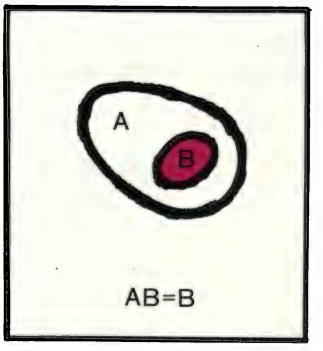
Нетрудно видеть, что если $A \supset B$, то $A + B = A$; $AB = B$ (рис. 21, *а*, *б*). Так как всегда можно считать, что $A \supset A$, то отсюда вытекают и два выписанных ранее равенства:

$$A + A = A \text{ и } AA = A.$$

Мы видим, что правила алгебры множеств во многом отличны от правил алгебры чисел. Поэтому, для того чтобы овладеть этой удивительной алгеброй, приходится не только «доучиваться», но частично и «переучиваться» — отказываться от некоторых привычных представлений, связанных с опытом действий с числами.

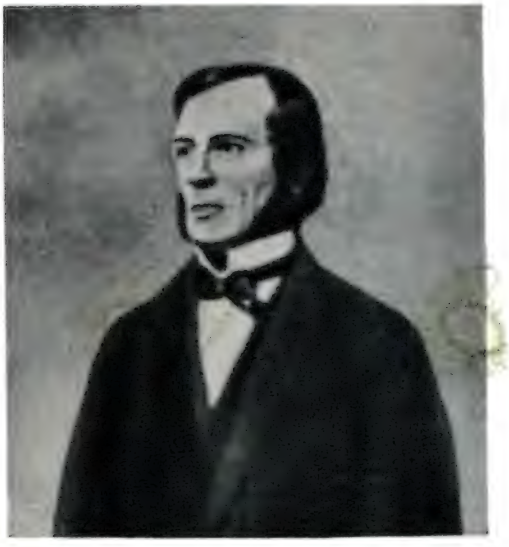
Укажем теперь еще одно отличие алгебры множеств от алгебры чисел, которое читатель, возможно, и не отметил. Имея дело с числами, мы можем сравнить между собой *любые* два числа a и b; всегда одно из них больше другого (или эти числа равны). Для двух множеств A и B, однако, как правило, не будет иметь место ни одно из двух соотношений $A \supset B$ и $B \supset A$. Так, в случае указанных выше множества A отличников и множества B учащихся, сидящих в первом ряду, ни одно из этих множеств нельзя считать бóльшим. Только если одно из двух множеств целиком содержится внутри другого, мы можем указать большее из них; для других же множеств A и B, графически изображенных на рис. 22а и 22 б, никакое сравнение их невозможно. Таким образом, лишь для *некоторых* пар множеств A и B можно указать, какое из этих множеств является бóльшим.





Алгебра множеств с ее своеобразными законами действий, одновременно и напоминающими правила действий над числами, и отличными от этих правил, была впервые указана замечательным английским математиком прошлого века Дж. Булем, отцом известной писательницы Этель Лилиан Войнич (автора романа «Овод»). По имени Буля алгебру множеств часто называют *булевой алгеброй*. Основополагающее сочинение Буля, в котором впервые строилась булева алгебра, называлось «Исследование законов мысли»; оно было напечатано в Лондоне в 1854 г., т. е. более ста лет назад. Название книги Буля сначала может показаться удивительным — какое отношение имеет курьезная алгебра множеств к законам нашего мышления? На этот вопрос мы постараемся ответить ниже.

Поскольку законы действий над множествами отличаются от законов действий над числами, иногда считают, что эти действия нельзя обозначить теми же символами, которые используются в алгебре чисел. В математической литературе сумма множеств A и B часто обозначается через $A \cup B$, а произведение этих же множеств — через $A \cap B$. При этом



Джордж Буль.

правила действий булевой алгебры множеств записываются в следующем виде:

$$A \cup B = B \cup A, \quad A \cap B = B \cap A$$

(коммутативные законы);

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C),$$
$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C),$$

(ассоциативные законы);

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C),$$
$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$$

(дистрибутивные законы);

$$A \cup O = A, \quad A \cap I = A,$$
$$A \cap O = O, \quad A \cup I = I,$$
$$A \cup A = A, \quad A \cap A = A.$$

Мы, однако, предпочтем во всех случаях пользоваться знакомыми символами сложения и умножения.

Дополнение множества. Аналогия между сложением и умножением множеств

Вернемся к установленным выше свойствам действий алгебры множеств. Сразу бросается в глаза чрезвычайно тесная связь между законами, относящимися к сложению множеств, и законами умножения. Выпишем снова эти законы:

$$A + B = B + A, \quad AB = BA;$$
$$(A + B) + C = A + (B + C), \quad (AB)C = A(BC);$$
$$(A + B)C = AC + BC, \quad AB + C = (A + C)(B + C);$$
$$A + O = A, \quad AI = A;$$
$$A + I = I, \quad AO = O;$$
$$A + A = A, \quad AA = A$$

и т. д. Из этой таблицы видно, что *всякое равенство, тождественно выполняющееся в алгебре множеств, при замене знака сложения множеств знаком умножения, и наоборот, и замене пустого множества O* (если оно входит в наше равенство) *универсальным множеством, и наоборот, переходит в новое равенство, также тождественно выполняющееся.*

Сейчас мы докажем это утверждение в общем виде. Для этого нам понадобится одна своеобразная операция алгебры множеств, сопоставляющая новое множество не с двумя заданными множествами (подобно сумме $A+B$ и произведению AB заданных множеств), а с *одним* множеством A. Эта операция называется образованием *дополнения* и обозначается чертой, поставленной над множеством. А именно, через $\overline{A}$ (читается: «дополнение A») мы будем обозначать множество всех элементов универсального множества I, *не принадлежащих* множеству A. Так, если A есть множество отличников из нашего класса, то множество $\overline{A}$ состоит из всех учеников, не являющихся отличниками. На диаграмме множество $\overline{A}$ изображается частью квадрата I, не покрытой фигурой A (рис. 23). Ясно, что $A+\overline{A}=I$, $A\overline{A}=O$ (см. тот же рис. 23, на котором графически изображены множества A и $\overline{A}$); эти два равенства можно даже принять за *определение* множества $\overline{A}$. Отметим еще, что $(\overline{\overline{A}})=A$ (рис. 24). Это последнее равенство короче записывают так:

$$\overline{\overline{A}}=A.$$

Очевидно, что $\overline{I}=O$ и $\overline{O}=I$ (так как *все* элементы входят в универсальное множество I и *ни один* элемент не входит в пустое множество O). Кроме того, легко видеть, что

$$\text{если } A \supset B, \text{ то } \overline{B} \supset \overline{A}.$$

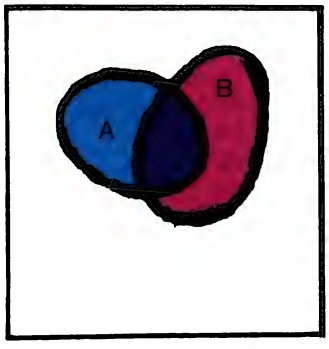
т. е. если множество B составляет часть множества A, то дополнение A составляет часть дополнения B (рис. 25 а, 25 б).

Докажем теперь следующие два важных соотношения:

$$\overline{A + B} = \overline{A}\,\overline{B} \text{ и } \overline{AB} = \overline{A} + \overline{B},$$

или словами: *дополнение суммы двух множеств совпадает с пересечением дополнений этих множеств; дополнение произведения двух множеств совпадает с суммой дополнений этих множеств.* В самом деле, на рис. 26 а закрашены множества A и B, а на рис. 26 б, 26 в — их дополнения $\overline{A}$ и $\overline{B}$. Но ясно, что фигура, закрашенная зеленым цветом на рис. 26 а, является дополнением до всего квадрата I фигуры,

Рис. 22а (верхний).
Рис. 22б (нижний).



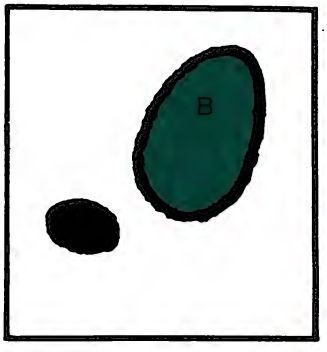
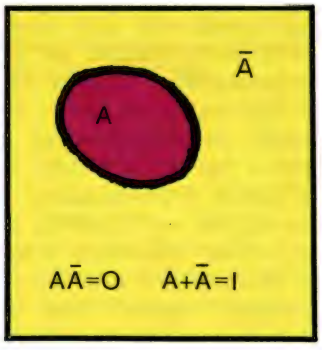


Рис. 23 (верхний).
Рис. 24 (нижний).



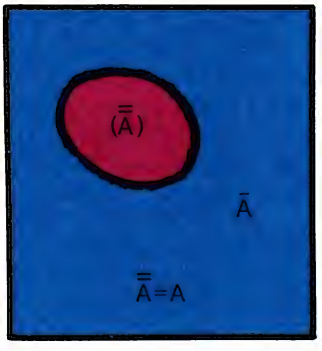
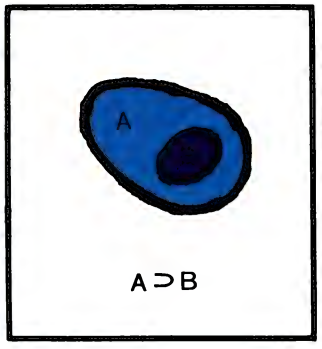


Рис. 25а (верхний).
Рис. 25б (нижний).



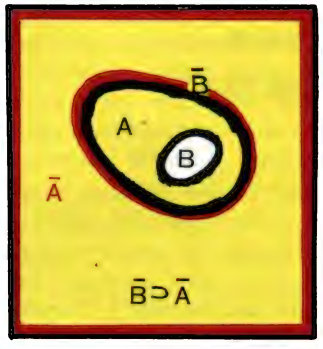
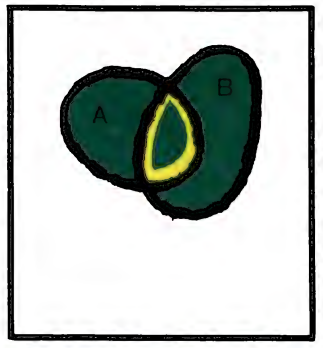
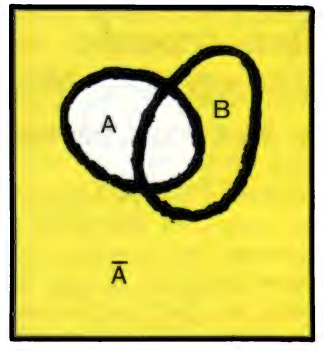
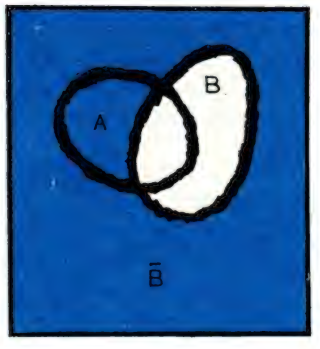


Рис. 26а (верхний).
Рис. 26б (средний).
Рис. 26в (нижний).







закрашенной на обоих рис. 26б и 26в, т. е. фигуры $\bar{A}\bar{B}$; это и доказывает равенство $\overline{A+B}=\bar{A}\bar{B}$. Аналогично, фигура, помеченная желтым на рис. 26а, дополняет до всего квадрата фигуру, закрашенную на рис. 26б или 26в, откуда следует, что $\overline{AB}=\bar{A}+\bar{B}$.

Из доказанных соотношений нетрудно вывести наше утверждение, позволяющее по каждому соотношению алгебры множеств построить новое соотношение. Рассмотрим какое угодно тождество алгебры множеств, например первый дистрибутивный закон:

$$(A+B)C=AC+BC.$$

Так как множества $(A+B)C$ и $AC+BC$ совпадают, то совпадают и дополнения этих множеств:

$$\overline{(A+B)C}=\overline{AC+BC}.$$

Но мы знаем, что $\overline{AB}=\bar{A}+\bar{B}$; поэтому

$$\overline{(A+B)C}=\overline{A+B}+\bar{C}.$$

С другой стороны, нам известно, что

$$\overline{A+B}=\bar{A}\bar{B}.$$

Таким образом,

$$\overline{(A+B)C}=\bar{A}\bar{B}+C$$

Далее, в силу того же закона $\overline{A+B}=\bar{A}\bar{B}$ алгебры множеств, имеем: $\overline{AC+BC}=\overline{AC}\cdot\overline{BC}$. Но $\overline{AC}=\bar{A}+\bar{C}$ и $\overline{BC}=\bar{B}+\bar{C}$; поэтому

$$\overline{AC+BC}=(\bar{A}+\bar{C})(\bar{B}\quad\bar{C})$$

Таким образом, мы приходим к равенству:

$$\bar{A}\bar{B}+C=(\bar{A}+\bar{C})(\bar{B}\quad\bar{C}),$$

которое, очевидно, лишь по форме отличается от второго дистрибутивного закона:

$$AB+C=(A\quad C)(B\quad C),$$

(вместо самих множеств A, B и C [illegible] равенстве выступают их дополнения [illegible]

но несущественно, поскольку как сами рассматриваемые множества, так и их дополнения произвольны). Таким образом, с помощью образования дополнения мы вывели из первого дистрибутивного закона второй дистрибутивный закон.

Точно таким же путем можно из *любого* тождества алгебры множеств получить другое тождество, в котором всюду операция сложения заменена умножением, и наоборот. При этом если в первоначальное тождество входили множества O и I, то в новом тождестве они заменяются соответственно на I и O; это связано с тем, что $\overline{O}=I$ и $\overline{I}=O$.

Два способа задания множества. Множества и высказывания

Поставим теперь вопрос о том, каким образом можно задать то или иное множество. Проще всего это сделать, перечислив все элементы, в совокупности составляющие данное множество: так, можно сказать, что фигурирующее выше множество A состоит из школьников Пети, Саши, Кати, Веры и Наташи. Однако в тех случаях, когда множество содержит много элементов, этот *явный*, или *перечислительный*, способ задания множества может оказаться очень неудобным. Кроме того, при таком задании множества обычно оказывается замаскированным самый принцип его образования, то общее, что служит причиной объединения отобранных элементов в одно множество.

Второй способ задания множества состоит в том, что мы указываем *признак*, характеризующий все элементы множества, и только эти элементы. Так, выше мы говорили: «множество *отличников*» или «множество учащихся, *сидящих в классе в первом ряду*». Такой способ задания множества называется *неявным* или *описательным*. Этот способ заключается в том, что мы формируем некоторое *высказывание*, касающееся элементов рассматриваемого универсального множества I («быть отличником» или «сидеть в первом ряду»); далее отбираем те, и только те, элементы множества I, которые этому высказыванию удовлетворяют.

Описательный способ задания множества связывает учение о множествах с учением о высказываниях, составляющим предмет *математической логики*. *Высказыванием* мы называем всякое утверждение, которое может оказаться истинным или ложным; при этом предполагается, что в принципе существует возможность установить, истинно данное высказывание или ложно, хотя мы, быть может, этой возможности не имеем. С этой точки зрения утверждение «Ровно через 100 лет в этот день в Москве будет ясная погода» является высказыванием, поскольку через 100 лет можно будет проверить, правда это или нет. Напротив, утверждение «Неделя — это большой промежуток времени» высказыванием не является в силу неопределенности выражения «большой промежуток времени», которое у разных лиц и в различных случаях может иметь разный смысл; ведь здесь, не обладая несколькими дополнительными сведениями, никак нельзя сказать, является это утверждение истинным или нет.

Рассмотрим теперь высказывания, относящиеся к элементам определенного универсального множества I; в случае, когда этим множеством является множество учащихся данного класса, это могут быть высказывания: «Он отличник», «Он сидит в первом ряду», «Он выше 1 м 50 см», «Он старше 50 лет», «Он — это девочка», «Он левша», «Он имеет две головы» и т. д. Каждому такому высказыванию отвечает некоторое множество элементов из I, для которых это высказывание является истинным; это множество называется *множеством истинности* данного высказывания. Множество истинности может оказаться пустым; в этом случае высказывание называется *тождественно ложным* или *противоречивым*. Так, для множества учеников данного класса тождественно ложными будут высказывания «Он имеет две головы» или «Ему больше 50 лет»; выше у нас фигурировало еще одно высказывание, также заведомо противоречивое в применении к ученикам какого-либо класса: «Он слон». В определенном смысле противоположный случай — это тот, когда множество истинности данного высказывания совпадает со всем универсальным множеством I; в этом случае высказывание называется *тождественно истинным* или *бессодержательным*. Тождественно истинными являются, например, высказывания: «Он (ученик определенного класса) моложе 50 лет», «Он мальчик или девочка».

Алгебра множеств и алгебра высказываний

Высказывания мы будем обозначать малыми буквами латинского алфавита; отвечающие этим высказываниям множества истинности будем обозначать большими буквами. Так, высказываниям a — «Он

Рис. 27.

отличник» и b — «Он сидит в первом ряду» отвечают указанные выше множества истинности A и B. Тождественно ложное высказывание будем обозначать буквой o, а тождественно истинное — буквой i.

Рассмотрим теперь две операции, позволяющие по двум высказываниям строить новые, составные высказывания. В математической логике эти операции называются дизъюнкцией и конъюнкцией и обозначаются специальными значками $\vee$ и $\wedge$; так, $a \vee b$ означает дизъюнкцию высказываний a и b, а $a \wedge b$ — конъюнкцию (сравним с обозначениями суммы и произведения, или объединения и пересечения, множеств, см. стр. 366). Мы здесь для простоты почти не будем употреблять этих сложных терминов и символов, вместо этого будем говорить о *сумме* $a+b$ и *произведении* ab высказываний a и b.

Под *суммой (дизъюнкцией)* высказываний a и b понимается высказывание, которое мы получим, если объединим высказывания a и b союзом «или». Например, если a есть высказывание «Он отличник», а b — высказывание «Он сидит в первом ряду», то через $a+b$ будем обозначать высказывание «Он является отличником *или* сидит в первом ряду». При этом частичку «или» мы будем всегда понимать в смысле: «или первое, или второе, или то и другое вместе». Ясно, что если A есть множество истинности высказывания a, а B — множество истинности высказывания b, то множеством истинности высказывания $a+b$ будет $A+B$ (рис. 27). Так, в рассматриваемом примере множество истинности высказывания a состоит из школьников Пети, Саши, Кати, Веры и Наташи, а множество истинности высказывания b — из школьников Илюши, Гриши, Зои, Кати, Наташи и Яши; множество же истинности высказывания $a+b$ образуют девять школьников: Петя, Саша, Катя, Вера, Наташа, Илюша, Гриша, Зоя и Яша.

Под *произведением (конъюнкцией)* высказываний a и b мы будем понимать высказывание ab, получаемое, если объединить высказывания a и b, связав их союзом «и». Итак, множеством истинности высказывания ab является произведение (пересечение) множеств истинности высказываний a и b. В нашем примере множество истинности высказывания ab («Он является отличником *и* сидит в первом ряду») состоит из двух учениц — Кати и Наташи (рис. 28).

Условимся еще называть два высказывания *эквивалентными* (или *равносильными*), если им отвечает *одно и то же* множество истинности. Их можно считать одинаковыми, такими, что в «алгебре высказываний» одно из них можно свободно заменить другим. Эквивалентность высказываний можно было бы обозначить обычным знаком равенства, однако чаще ее обозначают стрелкой с двумя концами, т. е. утверждение об эквивалентности высказываний a и b записывается так: $a \Longleftrightarrow b$. Отношение $a \Longleftrightarrow b$ означает, что содержащиеся в высказываниях a и b признаки, выделяющие определенную часть универсального множества, равнозначны, имеют один и тот же смысл, разнятся только своей формой. При изучении высказываний естественно не различать между собой эквивалентные высказывания, например: «Он отличник» и «Он имеет только отличные оценки».

Мы установили, что *множество истинности суммы двух высказываний совпадает с суммой множеств истинности этих высказываний; множество истинности произведения двух высказываний совпадает с произведением множеств истинности этих высказываний.* Отсюда следует, что все известные нам правила алгебры множеств можно перевести на язык алгебры высказываний. Так, например:

$$a+b \Longleftrightarrow b+a, \quad ab \Longleftrightarrow ba;$$
$$(a+b)+c \Longleftrightarrow a+(b+c), \quad (ab)c \Longleftrightarrow a(bc);$$
$$(a+b)\,c \Longleftrightarrow ac+bc, \quad ab+c \Longleftrightarrow (a+c)(b+c);$$
$$a+o \Longleftrightarrow a, \quad ai \Longleftrightarrow a;$$
$$ao \Longleftrightarrow o, \quad a+i \Longleftrightarrow i;$$
$$a+a \Longleftrightarrow a, \quad aa \Longleftrightarrow a \text{ и т. д.}$$

Докажем, для примера, *первый дистрибутивный закон для высказываний:*

$$(a+b)\,c \Longleftrightarrow ac+bc.$$

В соответствии с нашим условием множества истинности высказываний a, b и c мы обозначим через A, B и C. При этом высказывание $(a+b)c$ имеет своим множеством истинности $(A+B)C$; высказывание $ac+bc$ имеет своим множеством истинности $AC+BC$. Но множества $(A+B)C$ и $AC+BC$ совпадают; это значит, что высказывания $(a+b)c$ и $ac+bc$ эквивалентны.

Запишем еще законы алгебры высказываний в той форме, в которой они приводятся в книгах по математической логике:

$$a \vee b \Longleftrightarrow b \vee a, \quad a \wedge b \Longleftrightarrow b \wedge a;$$
$$(a \vee b) \vee c \Longleftrightarrow a \vee (b \vee c), \quad (a \wedge b) \wedge c \Longleftrightarrow a \wedge (b \wedge c);$$
$$(a \vee b) \wedge c \Longleftrightarrow (a \wedge c) \vee (b \wedge c), \quad (a \wedge b) \vee c \Longleftrightarrow (a \vee c) \wedge (b \vee c);$$
$$a \vee o \Longleftrightarrow a, \quad a \wedge i \Longleftrightarrow a;$$
$$a \wedge o \Longleftrightarrow o, \quad a \vee i \Longleftrightarrow i;$$
$$a \vee a \Longleftrightarrow a, \quad a \wedge a \Longleftrightarrow a.$$

Рис. 28.

Рис. 29 (на стр. 371 левый).

Рис. 30 (на стр. 371 правый).

Отрицание. Отношение следствия

Продолжим построение алгебры высказываний. При изучении множеств мы наряду с операциями сложения и умножения множеств рассматривали также операцию «взятия дополнения», сопоставляющую с каждым множеством A его дополнение $\overline{A}$. Этой операции отвечает чрезвычайно важная операция алгебры высказываний, сопоставляющая с каждым высказыванием a новое высказывание $\bar{a}$, называемое *отрицанием* a. Грамматически отрицание $\bar{a}$ получается из высказывания a при помощи частицы «не»; например, отрицанием высказывания «он отличник» является высказывание «он не отличник» (рис. 29). Множество истинности высказывания $\bar{a}$ является дополнением множества истинности высказывания a; это утверждение можно даже считать *определением* отрицания.

Алгебраические свойства дополнения множеств сразу приводят к следующим утверждениям, связанным с отрицанием высказываний:

$$a+\bar{a}=i,\quad a\bar{a}=o;$$
$$\bar{i}=o,\quad \bar{o}=i;$$
$$\bar{\bar{a}}=a;$$
$$\overline{a+b}=\bar{a}\bar{b},\quad \overline{ab}=\bar{a}+\bar{b}.$$

Введем, наконец, еще одно отношение, связывающее два высказывания. А именно, пусть множество истинности A высказывания a у́же множества истинности B высказывания b; другими словами, пусть A целиком содержится в B (т. е. $A\subset B$ или $B\supset A$). В таком случае мы будем говорить, что высказывание a *влечет высказывание* b или что b *следует из* a (или что b *является следствием* a). Например, если множество отличников класса состоит из школьников Гриши, Илюши и Пети, то высказывание «Он отличник» влечет за собой истинность высказывания «Он мальчик» (или высказывание «Он мальчик» следует из высказывания «Он отличник»; см. рис. 30). Отношение следствия имеет естественно подразумеваемый словом «следствие» смысл: если b следует из a и мы знаем, что высказывание a истинно, то, наверное, истинно и высказывание b.

Так, в разобранном выше примере истинность утверждения «Он отличник» означает, что речь идет об одном из трех школьников — Грише, Илюше или Пете; но тогда истинно и высказывание «Он мальчик».

Отношение следствия играет в алгебре высказываний такую же роль, какую в алгебре множеств играет отношение $\subset$, указывающее, что одно множество содержится в другом; иногда его обозначают тем же значком $\subset$. Однако чаще отношение «a влечет b» (или, что то же самое, «b следует из a») записывается так: $a\Rightarrow b$. Запись $a\Rightarrow b$ читается как «b следует из a» или, короче, как утверждение «если a, то b». При этом часто говорят, что a является *достаточным условием* для b: если мы знаем, что высказывание a является истинным, то этого достаточно, чтобы не сомневаться и в истинности высказывания b. Так, если в условиях проиллюстрированного (рис. 30) примера мы знаем, что «он (какой-то учащийся рассматриваемого класса) отличник», то этого достаточно, чтобы утверждать, что «он мальчик». Напротив, про высказывание b, такое, что $a\Rightarrow b$, говорят, что оно является *необходимым условием* для a. Так, в рассмотренном выше примере условие «Он мальчик» является, конечно, *необходимым* условием истинности высказывания «Он отличник», ибо ни одна девочка в классе отличником не является; однако это условие не является достаточным, поскольку наугад выбранный мальчик может и не оказаться отличником. (Напротив, условие «Он отличник» достаточно, но не необходимо для истинности высказывания «Он мальчик» — учащийся может и не быть отличником, но при этом оказаться мальчиком.) В соответствии с этой терминологией об *эквивалентных* высказываниях a и b (высказываниях, для которых $a\Leftrightarrow b$) часто говорят, что каждое из них является *необходимым и достаточным* условием второго.

Так, например, если в некоторой группе школьников все девочки являются отличницами, а все мальчики не отличники, то для этой группы ребят условие a («Она девочка») является необходимым и достаточным для истинности высказывания b («Он (школьник) — отличник»): здесь и $a\Rightarrow b$ и $b\Rightarrow a$.

Из известных свойств алгебры множеств, связанных соотношением $\Rightarrow$, следует, что:

если $a\Rightarrow b$ и $b\Rightarrow c$, то $a\Rightarrow c$;

если $a\Rightarrow b$, то $a+b\Leftrightarrow a$, $ab\Leftrightarrow a$;

если $a\Rightarrow b$, то $\bar{b}\Rightarrow\bar{a}$.

Законы мысли

Теперь мы можем ответить на вопрос о том, почему сочинение Дж. Буля, в котором впервые строилась булева алгебра, посвящено выяснению «законов мысли». Дело в том, что правила алгебры высказываний есть те законы, которые играют руководящую роль в процессе нашего мышления.

Многие из этих законов в логике имеют специальные названия. Например, соотношение

$$a+\bar{a} \rightleftharpoons i$$

выражает так называемый *закон исключенного третьего*. Этот закон можно сформулировать так: *сумма каждого утверждения и его отрицания тождественно истинна*, другими словами, *высказывание или его отрицание всегда истинно*. Например, тождественно истинно утверждение «Он отличник или он не отличник». Другими словами, для каждого элемента универсального множества обязательно справедливо либо высказывание a, либо его отрицание $\bar{a}$ — третьего не дано.

Соотношение

$$a\bar{a} \rightleftharpoons o$$

выражает *закон противоречия*. Согласно этому закону *ни для одного объекта не может быть одновременно верно и утверждение a, и его отрицание $\bar{a}$*. Например, ни один ученик не может одновременно являться и отличником и неотличником. Но если высказывания a и $\bar{a}$ не могут быть истинны одновременно, то произведение $a\bar{a}$ тождественно ложно, т. е. множество истинности высказывания $a\bar{a}$ пусто.

Соотношение

$$\bar{\bar{a}} \rightleftharpoons a$$

выражает хорошо известный *закон двойного отрицания*. Этот закон утверждает, что *отрицание отрицания совпадает с исходным высказыванием*. Так, отрицанием высказывания «Этот ученик — мальчик» является утверждение «Этот ученик — девочка», а двойное отрицание «Этот ученик не девочка» возвращает нас к первоначальному высказыванию «Этот ученик — мальчик».

Аналогичный характер имеют и все остальные правила алгебры высказываний, устанавливающие эквивалентность (равносильность) тех или иных утверждений. Проиллюстрируем это на примерах.

Первый дистрибутивный закон утверждает, что высказывания $(a+b)c$ и $ac+bc$ — это одно и то же. Пусть a есть высказывание «Он (ученик) умеет играть в шахматы», b — «Он умеет играть в шашки» и c — «Он отличник». В таком случае высказывание $(a+b)c$ имеет следующий смысл: «Он умеет играть в шахматы или в шашки, и, кроме того, он отличник», а высказывание $ac+bc$ — смысл: «Он умеет играть в шахматы и является отличником либо он умеет играть в шашки и является отличником». Но ясно, что эти два высказывания по существу означают одно и то же.

Второй дистрибутивный закон означает, что эквивалентны два высказывания $ab+c$ и $(a+c)(b+c)$. Если высказывания a, b и c имеют тот же смысл, что и выше, то высказывание $ab+c$ означает: «Он умеет играть в шашки и в шахматы или является отличником». Высказывание $(a+c)(b+c)$ имеет следующий смысл: «Он умеет играть в шахматы или является отличником; одновременно с этим он умеет играть в шашки или является отличником». Но нетрудно понять, что последнее высказывание по существу совпадает с первым: ведь если ученик, о котором здесь идет речь, не является отличником, то он обязательно умеет играть и в шахматы и в шашки.

Наконец, остановимся еще на так называемых *правилах де Моргана:*

$$\overline{a+b} \rightleftharpoons \bar{a}\bar{b} \quad \text{и} \quad \overline{ab} \rightleftharpoons \bar{a}+\bar{b}$$

(они называются так по имени английского логика XIX в. А. де Моргана, впервые установившего эти правила). Пусть, например, a — это высказывание «Он умеет играть в шахматы», b — «Он умеет играть в шашки». В таком случае сложное высказывание $\overline{a+b}$ есть отрицание того, что ученик умеет играть в шахматы *или* в шашки. Но это отрицание, очевидно, эквивалентно утверждению о том, что ученик не умеет играть *ни* в шахматы, *ни* в шашки, т. е. высказыванию $\bar{a}\bar{b}$. Аналогично, отрицание утверждения о том, что ученик умеет играть *и* в шахматы *и* в шашки (т. е. высказывание $\overline{ab}$), равносильно утверждению о том, что он не умеет играть в шахматы *или* не умеет играть в шашки; но это и есть высказывание $\bar{a}+\bar{b}$.

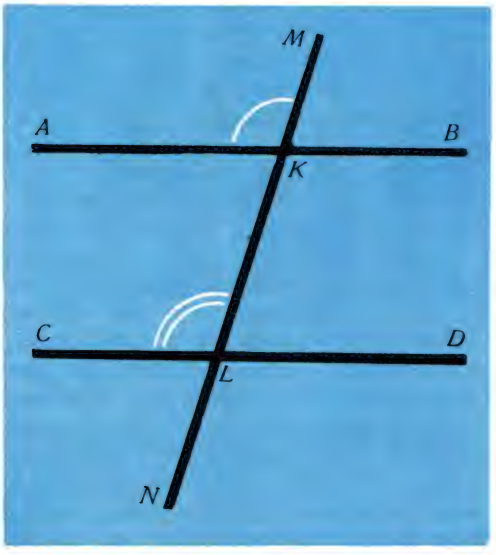


Рис. 31 (левый).

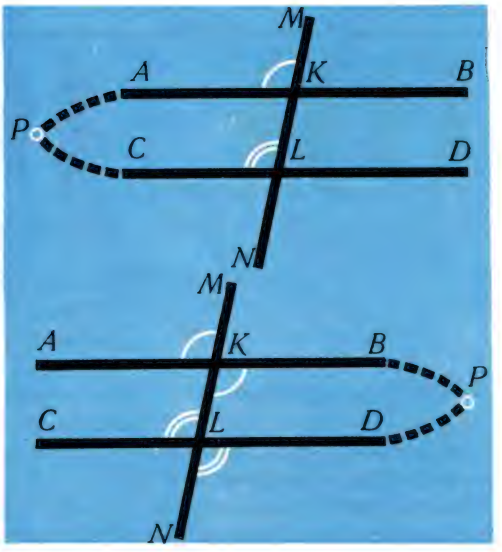


Рис. 32 (правый).

Правила вывода

В заключение скажем еще несколько слов о правилах, связанных с употреблением символа $\Rightarrow$.

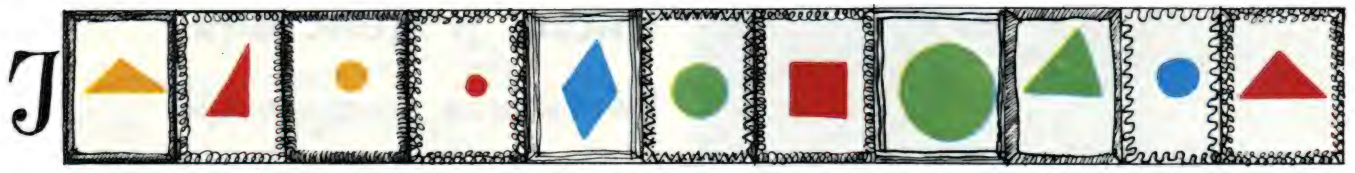
Установление того, что два высказывания a и b связаны соотношением $a \Rightarrow b$, называется *выводом;* при этом высказывание a называется *условием,* а высказывание b — *следствием.* С выводами такого рода мы все время встречаемся в науке и в практической жизни, так, например, заключение любой теоремы является следствием ее условия. Правильность вывода обеспечивается соблюдением определенных правил логики. Эти правила логики могут быть обоснованы с помощью соотношений алгебры высказываний.

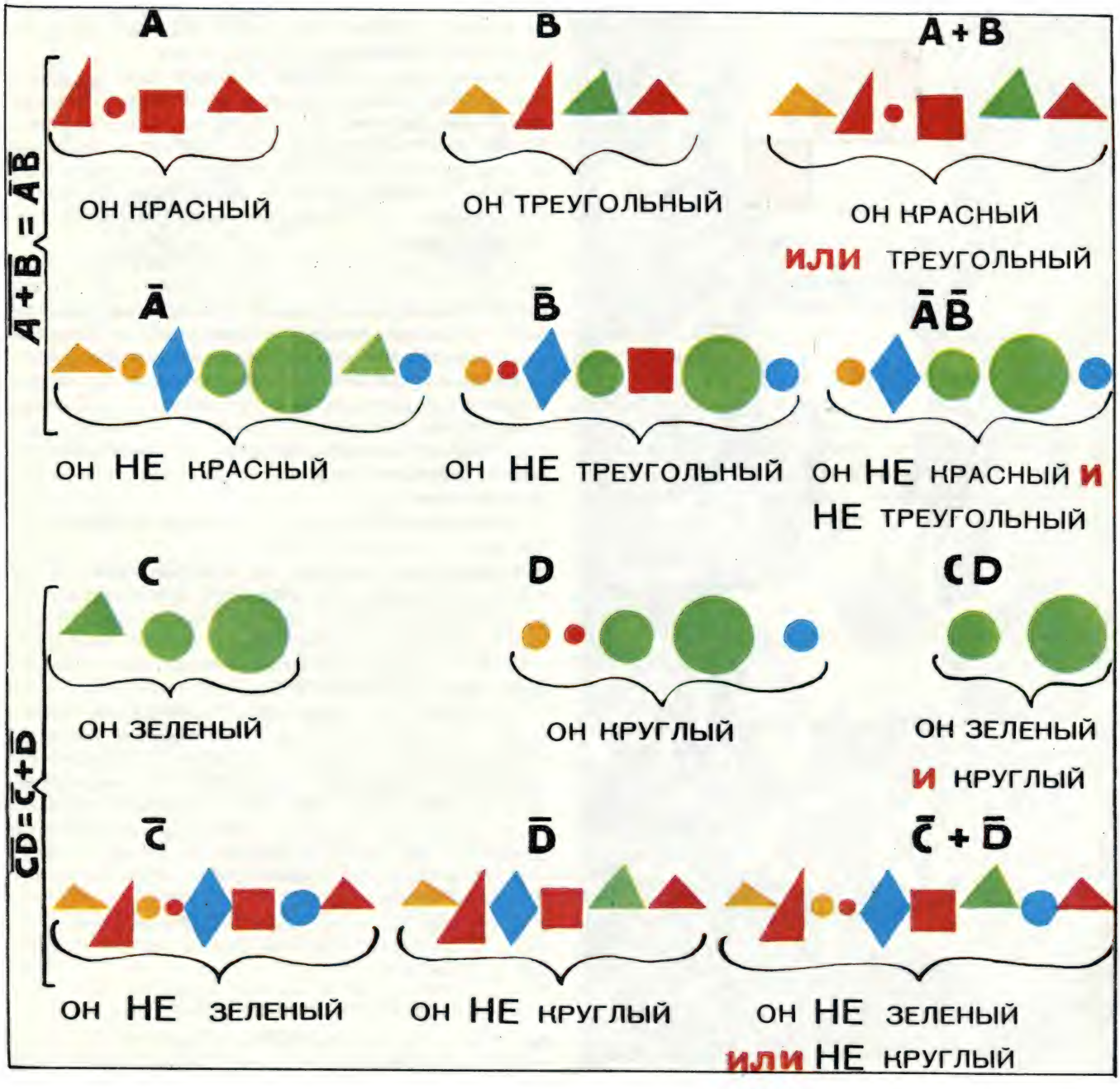
Известное уже нам соотношение «Если $a \Rightarrow b$ и $b \Rightarrow c$, то $a \Rightarrow c$» читается так: «Если из a следует b и из b следует c, то из a следует c». Это соотношение используется в рассуждениях весьма часто. Например, поскольку теорема «Сумма углов треугольника равна 180°» вытекает из аксиомы параллельных линий, а теорема «Внешний угол треугольника равен сумме внутренних углов, не смежных с ним» вытекает из теоремы о сумме углов треугольника, можно также сказать, что теорема о внешнем угле треугольника является следствием аксиомы параллельных.

Соотношение «Если $a \Rightarrow b$, то $\overline{b} \Rightarrow \overline{a}$» читается так: «Если из высказывания a следует высказывание b, то из отрицания высказывания b вытекает отрицание высказывания a». Это обстоятельство лежит в основе весьма распространенного метода вывода (или доказательства) *от противного.* Пусть мы хотим доказать теорему (рис. 31): *если соответственные углы AKM и CLM, образованные прямыми AB и CD с секущей MN, равны между собой* (это есть утверждение a), *то прямые AB и CD параллельны* (это есть утверждение b). Вместо того чтобы доказывать соотношение $a \Rightarrow b$, докажем, что $\overline{b} \Rightarrow \overline{a}$, т. е. что из отрицания b вытекает отрицание a. Предположим, что прямые AB и CD *не параллельны,* т. е. что они пересекаются в некоторой точке P (рис. 32). В таком случае углы AKM и CLM не будут равны (это внешний угол треугольника PKL и не смежный с ним внутренний угол). Таким образом, соотношение $\overline{b} \Rightarrow \overline{a}$ доказано, тем самым доказано и соотношение $a \Rightarrow b$ (строго говоря, здесь надо применить к соотношению $\overline{b} \Rightarrow \overline{a}$ рассматриваемое предложение алгебры логики и воспользоваться законом двойного отрицания: если $\overline{b} \Rightarrow \overline{a}$, то $\overline{\overline{a}} \Rightarrow \overline{\overline{b}}$, т. е. $a \Rightarrow b$).

Уже эти примеры показывают ту большую роль, которую играют в любой научной теории правила алгебры логики. В последние годы роль этих правил особенно сильно возросла в связи с возникшей задачей передачи целого ряда операций, выполняющихся людьми, электронным вычислительным машинам. При этом оказалось необходимым научить машину правилам логики, т. е. тем правилам, которыми люди обычно пользуются, зачастую не отдавая себе полного отчета в существе этих правил. Но для того чтобы эти правила могли быть заложены в «электронную память» машины, необходимо четко сформулировать их. Эти четкие формулировки и доставляет нам математическая логика.

Рис. 33. Сложение и умножение множеств можно хорошо проиллюстрировать, используя геометрические фигуры разных цветов. В первой строке расположены фигуры, которые образуют универсальное (или единичное) множество. В других строках схемы из этого универсального множества I образованы новые множества A, B, C, D и их дополнения $\bar{A}$, $\bar{B}$, $\bar{C}$, D; над этими множествами или их дополнениями произведены операции сложения и умножения.





Чем занимается алгебра

Числа и действия

Необычная конференция

Вообразим, что нам удалось собрать математиков разных веков и стран и поставить перед ними вопрос: «Что вы можете сказать о формуле квадрата суммы?» Стенограмма этой необычной конференции могла бы выглядеть примерно так.

Вавилонский математик, живший 4000 лет назад, сказал, что никаких формул он не знает, так как выполняет действия не над буквами, а над числами. Но ему известно, что если взять два числа, например 20 и 3, то для вычисления квадрата их суммы надо возвести в квадрат число 20, потом число 3, сложить эти квадраты и к сумме прибавить удвоенное произведение чисел.

Древний грек, живший 2300 лет назад, доказал это правило. Он нарисовал квадрат, разбил его на два квадрата и два равных прямоугольника (см. рис. слева) и сказал, что площадь квадрата AC (т. е. квадрата, у которого точки A и C являются концами диагонали) равна сумме площадей квадратов AB и BC и удвоенной площади прямоугольника BD. Поэтому если сторона квадрата AB равна 20, а квадрата BC равна 3, то площадь квадрата AC действительно можно подсчитать так, как предложил его вавилонский коллега.

Алгебраист XVI в. записал формулу квадрата суммы так, как показано на рис. 1.

В переводе это читалось бы примерно так: $\overline{A+B}$ в квадрате равно A в квадрате $+B$ в квадрате $+A$ на $B2$. (Вместо скобок он писал черту, степени обозначал словами, а коэффициенты писал в конце.)

— Не слишком удобные обозначения, — сказал иронически математик XVII в.

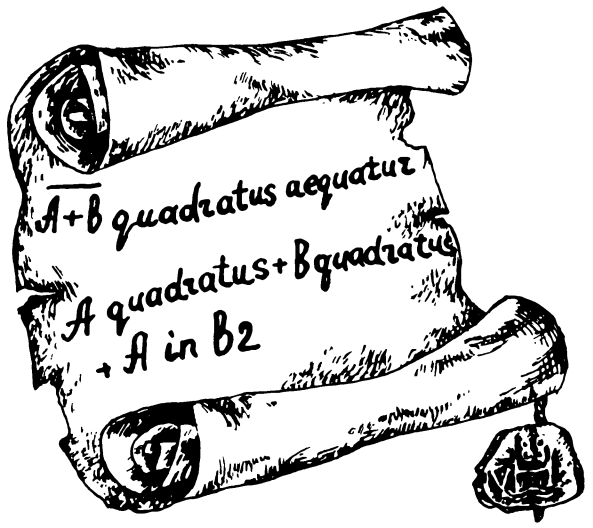
— Однако и с этими обозначениями мы умеем делать значительно больше, чем древние греки, — с обидой возразил выступавший. — Они умели решать лишь квадратные уравнения, а мы справляемся и с уравнениями третьей и четвертой степеней. Жаль лишь, что слишком часто эти уравнения не решаются, так как полученные формулы приводят к нелепой операции извлечения квадратного корня из отрицательного числа.

Выступавший следующим алгебраист XVII в. написал формулу квадрата суммы уже в привычном для нас виде:

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$

Он добавил, что его предшественники слишком узко понимают эту формулу. Прежде всего, в ней a и b

Рис. 1.



не обязательно являются длинами отрезков, а сами могут быть площадями, объемами, весами и даже отрицательными числами. Более того, вместо a и b можно подставить любые многочлены, например:

$$[x^2+(x+1)]^2=x^4+2x^2(x+1)+(x+1)^2.$$

Он сказал еще, что эта формула является только одной из большого числа знакомых ему алгебраических формул и что ему хорошо известно искусство буквенных вычислений, а это искусство и есть алгебра.

Алгебраист XVIII в. заявил, что о формуле квадрата суммы нечего много говорить: эта формула, как и все буквенные вычисления, — удел школьной математики. При этом он отметил, что она всегда верна, и притом не только для положительных или отрицательных чисел, но и для комплексных, а эти числа совсем не такая уж нелепость! Что же касается предмета алгебраической науки, то это вовсе не искусство буквенных вычислений, а умение решать уравнения и системы уравнений. Для систем уравнений первой степени у него даже есть общая формула решения.

Выступление математика XIX в. часто прерывалось возгласами недоверия и шумными восклицаниями. Было ясно, что это выступление явилось для большинства участников полной неожиданностью. Да и в самом деле, выступавший заявил, что формула $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ верна далеко не во всех случаях! Например, ирландский математик У. Гамильтон занимался обобщением комплексных чисел (так называемыми гиперкомплексными числами). Он построил числа, названные кватернионами, у которых не одна, а целые три мнимые единицы i, j, k. Так вот, для кватернионов (которые находят много интересных применений) формула квадрата суммы просто *неверна*. Неверна потому, что здесь мы сталкиваемся со случаем, когда умножение некоммутативно, т. е. не выполняется переместительный закон умножения (например, $ij=k$, $ji=-k$), а при выводе формулы квадрата суммы мы пользуемся равенством $ab=ba$.

Выступавший сказал, что другие математики рассмотрели еще более удивительные обобщения комплексных чисел, для которых умножение не только некоммутативно, но даже и неассоциативно, т. е. в общем случае

$$(ab)c\neq a(bc)$$

Выступивший вслед затем алгебраист XX в. сказал, что гиперкомплексные числа — это только примеры к тем общим теориям, которыми он занимается. Он может доказывать теоремы, которые верны не только для гиперкомплексных чисел одного вида, а для всех гиперкомплексных чисел (или для очень многих видов таких чисел). Он умеет складывать и умножать не только числа и многочлены, а и... квадратные таблицы, геометрические и алгебраические преобразования, логические суждения и т. д. (см. ст. «Алгебра множеств и алгебра логики»).

— Как же вам удается оперировать с такими непохожими друг на друга вещами, как квадратные таблицы, гиперкомплексные числа, геометрические преобразования? Что может быть общего в действиях над ними? И как вы узнаете, какие формулы имеют место в тех или иных случаях?

— Весьма несложно; для этого в моем распоряжении имеется столь мощное оружие, как аксиоматический метод, который...

— Не может быть, — воскликнул окончательно выведенный из равновесия древний грек, — ведь аксиомы относятся к области геометрии?!

...Прервем на этом нашу конференцию и постараемся разобраться во всем сказанном.

Фундамент алгебры

Из всех сделанных высказываний школьнику Васе Игнатьеву, который был корреспондентом школьной стенгазеты и присутствовал на конференции, самым правильным показалось мнение алгебраиста XVII в., что алгебра — искусство буквенных вычислений.

Вася учился тогда в VI классе и на уроках алгебры много занимался буквенными вычислениями. Тут были и формулы сокращенного умножения, и коэффициенты, и показатели степени, и многое другое — от букв в глазах рябило. Он часто думал: «Хорошо было бы иметь решения ко всем примерам нашего задачника!» Но вскоре понял, что это не поможет, — учитель для контрольных работ брал примеры из какого-то другого задачника. А запомнить решения всех задач из всех задачников на свете — это, пожалуй, никому не под силу, разве что фокусникам из цирка, выступающим с сеансами феноменальной памяти.

Делать нечего, приходилось заучивать правила: что происходит с коэффициентами и показателями при умножении одночленов, как возводить сумму и разность в квадрат и многое другое.

Вася был мальчик любознательный и захотел узнать, откуда же эти правила берутся. Внимательно читая учебник, он понял, что все правила, по которым выполняются действия с многочленами, вытекают из небольшого числа основных правил. Эти первоначальные правила таковы:

$$a+0=a;\ a+(-a)=0;$$
$$a+b=b+a$$

(коммутативность сложения);

$$(a+b)+c=a+(b+c)$$

(ассоциативность сложения);

$$a\cdot 1=a; \qquad (1)$$
$$ab=ba$$

(коммутативность умножения);

$$a(bc)=(ab)c$$

(ассоциативность умножения);

$$a(b+c)=ab+ac$$

(дистрибутивность).

Из этих правил можно вывести все остальные, например формулу

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2, \qquad (2)$$

обсуждавшуюся на необычной конференции. (Попробуйте это сделать!)

Таким образом, искусство буквенных вычислений сводится к применению основных правил. При этом некоторые следствия из этих правил (например, формула квадрата суммы) применяются настолько часто, что их надо так же хорошо запомнить и применять, как и первоначальные правила.

Не правда ли, это очень напоминает положение дел в геометрии — там тоже есть несколько аксиом (т. е. первоначальных положений), из которых выводятся различные следствия, называемые *теоремами*. А при решении задач приходится применять и аксиомы и теоремы. Поэтому мы будем, как и в геометрии, формулы (1) называть аксиомами, а формулы вида (2) — теоремами.

Как и аксиомы геометрии, аксиомы алгебры не доказываются. Они являются обобщением многотысячелетнего опыта практической деятельности человечества. Прежде чем сформулировать положение $a+b=b+a$, надо было много тысяч раз подметить такие арифметические соотношения, как: $2+5=5+2$, $4+6=6+4$ и т. д.

Все остальные аксиомы (1) имеют такое же происхождение: они являются буквенной записью многократно проверявшихся законов арифметики.

Сила букв

Уже пятиклассники хорошо понимают, насколько алгебра сильнее арифметики: вместо того чтобы решать несколько задач, отличающихся только числовыми данными, можно решить одну задачу с буквенными данными, а потом подставлять в полученный ответ различные числовые данные.

При этом полученный алгебраический ответ часто можно упростить, пользуясь правилами алгебраических преобразований, и тогда подставлять числовые данные и производить арифметические действия будет гораздо проще.

На этом факте основаны многочисленные «фокусы» с отгадыванием задуманных чисел. Например, предложим выполнить следующие действия: 1) задумайте число; 2) прибавьте к задуманному числу 5; 3) полученный результат умножьте на 3; 4) отнимите от получившегося теперь результата задуманное число; 5) отнимите 11; 6) разделите полученный ответ на 2. Если сообщить «фокуснику» полученный результат, то он сразу назовет задуманное число. При этом ему не придется выполнять в обратном порядке всей сложной последовательности действий. В самом деле, если обозначить задуманное число через x, то действия, которые предложено выполнить, запишутся следующим образом:

$$[(x+5)\cdot 3-x-11]:2.$$

Упрощая это выражение, легко найдем, что оно равно $x+2$. Поэтому «фокуснику» достаточно отнять от сообщенного ему результата 2, чтобы получить задуманное число.

Однако шестиклассник (да и оканчивающий школу) не оценивает полностью всю силу буквенных формул. Он считает, что буквы в них — это обязательно

какие-то числа (заранее известные или искомые). На самом же деле, производя действия с буквами, он использует лишь аксиомы алгебры и их следствия. Поэтому все его вычисления годятся не только для чисел, но и для любых вещей, для которых выполняются эти аксиомы. Например, буквы могут означать не отдельные числа, а многочлены, алгебраические дроби и другие алгебраические выражения.

Ведь хорошо известно, что для сложения и умножения многочленов выполняются те же аксиомы (1), что и для сложения и умножения чисел. Например, если a и b — некоторые многочлены, то $a+b=b+a$, $ab=ba$ и т. д. Отсюда следует, что в любое алгебраическое тождество вместо букв можно подставлять не только числа, но и любые многочлены. Например, из того, что

$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2),$$

следует тождество

$$(x^2+x+1)^3-(x^2-x+1)^3=2x[(x^2+x+1)^2+(x^2+x+1)(x^2-x+1)+(x^2-x+1)^2].$$

Если кроме чисел и многочленов нам встретятся другие вещи, которые можно складывать и умножать, причем выполняются аксиомы (1), то для них будут верны все формулы и выводы алгебры. Например, старшеклассники встречаются с комплексными числами. Верны ли для таких чисел формулы алгебры, или надо снова выяснять, чему равен куб суммы комплексных чисел? Из сказанного следует, что проверять заново для комплексных чисел все формулы алгебры не нужно. Достаточно проверить аксиомы (1), а из них уже будут следовать все остальные формулы.

Кольца

Теперь ясно, когда верна формула

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2,$$

да и все остальные формулы алгебры. Они верны для любых объектов, которые можно складывать и умножать, причем выполняются указанные выше аксиомы (1). Мы уже знаем три примера объектов, для которых эти аксиомы выполняются. Это действительные числа, комплексные числа и многочлены.

Математики знают много других примеров множеств с аналогичными свойствами:

1) элементы такого множества можно складывать и умножать, причем сумма и произведение двух элементов снова принадлежат тому же множеству;

2) среди элементов множества особо отмечены два элемента, обозначаемые символами 0 и 1;

3) для каждого элемента a определен противоположный элемент $-a$, принадлежащий тому же множеству;

4) для сложения и умножения в рассматриваемом множестве выполняются все аксиомы (1).

Ввиду того что такие множества часто встречаются, для них было введено специальное название — *кольцо*.

Кроме рассмотренных выше трех примеров можно указать следующие примеры колец: а) множество всех целых чисел (сумма и произведение целых чисел — целые числа, так же как и число, противоположное целому); б) многочлены с целыми коэффициентами; в) числа вида $a+b\sqrt{7}$, где a и b — произвольные целые числа.

А положительные числа (относительно обычных сложения и умножения) кольца не образуют, ведь число, противоположное положительному, уже не является положительным.

Позже понятие кольца было расширено. Во-первых, отказались от требования, что в кольцо входит элемент 1, для которого $a\cdot 1=1\cdot a=a$. Например, все четные числа (как положительные, так и отрицательные) образуют кольцо без единицы. Нечетные же числа вообще не образуют кольца, так как сумма двух нечетных чисел четна.

Потом отказались и от требования коммутативности умножения, т. е. отбросили аксиому $ab=ba$ (сохранив остальные аксиомы). Такие кольца стали называть *некоммутативными*. Примером некоммутативного кольца является кольцо всех кватернионов. Наконец, пожертвовали и аксиомой ассоциативности умножения, заменив ее другими аксиомами.

Например, стали рассматривать кольца, в которых аксиомы коммутативности и ассоциативности умножения заменяются следующими аксиомами:

$$ab=-ba \text{ (антикоммутативность)};$$
$$(ab)c+(bc)a+(ca)b=0.$$

Такие кольца называют *алгебрами Ли* (по имени норвежского математика С. Ли).

Все это происходило не из любви математиков к обобщениям, а потому, что были найдены важные для практики объекты, для которых имелось естественное сложение и умножение, но умножение не было ни коммутативным, ни ассоциативным. Многие такие объекты встретились, например, в современной квантовой физике.

Разумеется, вследствие введения новых аксиом пришлось заменить многие формулы алгебры новыми. Например, для алгебр Ли вместо формулы $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$ справедлива формула $(a-b)(a+b)=2ab$. Не правда ли, удивительно?!

Поля

Мы уже говорили, что понятие кольца, удовлетворяющего всем аксиомам (1), оказалось в некоторых вопросах математики слишком узким. Однако для других математических вопросов оно оказалось слишком широким, ведь в определении кольца ни слова не сказано о возможности деления. Да и не во всех кольцах можно делить. Возьмем, например, кольцо всех целых чисел. Если разделить 3 на 5, то целого числа не получится. А без деления нельзя решать даже уравнений первой степени!

Чтобы изучать уравнения, пришлось ограничиться кольцами, в которых есть операция деления. Такие кольца математики назвали *полями*. Как в настоящем поле можно идти в любую сторону, не встречая никаких препятствий, так в математическом поле можно беспрепятственно выполнять все арифметические действия (кроме деления на нуль!).

Читатель еще в V классе познакомился с одним полем — полем всех рациональных чисел (положительных и отрицательных). Позже он познакомился с более широким полем — всех действительных чисел (рациональных и иррациональных). Наконец, все комплексные числа тоже образуют поле.

Кроме этих трех полей (рациональных, действительных, комплексных чисел) есть еще много других полей, состоящих из чисел. Возьмем, например, все числа вида $a+b\sqrt{3}$, где a и b — рациональные числа. В это множество чисел входит, например, $\sqrt{3}=0+1\cdot\sqrt{3}$, но не входит $\sqrt{5}$. Оказывается, это множество чисел образует поле.

Точно так же числа $a+b\sqrt{5}$, где a и b рациональны, образуют поле. А вот числа вида $a+b\sqrt{2}+c\sqrt{3}$, где a, b, c рациональны, не образуют поля, потому что $\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}=\sqrt{6}$. Чтобы получить поле, надо расширить это множество чисел, а именно рассматривать числа вида $a+b\sqrt{2}+c\sqrt{3}+d\sqrt{6}$, где a, b, c, d рациональны. Поля можно строить не только из чисел. Например, множество всех алгебраических дробей образует поле.

Разложение на множители и решение уравнений

Разложение чисел на множители

С разложением чисел на множители вы знакомы. Вам приходится это делать при отыскании общего знаменателя, при сокращении дробей и т. д.

Одно из основных утверждений арифметики гласит: *каждое натуральное число единственным образом разлагается на простые множители.* Например:

$$72=2\cdot2\cdot2\cdot3\cdot3;\ 1001=7\cdot11\cdot13$$

(разумеется, разложения, отличающиеся лишь порядком множителей, мы считаем одинаковыми). Напомним, что простым числом называется натуральное число, имеющее только два различных делителя (само число и 1). Число 1 не считается простым.

Будем теперь рассматривать не только натуральные числа, но и нуль и отрицательные целые числа. Иными словами, возьмем множество всех целых чисел. На первый взгляд здесь труднее определить понятие простого числа. Ведь, например, $7=(-1)\cdot(-7)$. Значит ли это, что число 7 перестает быть простым, если его рассматривать в множестве всех целых чисел? Оказывается, нет, надо только уточнить, что называется простым числом.

Заметим, что число -1 обладает следующим свойством: если разделить 1 на -1, то в частном получится целое число. Другим целым числом с таким же свойством является сама единица. Мы будем называть эти числа (1 и -1) *делителями единицы.*

Назовем целое число p *простым,* если оно не является делителем единицы, но в любом его разложении в произведение двух целых множителей один из сомножителей обязательно является делителем единицы. При таком определении число 7 остается простым и после перехода к множеству всех целых чисел. Простым будет и число -7.

Сохраняет свою силу и основной закон арифметики, однако тоже с небольшим изменением формулировки: *каждое целое число, отличное от нуля, разлагается в произведение простых целых чисел; это разложение однозначно определено с точностью до перестановок сомножителей и возможного умножения некоторых сомножителей на* -1 (*т. е. на делитель единицы*). Например:

$$21=3\cdot7=7\cdot3=(-3)(-7)=(-7)(-3).$$

Такие разложения принято считать одинаковыми,

Удивительное разложение

При решении некоторых сложных вопросов теории чисел пришлось разлагать целые числа не только на целые множители, но и на множители вида $a+b\sqrt{5}$, где a и b — целые числа. Числа такого вида сами образуют кольцо. Для них, как и для целых чисел, можно определить понятия простого числа, делителя единицы и т. д. Например, число $2+\sqrt{5}$ — делитель единицы, так как $(2+\sqrt{5})(-2+\sqrt{5})=1$. Велико же было удивление математиков, когда оказалось, что в кольце чисел $a+b\sqrt{5}$ нарушается основной закон арифметики о единственности разложения на простые множители. Например:

$$4=2\cdot 2=(3+\sqrt{5})(3-\sqrt{5}).$$

А вот в кольце чисел вида $a+b\sqrt{3}$ (a и b — целые) имеются делители единицы кроме 1 и -1, например: $(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})=1$. Но разложение на множители в этом кольце однозначно (как всегда, с точностью до перестановки множителей и умножения этих множителей на делители единицы).

В теории чисел полностью изучен вопрос, в каких кольцах чисел вида $a+b\sqrt{\pm D}$ имеет место однозначность разложения на простые множители, а в каких нет. Мы не будем на этом останавливаться.

Разложение многочленов на множители

Разложение целых чисел на множители напоминает другой раздел элементарной математики — разложение многочленов на множители. Этот раздел очень нравился нашему знакомому Васе Игнатьеву. Он умел разлагать на множители не только такие простые многочлены, как $x^2-4=(x-2)(x+2)$, но также способом группировки мог разложить:

$$x^2-3x+2=x^2-x-2x+2=x(x-1)-2(x-1)=$$
$$=(x-1)(x-2).$$

Эти примеры он брал из различных задачников. Однако, когда он попытался сам придумать пример и начал разлагать на множители многочлен x^2+6x+4, у него ничего не вышло. Потом он сообразил, что даже многочлен x^2-2 не разлагается на множители. Он забросил листок, на котором решал пример, и нашел его только через год, когда перешел в следующий класс. «Над чем же я думал! — воскликнул он, — ведь

$$x^2-2=(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2}),$$
$$x^2+6x+4=(x+3+\sqrt{5})(x+3-\sqrt{5})».$$

Вася думал, что, научившись решать квадратные уравнения, он сможет разлагать на множители любой квадратный трехчлен. Но радость его была преждевременной; когда он взялся за многочлен $x^2+6x+10$, то даже применение иррациональных чисел ему не помогло. При решении квадратного уравнения $x^2+6x+10=0$ появились квадратные корни из отрицательных чисел, а про такие корни он еще ничего не знал.

Лишь на одном из занятий математического кружка Вася научился разлагать и такие многочлены — учитель рассказал о комплексных числах, после чего Вася смог решать все квадратные уравнения, а тем самым и разлагать на множители все квадратные трехчлены:

$$x^2+6x+10=(x+3+i)(x+3-i).$$

Почему же в разных классах Вася по-разному подходил к задаче о разложении многочлена, почему все больше расширялся класс многочленов, которые он мог разлагать на множители? Ларчик открывается просто — задача о разложении на множители не очень точно поставлена. Надо еще указать, какими могут быть эти множители, какими числами должны быть их коэффициенты. Таким образом, недостаточно сказать: «Разложите многочлен $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n$ на множители». Надо еще сказать, *какому полю* должны принадлежать коэффициенты этих множителей.

Если все коэффициенты многочлена $f(x)$ принадлежат числовому полю P, то говорят, что $f(x)$ является многочленом над полем P. Например, $x^2+6x+10$ является *многочленом над полем* рациональных чисел, $x^2+2x+\pi$ — над полем действительных чисел, а многочлен $x^2+ix+3-i$ — над полем комплексных чисел.

Разумеется, если поле P является *частью* поля P_1 (или, как говорят математики, его *подполем*), то любой многочлен над полем P может рассматриваться и как многочлен над полем P_1. Ведь его коэффициенты принадлежат полю P, а значит, и полю P_1. Такой подход бывает удобен при разложении многочленов на множители. Например, можно говорить о разложении многочлена $x^2+6x+10$ над полем комплексных чисел.

Разложение многочленов на множители похоже по своим свойствам на разложение целых чисел. Только вместо простых чисел надо брать так назы-

ваемые *неприводимые многочлены* — те, которые нельзя представить в виде произведения двух многочленов меньшей степени (над заданным полем). Делителями единицы являются только многочлены нулевой степени, т. е. отличные от нуля числа. Как и для целых чисел, здесь каждый многочлен единственным образом разлагается в произведение неприводимых множителей. Разумеется, такие два разложения, как

$$x^2+3x+2=(x+1)(x+2)=(2x+2)\left(\frac{1}{2}x+1\right),$$

отличающиеся лишь делителями единицы, считаются одинаковыми.

Разложение многочленов на множители и решение уравнений

Зачем же надо разлагать многочлены на множители? Одна причина ясна — для выполнения действий с алгебраическими дробями. Но есть и другая причина — разложение на множители облегчает решение уравнений. Пусть нам дано уравнение:

$$x^5+2x^4-x\quad 2=0.$$

Решать уравнения пятой степени мы не умеем. Но если сгруппировать члены в левой части, то получим:

$$(x+2)(x^4-1)=0,$$

или

$$(x+2)(x-1)(x+1)(x^2+1)=0.$$

А теперь видно, что левая часть обращается в нуль при $x_1=-2$, $x_2=1$, $x_3=-1$. Значит, эти числа являются корнями нашего уравнения. Других действительных корней у него нет, так как произведение может равняться нулю, лишь если какой-нибудь множитель равен нулю, а множитель x^2+1 при действительных x в нуль не обращается.

Особенно легко решать уравнения, левая часть которых разложена на множители первой степени:

$$(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdot\quad\cdot(x-\alpha_n)=0.$$

В этом случае ясно, что корнями будут числа α_1, α_2, ..., α_n, а других корней не будет (так как если x отлично от всех чисел α_1, α_2, ..., α , то ни один из множителей первой степени в нуль не обращается).

Верно и обратное: если мы знаем n корней α_1, α_2, ..., α многочлена

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ .\ .+a_n,$$

то он следующим образом разлагается на множители:

$$f(x)=a_0(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdot\quad\cdot(x-\alpha_n).$$

Из сказанного ясно, что никакое уравнение n-й степени не может иметь больше, чем n корней. А имеет ли любое уравнение хотя бы один корень? Впрочем, эта задача опять нечетко поставлена: неясно, что значит «любое уравнение», какими должны быть его коэффициенты. Неясно и то, какие корни мы будем рассматривать.

Основная теорема алгебры многочленов

Мы видели, что чем богаче элементами поле P, тем больше возможностей разложить над ним заданный многочлен $f(x)$ на множители. Например, многочлен x^4-2 совсем не разлагается над полем рациональных чисел, но разлагается на три множителя над полем действительных чисел:

$$x^4-2=(x-\sqrt[4]{2})(x+\sqrt[4]{2})\ (x^2+\sqrt{2})$$

и на четыре — над полем комплексных чисел:

$$x^4-2=(x-\sqrt[4]{2})(x+\sqrt[4]{2})(x-i\sqrt[4]{2})(x+i\sqrt[4]{2}).$$

Однако расширение поля влечет за собой и расширение множества многочленов, которые надо разлагать. Ведь если допустить в качестве коэффициентов не только рациональные, но и действительные числа, то придется разлагать не только такие многочлены, как x^4-2, но и такие, как $x^4-\sqrt{2}$, и даже такие, как $x^4-\pi$. А если допустить комплексные числа, то придется рассматривать и многочлены вида x^4+i.

К счастью, оказалось, что выигрыш от расширения поля больше, чем проигрыш, — над полем комплексных чисел *любой* многочлен (не только с рациональными, но и с любыми комплексными коэффициентами) разлагается до конца, т. е. на множители первой степени. А это означает, что всякое уравнение n-й степени с комплексными коэффициентами имеет ровно n корней. Эту теорему называют *основной теоремой алгебры многочленов*. Ее доказал К. Гаусс в 1799 г.

Сложнее обстоит дело с разложением многочлена над полем действительных чисел. Как мы видели, над этим полем многочлен $x^2+6x+10$ не разлагается на множители первой степени. Однако любой многочлен с действительными коэффициентами, степень которого больше двух, всегда разлагается на множители с коэффициентами того же вида. Поэтому всякий многочлен с действительными коэффициентами разлагается над полем действительных чисел на множители первой и второй степеней.

Нильс Хенрик Абель.

Решение уравнений в радикалах

Основная теорема алгебры дает только уверенность в том, что у каждого алгебраического уравнения есть корни. (Теоремы такого типа называют в математике теоремами существования.) Однако она ничего не говорит о том, как эти корни искать. Иными словами, вопрос о том, как решить данное уравнение, остается открытым и после доказательства основной теоремы алгебры.

Издавна люди занимались решением уравнений. При этом старались выразить корни уравнения через коэффициенты с помощью четырех арифметических действий и извлечения корней. Это удалось сделать для квадратных уравнений, а впоследствии и для уравнений третьей и четвертой степеней.

Многие годы усилия математиков были направлены на то, чтобы найти решение в радикалах (т. е. с помощью этих же пяти действий) для любого уравнения пятой степени. Все эти попытки к успеху не привели. Долгое время думали, что дело в недостаточной изобретательности математиков и что когда-нибудь придет математический гений, который решит задачу.

Алгебра правды и лжи

Всем, кто впоследствии пожелает изучить правила алгебры логики, имеет смысл предварительно попрактиковаться в применении своеобразных математических приемов выявления истины из поступившей информации, содержащей в себе и правду и ложь. Пусть полученная информация состоит из нескольких сообщений, причем заранее известно, что правдиво только какое-то одно. Сейчас несущественно — часто или редко встречается такая ситуация.

Условимся, что эквивалентом всякого верного утверждения будет число 1, а всякого ложного — число 0. Тогда полученные сведения можно определенным образом закодировать (зашифровать) символами и составить из этих символов и чисел 0 и 1 некоторые алгебраические выражения и равенства. При этом каждое утверждение можно представить в двух видах: как произведение и как сумму.

Пусть буквами A и B обозначены два верных утверждения, т. е. каждая буква имеет значение 1; тогда произведение $AB=1$; но если A или B ложно, т. е. имеет значение 0, то $A \cdot B=0$. Сумму двух верных утверждений (т. е. двух единиц) следует считать равной 1, $A+B=1$, так как в нашей алгебре нет чисел, превышающих единицу; в самом деле, ведь ничто не может быть более правильным, чем «верно». Однажды произошел такой разговор.

Мама. Вчера мне сказали, что Саша, сын Николая Ивановича, уже окончил институт, а ему еще только двадцать один год.

Папа. Ты что-то напутала, дорогая. Сына Николая Ивановича зовут Костя, и ему еще только недавно исполнилось восемнадцать.

Дочь. Я не знаю семью Николая Ивановича, но помню, подруга утверждала, что его сыну 25 лет, и при этом называла она его другим именем, не Сашей.

При помощи вычислений определите имя и возраст сына Николая Ивановича, полагая, что в каждой из полученных информаций содержатся верные сведения либо только о возрасте, либо только об имени.

Решение на стр. 416.

Гений действительно пришел, им был молодой норвежский математик Н. Абель. Однако вместо желанной формулы он дал отрицательный ответ — решения задачи не существует. Впрочем, сначала Абель ошибся (и гении делают ошибки!). Ему показалось, что он нашел формулу, дающую решение уравнения пятой степени в радикалах. Но потом он увидел ошибку, проанализировал свои рассуждения и в результате получил замечательный вывод: не только неверна выведенная им формула, но и вообще не существует общей формулы, выражающей корни любого уравнения пятой степени через коэффициенты этого уравнения с помощью сложения, вычитания, умножения, деления и извлечения корня.

Циркуль и линейка

На развитие теории уравнений сильное влияние оказали задачи о построениях циркулем и линейкой, в особенности задачи о построении правильных многоугольников. Из школьного курса известно, как строить циркулем и линейкой правильный треугольник, квадрат и шестиугольник. В более подробных курсах рассказано о построении правильного пятиугольника. А вот о построении правильного семиугольника или девятиугольника ничего не говорится. И это не случайно: ни правильный семиугольник, ни правильный девятиугольник *нельзя* построить циркулем и линейкой.

Как же это узнали? Ведь доказать разрешимость задачи сравнительно легко — достаточно указать путь ее решения. Доказать же, что задачу нельзя решить, очень трудно.

Путей решения задачи бесконечно много (мало ли какие построения можно придумать!), и доказать, что ни один из них не приведет к цели, на первый взгляд невозможно.

Однако математики справились с этой задачей. Для этого они сначала исследовали вопрос, какие отрезки *можно* построить циркулем и линейкой исходя из одного заданного отрезка (в случае построения правильного многоугольника заданным является радиус описанной окружности или сторона искомого правильного многоугольника).

Чтобы ответить на этот вопрос, пришлось ввести понятие *квадратичной иррациональности*. Так назвали числа, которые получаются из единицы с помощью четырех арифметических действий и операции извлечения квадратного корня. Вот для примера некоторые числа, являющиеся квадратичными иррациональностями:

$$\sqrt{3},\ 12-\sqrt{7}\quad \sqrt[4]{5}=\sqrt{\sqrt{5}},$$
$$\frac{\sqrt{\sqrt[8]{27}-\sqrt{2}}}{\sqrt{5}+\sqrt[16]{3}}$$

Все квадратичные иррациональности, вместе взятые, образуют *числовое поле*, причем в этом поле всегда выполнима операция извлечения квадратного корня из положительного числа.

Было доказано, что если задан отрезок a, длина которого принимается за единицу, то циркулем и линейкой можно построить любые отрезки, длины которых являются квадратичными иррациональностями, и только эти отрезки.

Например, для построения правильного пятиугольника с данной стороной достаточно построить его диагональ (тогда все вершины можно будет найти с помощью засечек окружности). Расчеты показывают, что если сторона пятиугольника равна 1, то его диагональ имеет длину $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$. Так как это число является квадратичной иррациональностью, то построение правильного пятиугольника с помощью циркуля и линейки возможно.

А вот правильный девятиугольник построить нельзя. Эта задача сводится к построению угла в 40°. Нетрудно проверить далее, что число $\cos 40°$ является корнем уравнения

$$x^3-3x+1=0 \qquad (3)$$

Было доказано, что если один из корней кубического уравнения с целыми коэффициентами является квадратичной иррациональностью, то у него есть и рациональный корень. А легко доказать, что у уравнения (3) рациональных корней нет, значит, нет и корней, являющихся квадратичными иррациональностями. Поэтому и нельзя построить правильный девятиугольник циркулем и линейкой.

Окончательное решение вопроса о построении правильных многоугольников циркулем и линейкой дал в 1796 г. Гаусс. Он доказал, что если p — простое число, то правильный p-угольник с данной стороной может быть построен циркулем и линейкой в том, и только в том, случае, когда число p можно записать в виде $p=2^{2^n}+1$, где n — целое число. Например, при $n=0$ имеем $p=3$, а при $n=1$ имеем $p=5$. Поэтому правильный треугольник и правильный пятиугольник можно построить циркулем и линейкой. При $n=2$ получаем $p=17$. Значит, и правильный семнадцатиугольник строится циркулем и линейкой. Можно построить циркулем и линейкой даже пра-

вильные многоугольники с 257 и 65 536 сторонами. А вот при $n=5$ число $2^{2^n}+1$ оказывается составным. Поэтому правильный $(2^{2^5}+1)$-угольник нельзя построить циркулем и линейкой.

В древности математики потратили много сил на решение следующей задачи об *удвоении куба:* дан куб со стороной a; построить такой куб, объем которого вдвое больше объема данного куба. Примем длину отрезка a за единицу, а длину ребра искомого куба обозначим через x. По условию задачи должно быть $x^3=2$. Это уравнение не имеет рациональных корней. Поэтому по упомянутой выше теореме у него нет и корней, являющихся квадратичными иррациональностями. Значит, решить задачу удвоения куба циркулем и линейкой невозможно.

Гораздо труднее было доказать, что невозможно построить циркулем и линейкой квадрат, равновеликий кругу радиуса 1 (*задача о квадратуре круга*). Это доказательство было проведено *неалгебраическими* методами. Было доказано, что сторона такого квадрата не только не является квадратичной иррациональностью, но даже не может быть корнем никакого алгебраического уравнения с целыми коэффициентами (такие числа называют неалгебраическими или трансцендентными).

Группы

Умножение геометрических преобразований

О том, что такое геометрические преобразования и как они применяются для решения задач, было подробно рассказано в статье «Геометрические преобразования». На первый взгляд может показаться, что эта область математики относится целиком к геометрии, а алгебраистам там делать нечего. Но это не так; оказывается, геометрические преобразования можно *умножать,* а ведь алгебра изучает свойства самых различных действий, в том числе и умножения преобразований.

Как же умножить геометрическое преобразование α на геометрическое преобразование β? А очень просто — сначала сделать преобразование α, а потом β. В результате получится новое преобразование. Его называют *произведением* преобразований α и β и обозначают $\alpha\beta$. Пусть, например, α — поворот плоскости вокруг точки O на 30°, а β — поворот вокруг той же точки на 45°. Сделав эти повороты один за другим, получим поворот плоскости вокруг точки O на 75° (рис. 2). Этот поворот и является произведением поворотов α и β.

Умножение преобразований похоже по своим свойствам на умножение чисел. Например, для умножения преобразований верен ассоциативный закон:

$$\alpha(\beta\gamma)=(\alpha\beta)\gamma.$$

Есть и преобразование, играющее роль *единицы*, т. е. такое, что для любого преобразования α верна формула $\alpha\cdot e=e\cdot\alpha=\alpha$. Им является тождественное преобразование e, оставляющее все точки на месте. Ясно, что если сначала сделать преобразование e, т. е. оставить все неизменным, а потом преобразование α, то это все равно что сделать только преобразование α. Поэтому $e\cdot\alpha=\alpha$. Точно так же доказывается, что $\alpha\cdot e=\alpha$.

— А нужно ли доказывать последнее равенство? — спросит читатель. — Ведь уже доказано, что $e\cdot\alpha=\alpha$, а от перестановки сомножителей произведение не меняется.

Вспомните, однако, что при умножении кватернионов переставлять сомножители нельзя. Оказывается, их нельзя переставлять и при умножении преобразований. Вот простой пример.

Пусть α — сдвиг вдоль оси Ox на 6 единиц, а β — поворот на 90° вокруг точки O. При преобразовании α начало координат перейдет в точку A (6; 0). При преобразовании β (т. е. при повороте на 90°) точка A перейдет в точку B (0; 6). Таким образом, преобразование $\alpha\cdot\beta$ переводит точку O в точку B (рис. 3).

Произведем теперь те же преобразования в обратном порядке. При повороте α точка O останется на месте. При сдвиге же β точка O перейдет в точку A. Значит, $\beta\cdot\alpha$ переводит O в точку A, а не в точку B. Мы видим, что $\alpha\cdot\beta\neq\beta\cdot\alpha$.

Итак, умножение преобразований не обладает свойством коммутативности. Выполнение равенства $\alpha\beta=\beta\alpha$ является для преобразований не правилом, а исключением. Одно из таких исключений дается формулой: $\alpha e=e\alpha$.

Преобразования можно не только умножать, но и делить друг на друга. Для чисел деление сводится к умножению на обратное число, например:

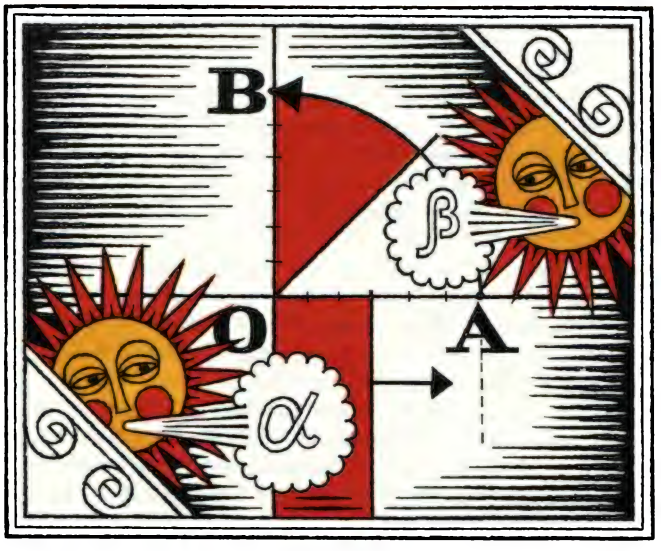
$$2:5=2\cdot\frac{1}{5}=2\cdot5^{-1}.$$

И для преобразований деление сводится к умножению на *обратное преобразование.* Это преобразование определяют следующим образом.

Пусть преобразование α переводит точку P в точку Q. Тогда обратное ему преобразование α^{-1} переводит Q обратно в точку P. Например, если α — сдвиг вправо на отрезок a, то α^{-1} — сдвиг влево на тот же отрезок a.

Рис. 2 (верхний).

Рис. 3 (нижний).



Ясно, что если сначала сделать преобразование α, а потом преобразование α^{-1}, то в результате все точки вернутся на свои места и получится тождественное преобразование. Поэтому $\alpha \cdot \alpha^{-1} = e$. Точно так же $\alpha^{-1} \cdot \alpha = e$.

Теперь ясно, как можно делить преобразования. Только, в отличие от чисел, для преобразований есть *два* вида деления — *слева* и *справа*. Если разделить преобразование α слева на β, то получится $\beta^{-1}\alpha$, если справа, то $\alpha\beta^{-1}$.

Зачем же нужно умножать преобразования? Чтобы разобраться в этом, разберемся в понятии *равенства* геометрических фигур.

Что такое равные фигуры

В статье «Геометрические преобразования» рассказано, что две геометрические фигуры называются *равными*, если существует *движение*, при помощи которого можно совместить одну фигуру с другой. Геометрические свойства равных фигур совершенно одинаковы. Поэтому можно сказать, что *геометрия изучает только те свойства фигур, которые не меняются при движениях*.

Однако это определение не всегда удовлетворительно. Например, при изучении векторов (а теория векторов — это часть геометрии) два вектора считают равными, если не только их длины одинаковы, но и векторы параллельны и одинаково направлены. Поэтому, например, векторы $\vec{OA}$ и $\vec{OB}$ (рис. 4) не считаются равными, хотя один из них получается из другого *поворотом* вокруг точки O. А векторы $\vec{OA}$ и $\vec{CD}$ на том же рисунке равны друг другу. Чтобы получить вектор $\vec{CD}$ из вектора $\vec{OA}$, надо сделать *параллельный перенос* плоскости на вектор $\vec{OC}$.

Таким образом, два вектора называются равными, если один получается из другого с помощью параллельного переноса. Можно сказать, что векторная алгебра изучает свойства, остающиеся неизменными при параллельных переносах.

В других случаях приходится изучать свойства фигур, остающиеся неизменными лишь при поворотах вокруг некоторой точки. Если, например, инженеру надо рассчитать турбину, то для него все лопатки турбины равноправны — одна получается из другой поворотом вокруг оси турбины. А сместить лопатку вдоль радиуса нельзя — при этом изменится центробежная сила и весь расчет окажется неверным.

Точно так же две фигуры на сфере надо считать равными, если одна получается из другой поворотом вокруг центра сферы.

Можно привести и такие случаи, когда целесообразно считать равными геометрические фигуры, не являющиеся таковыми с обычной точки зрения. Например, при изучении угловых свойств окружности можно полностью отвлечься от ее размеров. Тогда все окружности будут для нас одинаковыми. Но окружность S_1 на рис. 5 нельзя перевести в окружность S_2 движением. Для этого надо применить более общее преобразование подобия. Существуют и такие случаи, когда целесообразно считать равными фигуры, переводимые друг в друга линейными и

Рис. 4.

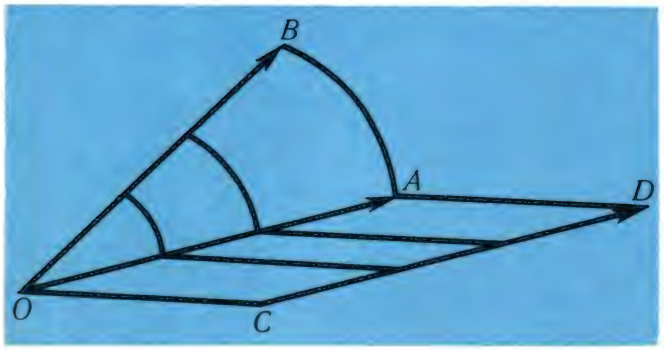
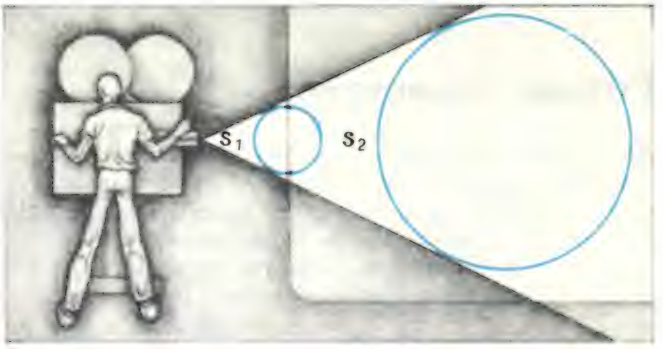
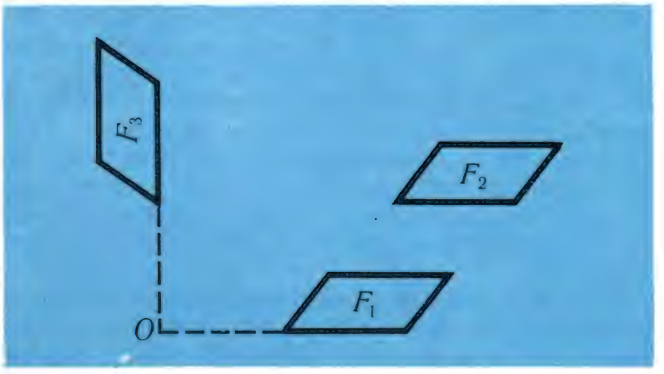


Рис. 5 (верхний).

Рис. 6 (нижний).





другими преобразованиями (см. об этом подробнее в статье «Геометрические преобразования»).

Поэтому можно дать такое определение равенства геометрических фигур. *Пусть имеется некоторое множество геометрических преобразований G. Фигура F_1 называется равной фигуре F_2 относительно этого множества преобразований, если есть преобразование α из G, переводящее F_1 в F_2.* Например, если множество G состоит из параллельных переносов, то фигуры F_1 и F_2 на рис. 6 равны, а фигуры F_1 и F_3 не равны. Если же множество G состоит из поворотов вокруг точки O, то равными окажутся фигуры F_1 и F_3, а неравными — F_1 и F_2. Наконец, если взять множество *всех* движений плоскости, то относительно него все три фигуры равны.

Ясно: чем больше преобразований содержит множество G, тем большее число фигур окажется равным относительно этого множества преобразований.

Группы геометрических преобразований

Не всякое множество G геометрических преобразований пригодно для определения равенства фигур. Ведь может случиться, что в множестве G отсутствует преобразование, оставляющее какую-то фигуру F неизменной, и окажется, что она не равна самой себе. Конечно, такое определение равенства никуда не годилось бы. Поэтому потребуем, чтобы среди преобразований множества G было тождественное преобразование e, т. е. такое, при котором все фигуры остаются неизменными. Тогда любая фигура будет равна самой себе относительно этого множества.

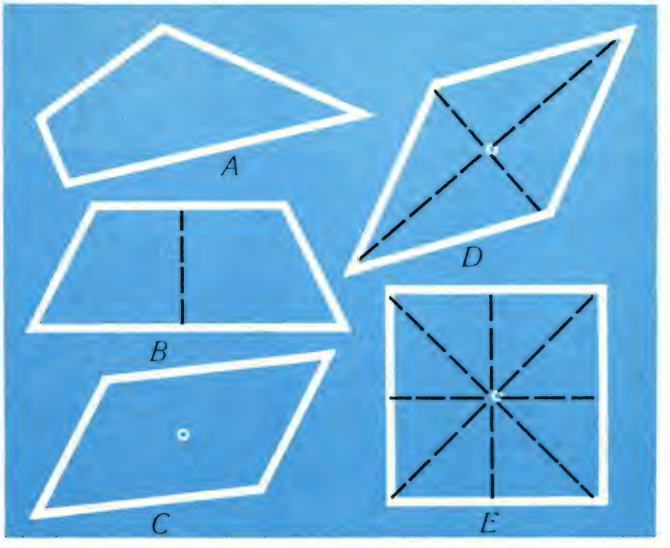
Но существования тождественного преобразования еще мало. Может случиться, что в множестве G есть преобразование, переводящее фигуру F_1 в фигуру F_2, есть и преобразование, переводящее фигуру F_2 в фигуру F_3, но нет преобразования, переводящего F_1 прямо в F_3. Получим: $F_1=F_2$, $F_2=F_3$, но $F_1\neq F_3$. Чтобы этого избежать, введем следующее условие: вместе с любыми двумя преобразованиями α и β в множество G входит и их произведение $\alpha\beta$.

Наконец, надо, чтобы из равенства $F_1=F_2$ вытекало равенство $F_2=F_1$. Иными словами, надо, чтобы вместе с преобразованием, переводящим фигуру F_1 в фигуру F_2, множество G содержало и преобразование, переводящее F_2 в F_1. Для этого достаточно, чтобы вместе с преобразованием α множество G содержало и обратное ему преобразование α^{-1}.

Подведем итоги. Для того чтобы равенство геометрических фигур, определенное с помощью множества преобразований G, обладало «хорошими» свойствами, нужно следующее: 1) множество G должно содержать тождественное преобразование; 2) вместе с двумя преобразованиями α и β в G должно входить их произведение $\alpha\beta$; 3) вместе с каждым преобразованием α множество G должно содержать обратное к нему преобразование α^{-1}. Множество преобразований, для которого выполнены эти три условия, называют *группой геометрических преобразований.*

Таким образом, для того чтобы с помощью множества G геометрических преобразований можно было определить понятие равенства геометрических фигур, надо, чтобы это множество было *группой.*

Рис. 7



Разные геометрии

До того времени, пока математики не поняли, что равенство геометрических фигур можно определять при помощи различных групп геометрических преобразований, казалось, что существует только *одна* геометрия, а именно та, которую изучают в школе. Первый удар этому мнению нанес Н. И. Лобачевский, который построил новую геометрию, совсем не похожую на обычную (см. ст. «О различных геометриях»). Истинную причину различия геометрии Лобачевского и геометрии Евклида впервые глубоко осветил немецкий математик Ф. Клейн. Он показал, что все дело в различии *групп преобразований*, используемых в этих геометриях для определения равенства фигур: в геометрии Евклида для этого используется группа обычных движений, а в геометрии Лобачевского совершенно другая группа преобразований (их называют *гиперболическими движениями* плоскости).

Вообще, каждая группа преобразований плоскости определяет свое понятие равенства, а значит, и свою геометрию. В геометрии, соответствующей некоторой группе преобразований, изучаются лишь свойства, одинаковые у всех фигур, равных относительно этой группы. Иными словами, изучаются те геометрические свойства фигур, которые сохраняются при всех преобразованиях рассматриваемой группы. Эту точку зрения на геометрию впервые четко сформулировал Ф. Клейн в 1872 г. на лекции в г. Эрлангене. С тех пор такой подход к пониманию геометрии получил название *эрлангенской программы*.

Теоремы школьной геометрии тоже фактически относятся к различным геометриям. Одни из них касаются свойств фигур, не меняющихся при движениях, а другие — более глубоких свойств, не меняющихся при любых линейных преобразованиях (см. об этом в ст. «Геометрические преобразования»).

Группы симметрий

Посмотрите на геометрические фигуры, изображенные на рис. 7. Фигуру A на этом рисунке никак нельзя назвать симметричной. Фигуры B и C уже обладают некоторой симметрией. Более симметрична фигура D, и, конечно, самой симметричной из всех начерченных фигур является фигура E (квадрат). Однако это только слова — симметричность не длина и не площадь, а потому понятия «больше» и «меньше» для оценки симметричности пока точного смысла не имеют.

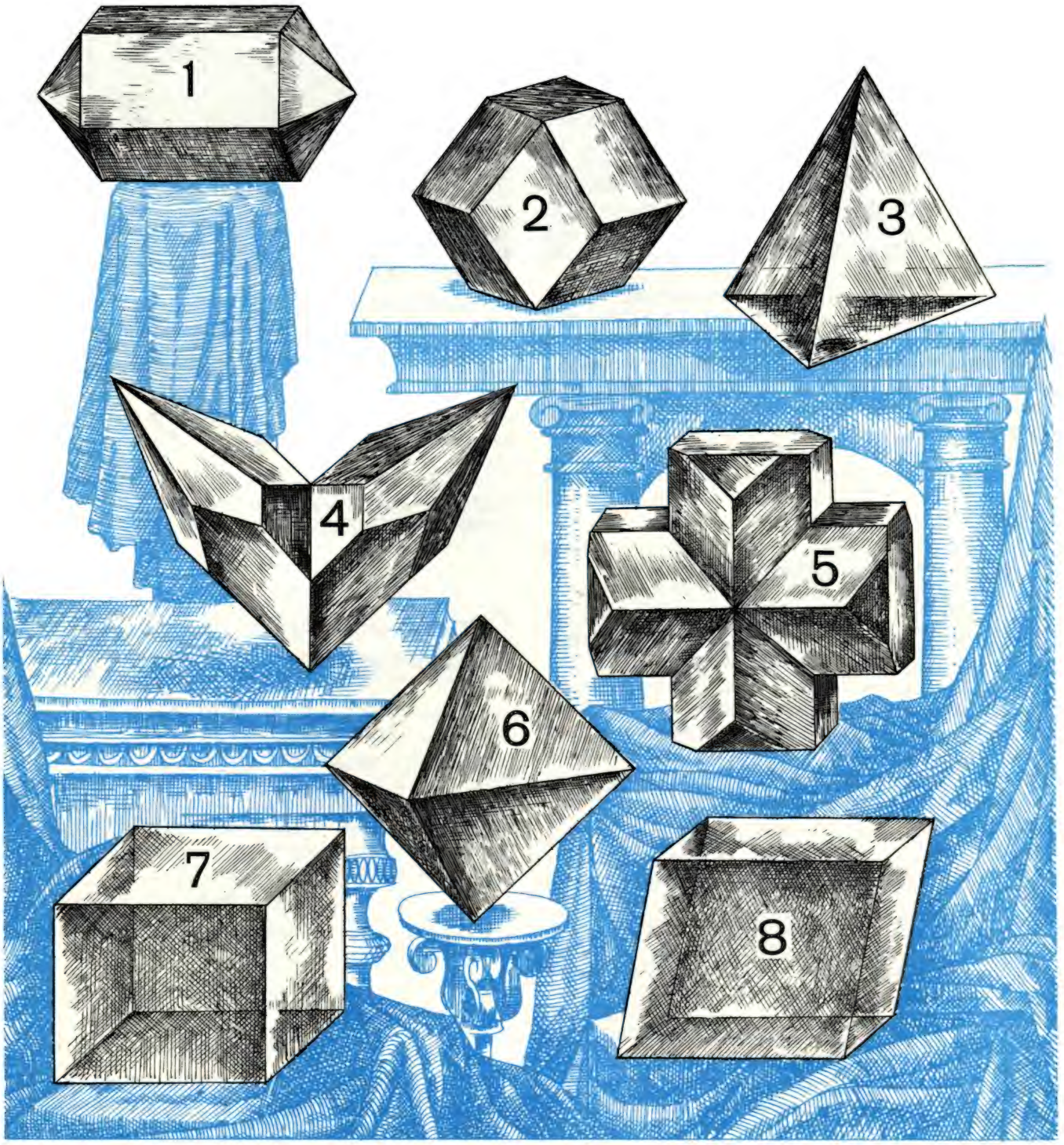
Как же можно оценить бóльшую или меньшую симметричность фигуры? Для этого надо рассмотреть множество всех движений плоскости, которые переводят рассматриваемую фигуру самое в себя. Для фигуры A на рис. 7 единственным таким движением является тождественное преобразование. Для фигур B и C кроме тождественного преобразования есть еще по одному движению, переводящему их в себя, именно: для равнобочной трапеции — осевая симметрия (относительно прямой, соединяющей середины оснований), для параллелограмма — центральная симметрия. Для ромба D есть уже 4 движения, совмещающих его с самим собой: тождественное преобразование, две осевые симметрии относительно диагоналей и центральная симметрия. Наконец, для квадрата таких преобразований 8 (4 осевые симметрии относительно средних линий и диагоналей и 4 вращения на углы 0°, 90°, 180° и 270°).

Ясно, что совокупность всех движений, переводящих заданную геометрическую фигуру самое в себя, образует группу. В самом деле, если преобразования α и β переводят фигуру F в себя, то и их произведение $\alpha \cdot \beta$ преобразует ее в себя. Не изменит ее, конечно, и тождественное преобразование. То же самое верно и для обратного преобразования.

Группу всех движений, переводящих фигуру F самое в себя, называют *группой симметрий* этой фигуры.

Чем шире группа симметрий данной фигуры, тем более симметричной она является. Именно поэтому квадрат является наиболее симметричной из всех фигур, изображенных на рис. 7. Интересные примеры симметричных фигур, обладающих самыми разными типами симметрии, дают узоры.

Рис 8. Многообразны формы симметрии кристаллов:
1 — апатит, 2 — альмандин, 3 — лед, 4 — кальцит (двойник), 5 — ставролит (двойник), 6 — золото, 7 — поваренная соль, 8 — исландский шпат.



Примером симметрии в природе является одуванчик.

Если фигура переходит сама в себя при всех поворотах на углы вида $\frac{360^\circ \cdot k}{n}$, где k — целое, а n фиксировано, то говорят, что она обладает *симметрией порядка* n (см. стр. 299). Такой симметрией обладает, например, правильный n-угольник.

Бывают фигуры, у которых группа симметрий бесконечна. Примерами могут служить окружность, кольцо, а также фигуры, изображенные на рисунке см. стр. 387; эти фигуры надо представить себе простирающимися в бесконечность).

Разумеется, о группе симметрий можно говорить не только для плоских, но и для пространственных фигур. При этом обычно рассматривают только движения пространства, не являющиеся симметриями относительно плоскостей (их нельзя осуществить в пространстве движениями пространственных тел как твердого целого). Так, можно говорить о группе симметрий правильного тетраэдра, куба, икосаэдра, правильной n-угольной призмы и т. д. Предоставляем читателю убедиться, что группа симметрий куба состоит из 24 элементов, а правильной n-угольной призмы — из $2n$ элементов.

Симметрия в природе

Симметрией обладают не только геометрические фигуры или вещи, сделанные рукой человека, но и многие творения природы (бабочки, стрекозы, листья, морские звезды, снежинки и т. д.). Особенно разнообразны свойства симметрии кристаллов. На рис. 8 показаны некоторые виды кристаллов. Одни из них более симметричны, другие — менее. Долгое время ученые-кристаллографы не могли описать всех видов симметрии кристаллов. Решил эту задачу в 1890 г. русский ученый Е. С. Федоров. Он доказал, что есть ровно 230 групп, переводящих в себя кристаллические решетки. Это открытие значительно облегчило кристаллографам изучение видов кристаллов, которые могут существовать в природе.

Следует, однако, заметить, что многообразие кристаллов в природе настолько велико, что даже использование группового подхода не дало еще способа описать все возможные формы кристаллов.

Очень широко используется теория групп симметрий в квантовой физике. Уравнения, которыми описывается поведение электронов в атоме (так называемое волновое уравнение Шредингера), уже при небольшом числе электронов настолько сложны, что непосредственное решение их практически невозможно. Однако, используя свойства симметрии атома (неизменность электромагнитного поля ядра при поворотах и симметриях, возможность перестановки некоторых электронов между собой, т. е. симметричное расположение этих электронов в атоме, и т. д.), удается исследовать их решения, не решая уравнений.

Вообще, использование теории групп является мощным математическим методом исследования и учета симметрии явлений природы.

Группы алгебраических преобразований

Преобразования можно производить не только над геометрическими фигурами, но и над алгебраическими выражениями. Речь идет здесь, конечно, не о тождественных преобразованиях (раскрытии скобок, приведении подобных членов и т. д.). Нет, мы будем рассматривать такие преобразования, как изменение знаков переменных, перестановки переменных и т. д.

Например, многочлен

$$x^3 - y^2 + 3xy^4$$

при изменении знаков переменных x и y превращается в многочлен

$$-x^3 - y^2 - 3xy^4,$$

а при перестановке x и y — в многочлен

$$y^3 - x^2 + 3yx^4.$$

Изучение преобразований алгебраических выражений представляет собой с точки зрения эрлангенской

Евграф Степанович Федоров.

программы Ф. Клейна своеобразную геометрию. В этой геометрии «фигурами» являются алгебраические выражения (многочлены, дроби и т. д.), а группа преобразований состоит в одних случаях из всевозможных перестановок переменных, в других — из циклических перестановок переменных (при которых каждое переменное заменяется следующим, а последнее — первым), в третьих — из всевозможных замен знаков переменных (рис. 9) и т. д.

Задачей такой геометрии, как и обычной геометрии, является нахождение таких свойств «фигур» (т. е. алгебраических выражений), которые сохраняются при всех преобразованиях данной группы. В частности, весьма интересно нахождение и изучение «симметричных фигур» для данной группы, т. е. алгебраических выражений, которые не изменяются при преобразованиях данной группы. Например, если рассматривать группу всех перемен знаков, то «симметричными фигурами» будут четные выражения, т. е. такие, у которых показатели всех степеней переменных четны (например, x^2+y^4, $x^2+5-x^8y^6$, $\frac{x^2-y^2}{x^4+y^4}$ и т. д.). Для группы всех перестановок переменных «симметричными фигурами» будут такие выражения, которые не меняются ни при каких перестановках переменных. Они называются *симметрическими функциями*. Например, симметрическими многочленами от двух переменных x, y являются

$$x^2y^2-x^4-y^4,\ x^2+xy+y^2,\ x^5+y^5,\ xy^3+x^3y.$$

В такой геометрии есть и свои теоремы. Например, можно доказать, что любой симметрический многочлен от x и y выражается через два простейших многочлена $x+y$ и xy. Скажем,

$$x^5+y^5=(x+y)^5-5(x+y)^3xy+5(x+y)(xy)^2.$$

Эту теорему можно применять при решении систем уравнений. Если оба уравнения системы двух уравнений с двумя неизвестными симметричны относительно x и y, то бывает полезно ввести новые неизвестные: $u=x+y$, $v=xy$. Как правило, после этого заданная система уравнений упрощается. Например, система уравнений

$$\begin{cases} x^5+y^5=a^5, \\ x+y=b \end{cases}$$

при такой замене сводится к системе

$$\begin{cases} u^5-5u^3v+5uv^2=a^5, \\ u=b. \end{cases}$$

Из этой системы легко найти u и v, а потом x и y.

Любопытно, что теория групп первоначально и возникла при рассмотрении групп алгебраических преобразований. Чтобы узнать, решается ли данное алгебраическое уравнение

$$x^n+a_1x^{n-1}+\ \ .+a_n=0 \qquad (4)$$

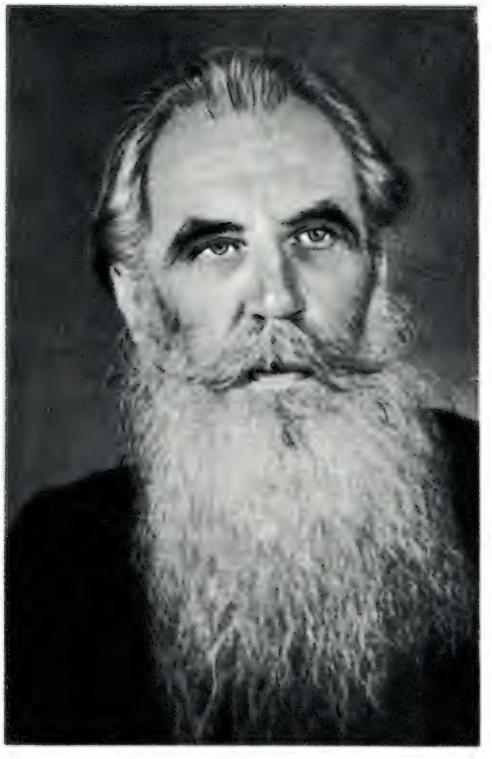
в радикалах, алгебраисты стали рассматривать значения, которые принимают многочлены от n переменных, если в них вместо x_1, x_2, ..., x_n подставить корни α_1, α_2, ..., α^n уравнения (4). Оказалось, что вопрос о разрешимости уравнений в радикалах тесно связан с поведением этих значений многочленов при различных перестановках корней между собой.

Эти исследования привели к созданию новой, очень глубокой и важной ветви алгебры — применению теории групп к исследованию уравнений. Основоположные результаты этой теории были получены в 1830—1832 гг. французским математиком Э. Галуа. В его честь весь этот раздел алгебры носит сейчас название *теории Галуа*.

Абстрактная теория групп

Рассмотрим следующие две группы преобразований. Первой из них является группа симметрий ромба, второй — группа перемен знаков переменных x и y. Обозначим тождественное преобразование ромба через e, симметрии относительно диагоналей — через a и b и центральную симметрию — через c. Проверьте, что «таблица умножения» в этой группе имеет следующий вид:

	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e



Отто Юльевич Шмидт.

Теперь обратимся к группе перемен знаков у переменных x и y. Здесь мы также обозначим тождественное преобразование $x \to x$, $y \to y$ через e. Изменение знака у одного только x (т. е. преобразование $x \to -x$, $y \to y$) обозначим через a, а изменение знака у одного только y — через b. Наконец, преобразование $x \to -x$, $y \to -y$ (изменение знаков у обеих переменных) обозначим через c. Легко проверяется тогда, что в рассматриваемой группе преобразований «таблица умножения» имеет вид:

	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

Сразу бросается в глаза, что написанные «таблицы умножения» совершенно одинаковы. Итак, различные группы преобразований могут оказаться совершенно одинаково устроенными, т. е. иметь одинаковое число элементов и одинаковую «таблицу умножения». Для решения многих вопросов, относящихся к группам преобразований, совершенно неважно знать, что́ именно преобразуется, а существенно лишь, сколько имеется различных преобразований в группе и как они перемножаются.

Изучением групп с этой точки зрения занимается так называемая *абстрактная теория групп*. В этой теории рассматривают множества G, состоящие из каких угодно элементов (не обязательно преобразований), для которых определено каким-то образом умножение, обладающее следующими свойствами:

1. Произведение ab двух элементов из G принадлежит G.

2. Существует элемент e (единичный), обладающий тем свойством, что для всех элементов a из G выполняется равенство $ae = ea = a$.

3. Для любого элемента a есть обратный ему элемент a^{-1}, т. е. такой, что $aa^{-1} = a^{-1}a = e$.

4. Для любых трех элементов a, b, c выполнено равенство $a(bc) = (ab)c$.

Заметим, что последнее равенство, выражающее ассоциативность умножения, всегда выполняется для преобразований.

Множество G с указанными свойствами называется *группой*. Первая в России книга по теории групп вышла в 1916 г. и принадлежит перу О. Ю. Шмидта.

Значение абстрактной теории групп состоит в том, что теоремы и понятия этой теории могут применяться и к группам геометрических преобразований, и к группам алгебраических преобразований, и к изучению атомов и кристаллов и т. п.

Заключение

Мы рассмотрели различные вопросы, изучаемые в алгебре. Все эти вопросы объединяются одним общим направлением — изучением общих свойств действий и преобразований. Алгебра и дает аппарат изучения этих свойств. Законы действий (т. е. аксиомы, которым они подчиняются) могут быть совершенно различными, в зависимости от поставленной задачи. В соответствии с этим получаются группы, кольца, поля и т. п.

В современной алгебре рассматриваются и другие объекты, подчиненные совсем иным аксиомам (алгебры Ли, альтернативные алгебры, полугруппы и т. д.). Не следует думать, однако, что работа алгебраиста заключается в выписывании новых, произвольно взятых аксиом и выяснении их следствий. Как правило, интересные алгебраические объекты получаются не таким путем. Интересные объекты возникают при рассмотрении глубоких задач геометрии, физики, математического анализа, логики и самой алгебры. При изучении этих задач исследователь, отбрасывая второстепенное и несущественное, выделяет важное и основное и формулирует общие свойства различных объектов в виде аксиом. Таким образом, и в алгебре аксиомы имеют опытное происхождение (хотя это и не всегда может быть непосредственно замечено).

Математика учит предсказывать и управлять

Электронные вычислительные машины

Человек создает машины, чтобы облегчить труд. И они безотказно помогают шахтерам и кузнецам, колхозникам и землекопам. Но вот могут ли они принести пользу математикам, приняв на себя хотя бы часть их работы?

Еще 30—35 лет назад в ответ на такой вопрос последовало бы решительное «нет»: уж очень трудно было вообразить себе машину на поприще умственного труда!

Теперь положение изменилось. С каждым днем повышается роль науки — она стала уже непосредственной производительной силой общества. Работникам умственного труда приходится сталкиваться теперь с такими проблемами, которые для «невооруженного» мозга не только отдельного человека, но даже и целого коллектива оказываются непосильными. Если раньше для ускорения вычислений довольствовались такими простыми приспособлениями, как счеты, арифмометр, логарифмическая линейка, то теперь этого уже недостаточно. Ведь считая на арифмометре, не сделаешь в минуту больше трех действий над многозначными числами, а расчет атомного реактора включает в себя более 6 млрд. арифметических действий. Значит, на этот расчет понадобится 2 млрд. минут; а ведь первый миллиард минут с начала нашей эры истек только 29 апреля 1902 г.! Еще труднее поспевать вычислителям при запуске космических кораблей: они должны выдавать результат очень сложных расчетов почти мгновенно, пока ракета не успела еще значительно отклониться от заданной траектории.

Немало задач, превышающих возможности человеческого мозга, возникает и внутри самой математики. Как некоторые физические работы немыслимо выполнять вручную, так не могут быть решены «вмозговую» и некоторые важные проблемы из области умственного труда.

На помощь приходят электронные вычислительные машины (рис. 1, 2а, 2б).

Создать электронный арифмометр!

Электронная вычислительная машина по сравнению с простым арифмометром — это все равно что современный завод по сравнению с напильником.

Прежде всего, арифмометр и подобные ему простые вычислительные приборы слишком медлительны. Колеса с зубьями и другие механические детали чересчур инерционны и даже при использовании

Рис. 1. Общий вид электронной вычислительной машины.

Рис. 2а (верхний). Пульт управления.

Рис. 2б (нижний). Цех, управляемый при помощи этого пульта.

моторов не могут срабатывать с желательной быстротой. Вот если бы удалось заменить механические детали какими-нибудь электронными приборами, тогда работа арифмометра стала бы молниеносной. Ведь успевает же электронный луч прочертить на экране телевизора 625 строк за 0,04 секунды!

Электроника умеет заменять быстродействующими электронными лампами медлительные механические устройства. Но сразу же нужно принять во внимание одно существенное различие между зубчатым колесом и электронной лампой. Колесо с 10 зубцами имеет 10 четко фиксированных положений, которые могут быть сопоставлены с цифрами от 0 до 9. У электронной же лампы есть только два резко различных состояния: как говорят радисты, она может быть «заперта» или «открыта». Запертая лампа совсем не пропускает тока, так как на ее управляющую сетку подано достаточно большое отрицательное напряжение; открытая лампа пропускает через себя максимально возможный ток (благодаря наличию на сетке достаточного положительного потенциала). Все промежуточные состояния лампы (когда она «полуоткрыта») недостаточно устойчивы и не могут служить для изображения цифр (изменение свойств лампы с течением времени или от внешних причин привело бы к замене одной цифры другой).

Используя два резко различных состояния электронной лампы, возможно изобразить только две цифры, например: 0 (лампа заперта) и 1 (лампа открыта). Поэтому при замене зубчатых колес арифмометра электронными лампами естествен также и переход от десятичной системы нумерации к двоичной (позволяющей записать любое число в виде определенной комбинации нулей и единиц).

Двоичная нумерация

В статье «Как люди считали в старину и как писали цифры» уже говорилось, что в двоичной системе нумерации обходятся двумя цифрами: нулем и единицей. Единица каждого следующего разряда числа в двоичной записи в два раза больше единицы предыдущего разряда: две «простые» единицы составляют двойку, две двойки — четверку, две четверки — восьмерку, две восьмерки — шестнадцать и т. д.

Число «один» записывается как обычно — «1». Но число «два» составляет уже единицу второго разряда и потому записывается так: «10» (одна двойка и

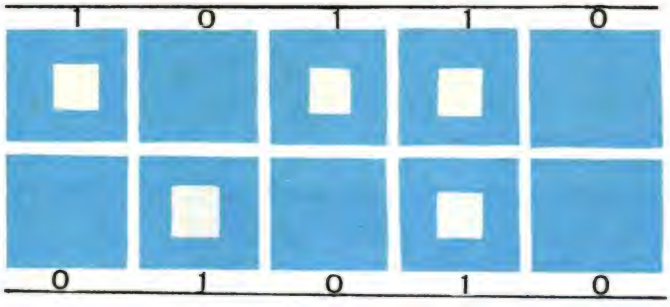


Рис. 3. Числа «10110» и «01010» на перфокарте.

нуль единиц). Число «три» изображается: «11» (одна двойка и одна единица). Число «четыре» представляет собой единицу третьего разряда и потому записывается: «100» (одна четверка, нуль двоек и нуль единиц). Дальнейшие числа в двоичной записи имеют вид:

пять — «101» (одна четверка, нуль двоек и одна единица),

шесть — «110» (одна четверка, одна двойка и нуль единиц),

семь — «111» (одна четверка, одна двойка и одна единица),

восьмерка — это опять новый разряд — «1000» (нули показывают на отсутствие четверок, двоек и единиц); далее идут:

девять — «1001» (одна восьмерка и одна единица),

десять — «1010» (одна восьмерка и одна двойка),

одиннадцать — «1011» (т. е. $8+2+1$),

двенадцать — «1100» (т. е. $8+4$),

тринадцать — «1101» (т. е. $8+4+1$) и т. д.

Вот перед нами «загадочное» число:

$$1001011,$$

записанное в двоичной нумерации. Его легко «разгадать», подписав (справа налево) под каждым разрядом его значение:

1	0	0	1	0	1	1
(64)	(32)	(16)	(8)	(4)	(2)	(1)

Как видим, заинтересовавшее нас число складывается из единицы, двойки, восьмерки и шестидесяти четырех ($1+2+8+64$). Очевидно, оно равно 75. Читатель, вероятно, теперь уже сам сможет определить, что двоичная запись 10110011 есть число 179.

Одно из преимуществ двоичной записи — удобство изображения чисел разнообразными средствами и быстрой передачи их из одного места в другое. Например, пробитый квадратик особой картонной карточки (ее называют перфокартой) может изображать единицу, а целый — нуль (рис. 3). Поместив перфокарту между пружинящими контактами электрической цепи (рис. 4), мы получим в ней ток, если в данном квадратике записана единица (контакты замкнутся через отверстие), и наоборот: если в данном квадратике записан нуль, тока в цепи не будет (рис. 5), так как картонная прокладка изолирует контакты друг от друга.

Кратковременный электрический ток принято называть электрическим импульсом. Как видим, любое число, записанное по двоичной системе, легко может быть выражено последовательностью электрических импульсов, причем наличие импульса в определенный момент времени означает единицу, а отсутствие его — нуль. Впрочем, иногда предпочитают изображать нуль не отсутствием импульса, а импульсом тока, идущего в противоположном направлении (в этом случае не обязательно уже выдерживать строго определенные промежутки времени между импульсами). Продолжительность импульса может быть очень малой, скажем в одну микросекунду (т. е. миллионную долю секунды), что дает возможность передать даже многозначное число почти мгновенно.

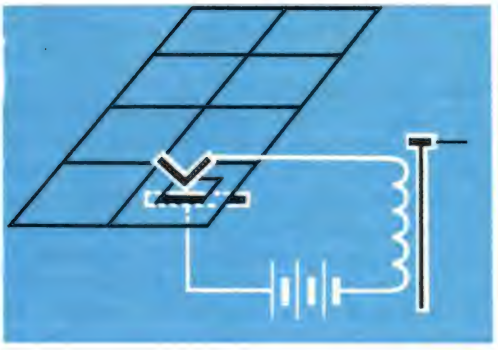


Рис. 4.

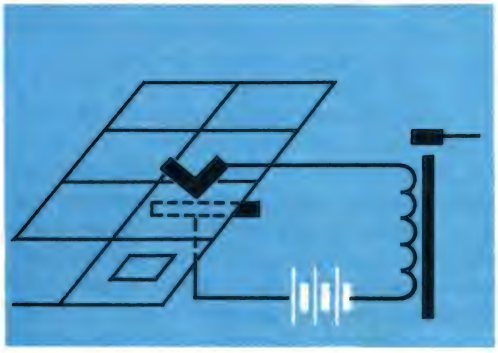


Рис. 5.

Считают лампы

Арифметика чисел в двоичной записи очень проста. Вся таблица умножения сводится к четырем простейшим произведениям:

$$0\times0=0,\ 1\times0=0,$$
$$0\times1=0,\ 1\times1=1,$$

а таблица сложения — к четырем столь же простым суммам. Не правда ли, это не особенно далеко выходит за пределы прославленных познаний Митрофанушки из комедии Фонвизина?

Нетрудно придумать прибор, который будет выполнять умножение согласно этой таблице. Проще всего использовать для этой цели последовательное соединение двух электронных ламп (рис. 6). Цифры сомножителей изображаются короткими импульсами электрического напряжения: единица — положительным, а нуль — отрицательным. Импульс первого сомножителя подается на сетку одной лампы, а импульс второго сомножителя — на сетку другой.

При перемножении двух единиц обе лампы отпираются соответствующими этим единицам положительными импульсами напряжения, и в их общей анодной цепи идет ток. Импульс этого тока как раз и изображает «на электронном языке» единицу произведения ($1 \times 1 = 1$).

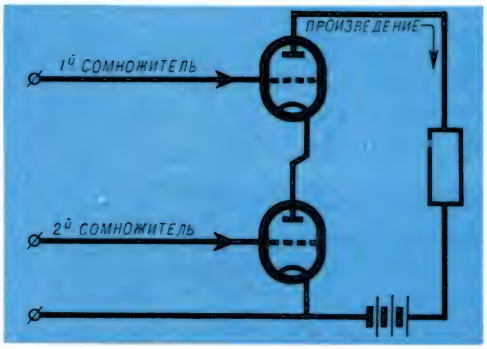
Если же хотя бы один из сомножителей — нуль, соответствующая лампа заперта отрицательным напряжением на ее сетке, и никакого импульса тока в анодной цепи не будет. А это как раз и является выражением нулевого значения произведения — в полном соответствии с формулами:

$$1 \times 0 = 0,\ 0 \times 1 = 0,\ 0 \times 0 = 0.$$

Как видим, «электронное перемножение» однозначных чисел осуществляется очень просто. Для многозначных сомножителей схему приходится, конечно, значительно усложнить, но нас интересует сейчас только принципиальная сторона дела, а не технические подробности. Подобно тому как подходящая комбинация зубчатых колес в арифмометре дает возможность выполнять арифметические действия, надлежащее сочетание электронных ламп позволяет производить эти действия над числами, заданными в виде последовательности электрических импульсов. Их можно «электронным способом» складывать, вычитать, умножать, делить, сравнивать между собой (определяя, которое из них больше) и т. д. Любое из этих действий осуществляется очень быстро, так как электронные лампы практически безынерционны. Еще бóльшие возможности открывают появившиеся недавно различные заменители электронных ламп: полупроводниковые, ферритовые, сверхпроводящие и иные приборы.

Итак, налицо реальная возможность создать электронный арифмометр, способный выполнять любое арифметическое действие, скажем, за микросекунду. Но это еще далеко не электронная вычислительная машина, а только быстродействующий арифмометр, практическое значение которого очень

Рис. 6. Электронный перемножитель.



невелико. Как вы думаете, сколько действий можно было бы выполнить на таком арифмометре в секунду? Миллион? Или хотя бы тысячу?

Это зависит, конечно, от того, сумеем ли мы достаточно быстро задавать этому арифмометру задачи и записывать получающиеся результаты. Ведь если мы будем все это проделывать вручную, то больше 3—4 действий в минуту выполнить не удастся. Фантастическое быстродействие арифмометра окажется совершенно бесполезным.

Чтобы электронный арифмометр действительно выполнял за каждую секунду хотя бы несколько тысяч действий, необходимо полностью автоматизировать весь вычислительный процесс, совершенно исключив из него участие человека. Электронная вычислительная машина — это не просто быстродействующий арифмометр, а быстродействующий арифмометр плюс электронный автомат, который заменяет человека, работающего на арифмометре.

Чтобы легче понять, как может быть такой автомат создан, присмотримся к работе человека-вычислителя в вычислительном бюро, не располагающем электронной вычислительной машиной.

Обязанности вычислителя

Вычислитель должен иметь образование в объеме средней школы и уметь хорошо обращаться с простейшими вычислительными приборами (например, с арифмометром). Совсем не обязательно, чтобы вычислитель понимал научную или инженерную суть тех расчетов, которые ему поручены. Весь план расчета составляется учеными или конструкторами, а вычислителю дается только список исходных данных и специальная инструкция, определяющая порядок действий. Согласно этой инструкции он и

действует, при этом все арифметические операции выполняются на арифмометре, промежуточные результаты записываются на специальном бланке, а окончательные заносятся в другой бланк.

Простейший пример — составление таблицы значений площади круга в зависимости от его радиуса (по формуле $S=\pi R^2$). В инструкции указывается, что каждое значение радиуса (скажем, от 500 до 1000 мм через каждые 2 мм) следует умножить само на себя и на $\pi \approx 3{,}14$ с занесением полученного результата в соответствующую графу таблицы.

К чему сводятся действия вычислителя? Прочитав в инструкции наименьшее значение радиуса (500), он устанавливает его на арифмометре, умножает сперва на точно такое же число, а потом на 3,14. Прочитав на арифмометре полученное произведение, вычислитель переносит его вместе со значением радиуса 500 в таблицу окончательных результатов. Далее вычислитель должен прибавить 2 мм к прежнему значению радиуса, записать полученное новое (наращенное) значение радиуса в свой бланк и повторить с этим новым значением все ранее описанные действия. Когда в результате многократного повторения указанных операций он дойдет до значения радиуса 1002, превышающего установленный инструкцией верхний предел (1000), вычисления следует прекратить.

Как видим, собственно вычислений, т. е. арифметических действий над числами, человек не производит: они выполняются арифмометром. На долю вычислителя остается управление работой арифмометра, перенос числовых данных из инструкции или своего бланка на арифмометр и с арифмометра в таблицу результатов, а также «записывание» или, если угодно, «запоминание» необходимых промежуточных результатов. Чтобы полностью исключить участие человека в вычислительном процессе, нужно создать автомат, который самостоятельно выполнял бы все эти действия в соответствии с данной ему инструкцией.

Возможен ли такой автомат?

Работа автомата по инструкции не таит в себе, конечно, ничего сверхъестественного или непостижимого. «Умеет» же аппаратура АТС безошибочно выполнять команды, которые мы посылаем ей набором телефонного номера. Нужно только, чтобы каждая команда была выражена на языке, доступном «пониманию» машины, например в виде определенной последовательности импульсов электрического тока.

Когда требуется длительная работа аппаратуры в соответствии с инструкцией, включающей множество команд, эту инструкцию следует тем или иным способом записать. Для хранения информации, выраженной электрическими импульсами, можно использовать, например, магнитофон: комбинации электрических импульсов могут быть зафиксированы путем намагничивания участков магнитофонной ленты точно таким же способом, как это делают в звукозаписи. Впоследствии записанные команды по мере их воспроизведения будут управлять действиями автоматической аппаратуры. Записанную тем или иным способом инструкцию, которой должен «руководствоваться» автомат, принято называть *программой*.

На таких же магнитофонных лентах может быть записана не только инструкция, но и таблица исходных данных: ведь цифры, с которыми оперирует электронная вычислительная машина, тоже изображаются электрическими импульсами.

Первоначальный ввод в вычислительную машину исходных данных, а также команд программы может осуществляться с помощью специальной клавиатуры, вроде той, которая используется в телеграфных аппаратах: нажал клавишу — замкнулись контакты, и по цепи побежала определенная комбинация импульсов электрического тока (в телеграфии она приводит в действие буквопечатающий аппарат, находящийся в другом городе, а в вычислительной машине намагничивает ленту магнитофона).

Электрические импульсы, выражающие окончательный результат вычислений, могут воздействовать на электромагниты печатающего аппарата (наподобие телеграфного), в результате чего мы получаем интересующие нас данные в форме обычной телеграммы.

Как видим, в современной технике нетрудно найти прообразы всех устройств, которые необходимы для полной автоматизации вычислительного процесса. Они нуждаются только в дальнейшем усовершенствовании для повышения их быстродействия и надежности.

Напомним, что осмысливание и понимание выполняемых расчетов в обязанности вычислителя не входят: это дело «заказчика», который задумал расчет и воплотил свой замысел в инструкцию. Но, конечно, на практике внимательный и квалифицированный вычислитель не бывает вполне равнодушным к тому, что́ он делает; в частности, он может заметить и даже исправить грубые ошибки в инструкции, восполнить случайные пробелы и т. д.

От машины (в отличие от человека) при решении ею задач нельзя, разумеется, ожидать никакой «сообразительности», основанной на понимании существа дела. Поэтому инструкция для машины должна быть составлена в такой форме, которая заранее исключала бы всякую двусмысленность, сомнения и необходимость руководствоваться здравым смыслом. Такого рода инструкция — свод четко сформулированных правил, применимых к достаточно широкому классу задач и всегда приводящих к определенному результату, в математике называется *алгоритмом*. Мы все изучали в средней школе алгоритм деления «уголком», алгоритм извлечения квадратного корня из многозначного числа и т. д. Действие любой современной вычислительной машины состоит в том, что она с педантичной точностью и аккуратностью выполняет последовательные предписания того или иного алгоритма, например алгоритма решения дифференциального уравнения или алгоритма перевода текста с английского языка на русский.

Категорический характер предписаний, которые составляют алгоритм, вовсе не означает, что вся последовательность действий машины во всех деталях заранее известна составителю данного алгоритма. Ведь категорическое предписание может иметь и такую форму: «Если в результате деления получится число меньше тысячи, увеличить его в два раза, а если получится частное не меньше тысячи — прибавить к нему восемьдесят три». Что будет делать машина фактически — умножать на 2 или прибавлять 83, этого составитель алгоритма заранее не знает, так как ему не известно, какое получится частное.

Про такой алгоритм говорят, что он предусматривает *условный переход* к выполнению той или иной последовательности операций в зависимости от результатов уже выполненных действий. Как мы увидим в дальнейшем, такие условные переходы играют огромную роль в работе электронных вычислительных машин, в значительной степени определяя их гибкость и возможность применения к решению весьма сложных математических и логических задач.

Главные части машины

Быстродействующая ЭВМ состоит из пяти основных устройств: вводного, запоминающего, арифметического, выводного и управляющего. Кроме того, имеется дополнительное устройство для контроля работы и обнаружения неисправностей.

Рис. 7 (верхний).
Ввод перфокарт.

Рис. 8 (нижний).
Запоминающее устройство на магнитных лентах.

Вводное устройство имеет обычно клавиатуру, посредством которой в машину вводятся исходные данные и задается определенная программа. Электрические импульсы, возникающие при нажатии на клавиши, направляются в запоминающее устройство. Возможны и иные конструкции устройства ввода (рис. 7).

Запоминающее устройство (или «память» машины, как его иногда для краткости называют) предназначено для хранения информации: исходных данных, числовых величин, команд программы, промежуточных и окончательных результатов (рис. 8). Оно играет роль памяти или записной книжки вычислителя.

Рис. 9а (верхний). Алфавитно-цифровое печатающее устройство.

Рис. 9б (нижний). Выданный с него результат.

Рис. 10. Пульт управления ЭВМ.

Как уже было сказано, числовые данные могут записываться с помощью магнитофонов; но этот способ не самый совершенный, так как для воспроизведения ранее записанного числа может потребоваться длительная перемотка ленты. Поэтому разработаны другие способы «запоминания»: например, путем намагничивания ферритовых сердечников или же электризации отдельных участков диэлектрического экрана электроннолучевой трубки. Удобство последнего метода состоит в том, что для записи или воспроизведения числа электронный луч может быть направлен в нужную точку экрана практически мгновенно.

Носитель информации запоминающего устройства (магнитофонная лента, диэлектрический экран) состоит из множества «ячеек памяти», в каждой из которых может храниться одно многозначное число.

Каждой ячейке присвоен номер (наподобие телефонного); по этому номеру с ней можно в любой момент «соединиться», чтобы поместить туда или, наоборот, «истребовать» оттуда соответствующее число.

Арифметическое устройство служит для выполнения основных арифметических и некоторых логических действий. Оно содержит несколько электронных «арифмометров» (осуществляющих сложение, умножение и т. д.). Такие арифмометры чаще всего строятся на основе современных заменителей электронных ламп, что делает их более совершенными. В быстродействующих машинах каждая операция выполняется арифметическим устройством за десяток микросекунд.

Выводное устройство предназначено для выдачи заказчику готовой продукции в виде таблицы окончательных результатов произведенного расчета, отпечатанной обычным шрифтом с помощью цифропечатающего (см., например, рис. 9а) «телеграфного аппарата» под влиянием электрических импульсов, поступающих из запоминающего устройства. Для ускорения вывода результатов вместо печатания иногда применяют фотографирование их на кинопленку.

Управляющее устройство связывает воедино отдельные части вычислительной машины и «управляет», или «руководит», всем ходом вычислительного процесса; именно оно выполняет роль вычислителя. Во время работы машины управляющее устройство, действуя согласно программе, последовательно осуществляет все необходимые соединения и пере-

ключения, «отпирает» и «запирает» лампы, управляет движением электронных лучей и магнитофонных лент. Благодаря этому обеспечивается правильное размещение в ячейках памяти вводимых в машину исходных данных, своевременная передача чисел из определенных ячеек на те или иные «арифмометры» арифметического устройства, а также направление получающихся результатов в предназначенные для них ячейки. Наконец, по мере накопления окончательных результатов в ячейках памяти управляющее устройство «соединяет» их с печатающими аппаратами. На рис. 10 показан пульт управления.

Как видим, по своим функциям управляющее устройство вычислительной машины во многом напоминает автоматическую телефонную станцию, но оно должно делать сотни тысяч различных соединений в секунду! Кроме того, в отличие от АТС, управляющее устройство должно действовать не в соответствии с только что набранным номером, а по заранее заданной программе, которая (в зашифрованном виде) хранится в специально для этого отведенных ячейках памяти.

Инструкция для машины

Программа работы электронной вычислительной машины для решения определенной задачи составляется специалистами и через вводное устройство «вводится» в машину перед началом вычислений.

Программа представляет собой последовательность отдельных «команд». Каждая команда состоит из указания определенного арифметического действия (сложение, вычитание, умножение и т. д.), номеров (или «адресов») тех ячеек памяти, откуда следует взять числа, над которыми должно быть произведено действие, а также номера (или «адреса») ячейки, куда должен быть помещен полученный результат.

Каждое арифметическое действие условно обозначается числом — «кодом», хотя бы так: сложение — «1», вычитание — «2», умножение — «3» и т. д. Адреса ячеек памяти также обозначаются номерами, например: № 20, № 21, № 22, В целом вся команда записывается в виде одного многозначного числа, в котором на первом месте стоит код действия, на втором и третьем местах — адреса чисел, над которыми надо совершать это действие, а на последнем (четвертом) месте — адрес ячейки, куда должен быть направлен полученный результат. Так, например, команда 3-21-26-52 предписывает перемножить числа, взятые из ячеек № 21 и 26, и поместить произведение в ячейку № 52. Такие команды называются трехадресными. Возможны команды и с иным числом адресов.

Рис. 11. Размещение исходных данных.

№19	№20	№21	№22	№23
	3,14	500	1000	2

Поскольку команды управления машиной записываются многозначными числами, они наравне с другими числами могут быть помещены в ячейки запоминающего устройства: первая — в ячейку № 1, вторая — в ячейку № 2 и т. д.

Помимо арифметических команды могут задавать машине и некоторые другие действия, скажем: «Сравнить два числа», «Отпечатать число, хранящееся в такой-то ячейке памяти, в такую-то графу таблицы».

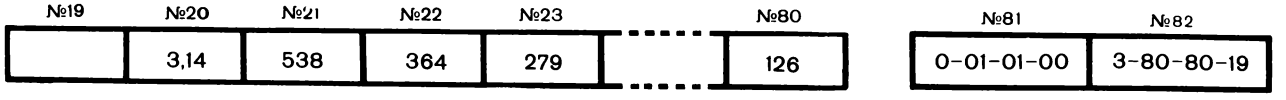
Составление программы и работа управляющего устройства лучше всего разъясняются на каком-нибудь простеньком примере. Рассмотрим для этой цели составление таблицы значений площади круга, о которой мы уже говорили, описывая работу вычислителя.

Программа для выполнения соответствующих вычислений имеет такой вид:

Номер команды	Шифр команды	Действие по команде
1	3-21-21-19	Умножение
2	3-19-20-19	Умножение
3	7-21-00-01	Печатание
4	7-19-00-02	Печатание
5	1-21-23-21	Сложение
6	8-21-22-01	Сравнение
7	9-00-00-00	Остановка

Как видим, программа состоит всего из семи команд, которые перед началом работы при помощи вводного устройства размещают в ячейки памяти с адресами от № 1 до № 7. Помимо программы в машину вводятся еще и необходимые исходные данные (рис. 11): в ячейку № 20 — число $\pi = 3{,}14$; в ячейку № 21 — наименьшее значение радиуса (500), с которого должна начинаться таблица; в ячейку № 22 — наибольшее значение радиуса (1000); в ячейку № 23 — число 2, показывающее, что значения радиуса надо брать через каждые 2 мм; ячейка № 19 будет использоваться для записи в нее промежуточных результатов.

Рис. 12. Числа в «машинной памяти».



Исполнение программы

После запуска машина будет выполнять команды в той последовательности, в какой они размещены в ячейках.

Согласно *первой* команде (3-21-21-19) начальное значение радиуса (500), хранящееся в ячейке № 21, будет умножено само на себя, а полученное произведение (квадрат радиуса) помещено в свободную пока что ячейку № 19.

Согласно *второй* команде (3-19-20-19) это произведение (R^2) будет умножено на число π, хранящееся в ячейке № 20, с помещением результата в ячейку № 19 (при этом ранее записанное там число автоматически стирается, подобно старой фонограмме при записи звука на магнитофоне).

Согласно *третьей* команде (7-21-00-01) значение радиуса из ячейки № 21 будет отпечатано печатающим аппаратом № 1, заполняющим первую графу таблицы.

Согласно *четвертой* команде (7-19-00-02) печатающим аппаратом № 2 во второй графе таблицы будет отпечатано соответствующее значение площади круга, взятое из ячейки № 19.

Последующие команды служат для перехода к вычислению площади круга для новых значений радиуса или для окончания работы, когда все требуемые значения уже исчерпаны.

Согласно *пятой* команде (1-21-23-21) к старому значению радиуса (500) прибавляется 2, причем полученный результат (новое значение радиуса 502) направляется в ту же ячейку № 21, где находилось прежнее значение радиуса.

Согласно *шестой* команде (8-21-22-01) производится сравнение двух чисел с адресами № 21 и 22. Если первое из них меньше второго или равно ему, то машина возвращается к выполнению команды № 1, указанной в третьем адресе, в противном же случае она просто переходит к выполнению следующей (очередной) команды. В нашем случае новое значение радиуса (из ячейки № 21) сравнивается с наибольшим его значением, для которого еще нужно вычислять площадь круга. Если новое значение радиуса не больше 1000, машина проделывает над ним те же самые вычисления начиная с первой команды и, таким образом, заполняет еще одну строку таблицы. Если же новое значение радиуса больше 1000, то машина переходит к выполнению *седьмой* команды, согласно которой она попросту останавливается с подачей на пульт управления сигнала об окончании вычислений.

В работе вычислительной машины команда сравнения «6» и другие подобные ей команды «условного перехода» имеют исключительное значение. Они увеличивают гибкость машины, расширяют ее возможности и позволяют выполнять действия, для которых она на первый взгляд вовсе не приспособлена.

Многократное повторение одной и той же последовательности действий позволяет производить длинные вычисления по сравнительно короткой программе (иначе ведь составление программы и введение ее в машину потребовало бы, пожалуй, не меньше времени, чем вычисления вручную). Еще эффективнее другой прием сокращения программы, который состоит в систематической переработке ее в процессе самих вычислений. Ведь все команды программы изображаются числами, хранящимися в запоминающем устройстве на равных правах с исходными данными и промежуточными результатами. Ничто не мешает нам производить над этими числами арифметические действия и тем самым превращать одни команды в другие. Конечно, все эти преобразования команд на определенном этапе вычислений или при получении определенных результатов должны быть заранее предусмотрены самой программой (подобно тому как устав всякой общественной организации в числе других правил содержит обычно также и правила изменения самого устава).

Программа с преобразованиями

Допустим, что значения площади круга нужно определить только для некоторых ранее вычисленных значений радиуса, — скажем, записанных в ячейках памяти № 21—80 (рис. 12). Тогда, как и прежде, в ячейку № 20 помещаем π, а в ячейки № 81 и 82 — специальные числа 0-01-01-00 и 3-80-80-19, значение которых выяснится в дальнейшем.

Вычисления будем вести по следующей программе:

Номер команды	Шифр команды	Действие по команде
1	3-21-21-19	Умножение
2	3-19-20-19	Умножение
3	7-19-00-02	Печатание
4	1-01-81-01	Сложение
5	8-01-82-01	Сравнение
6	9-00-00-00	Остановка

По *первой* команде вычисляется квадрат первого значения радиуса (из ячейки № 21), который затем по *второй* команде умножается на π. По *третьей* команде вычисленное значение площади круга заносится в таблицу окончательных результатов.

Теперь нужно повторить те же самые операции, но уже над новым значением радиуса, хранящимся не в 21-й, а в 22-й ячейке. Для этого можно было бы включить в программу в качестве четвертой команды 3-22-22-19 (возвести новое значение радиуса в квадрат) с последующим повторением второй и третьей команд без изменения. Затем должна следовать команда 3-23-23-19 (возвести в квадрат значение радиуса из ячейки № 23) и т. д.

При большом количестве различных значений радиуса программа получалась бы очень громоздкой. Легко сообразить, что вводимые вновь команды 3-22-22-19, 3-23-23-19,... могут быть получены из первой команды 3-21-21-19 последовательным прибавлением к ней числа 0-01-01-00, хранящегося в ячейке № 81:

$$\begin{array}{r} 3\text{-}21\text{-}21\text{-}19 \\ +\ 0\text{-}01\text{-}01\text{-}00 \\ \hline 3\text{-}22\text{-}22\text{-}19 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 3\text{-}22\text{-}22\text{-}19 \\ +\ 0\text{-}01\text{-}01\text{-}00 \\ \hline 3\text{-}23\text{-}23\text{-}19 \end{array} \text{ и т. д.}$$

Таким образом, посредством арифметических действий над числом, изображающим команду, может быть осуществлено систематическое изменение ее адресов (в данном случае первого и второго), а если потребуется, то и кода действия. Такая операция изменения адреса (называемая *переадресацией*) как раз и осуществляется по *четвертой* команде рассматриваемой программы. При этом число, изображающее новую (переадресованную) команду, направляется в ту же ячейку № 1, где хранилась исходная команда (переадресованную команду можно было бы поместить и в другую ячейку памяти).

По *пятой* команде выполняется сравнение переадресованной команды (числа) из ячейки № 1 с командой 3-80-80-19, специально введенной для этого в ячейку № 82. Пока первый и второй адреса переадресованной команды не больше 80 (использованы еще не все значения радиуса, хранящиеся в ячейках № 21—80), согласно команде сравнения осуществляется возврат к началу программы, т. е. к исполнению переадресованной первой команды. Когда же все значения радиуса будут исчерпаны, команда примет вид 3-81-81-19, т. е. превзойдет число в ячейке № 82, и по команде сравнения машина перейдет к выполнению следующей (*шестой*) команды, означающей остановку.

Универсальность машины

Как уже было сказано, преобразование программы в ходе ее выполнения наряду с периодическим повторением ее частей и другими приемами неизмеримо расширяет возможности вычислительной машины, позволяя решать на ней даже сложнейшие задачи высшей математики, хотя арифметическое устройство машины способно выполнять только четыре арифметических действия да несколько простейших логических операций.

Секрет современной вычислительной машины заключается не в ее элементах, какими бы чудесными они ни представлялись, а в их очень гибкой и сложной взаимосвязи, которая молниеносно меняется в соответствии с заданной программой. Вводя в одну и ту же машину различные программы, можно заставить ее решать самые разнообразные задачи из очень далеких друг от друга областей умственного труда. В зависимости от программы одна и та же машина способна вычислять траекторию космического корабля, предсказывать погоду, играть в шахматы, управлять работой железнодорожного узла и переводить книги с английского языка на русский. Именно это и делает электронную машину универсальным средством автоматизации умственного труда, средством, без применения которого столь характерные для нашей эпохи стремительные темпы научно-технического прогресса были бы невозможны.

Благодаря применению электронных машин удается отделить творческий процесс *нахождения* общих принципов решения той или иной проблемы от кропотливого и механического *осуществления* этих принципов. Чем бóльшая доля механической умственной работы возложена будет на машины, тем больше времени и сил сможет уделить исследователь действительно научному творчеству.

Как выяснилось, составление программ вычислений тоже заключает в себе немалую долю формальных, механических операций. Составитель програм-

Рис. 13. Что значит «коса»?

plait	tongue of land	scythe
Zopf	Lándzunge	Sénse
tresse	langue de terre	faux

мы должен не только придумать общий план (или логическую схему) решения задачи (что является актом творчества), но также и кропотливо расписать во всех подробностях все последовательные шаги машины (для чего достаточно лишь с педантической аккуратностью придерживаться определенных правил). Для ускорения естественно разделить эти две различные по своему характеру задачи: творческий поиск логической схемы оставить за человеком, а механическую работу детального расписывания команд возложить на саму электронную машину. Для этой цели составлены так называемые *программирующие программы*, на основе которых сама вычислительная машина автоматически преобразует введенную в нее человеком логическую схему в детально разработанную программу. Тем самым объем работы программиста сокращается во много раз.

Логическая схема программы записывается человеком не в виде последовательности знакомых уже нам «команд», а на более привычном и лаконичном «языке» математической символики, т. е. посредством обычных формул лишь немного измененного начертания с отдельными дополнительными пояснениями. При отсутствии у машины специальной клавиатуры для ввода математических символов и букв каждый из этих знаков предварительно кодируется числом вручную.

Ведется большая работа по созданию универсального языка программирования, посредством которого каждый мог бы (после самого краткого обучения) самостоятельно писать логические схемы программ, вполне пригодные для непосредственного введения их в машину (снабженную раз и навсегда установленной программирующей программой). Это позволило бы вообще исключить малопроизводительный процесс программирования вручную. Один из вариантов такого универсального языка известен под условным названием «алгол».

Другой широко применяемый метод экономии труда и времени при программировании состоит в использовании *библиотеки стандартных подпрограмм*. В такой библиотеке хранятся составленные заранее программы для самых различных вычислений, встречающихся на практике. В числе их может быть, например, решение кубического уравнения или вычисление определенного интеграла. Когда такого рода вычисление встретится при решении конкретной задачи, машина сама «выпишет» из библиотеки необходимую для этого последовательность команд, достаточно только одного лаконичного упоминания об этом в соответствующем месте основной программы решения рассматриваемой задачи.

Такой метод тоже значительно повышает производительность труда при программировании.

Без далеко идущей автоматизации программирования решение очень многих важных задач на электронных машинах было бы практически невозможным, так как составление соответствующих программ потребовало бы чересчур много времени.

Универсальность электронных вычислительных машин свидетельствует о том, что даже самые несхожие между собой виды умственного труда могут быть разложены на одни и те же элементарные шаги, но только расположенные в иной последовательности и выполняемые над другим исходным материалом. Именно это обстоятельство делает возможным единый подход к проблеме автоматизации всех видов умственного труда. Изучение тех общих закономерностей автоматизации умственного труда, которые не зависят от конкретных особенностей различных его видов, составляет одну из очень важных и интересных задач молодой науки кибернетики (см. ст. «Что такое кибернетика?»).

Чтобы наглядно показать универсальность электронной вычислительной машины и единство резко различных по своему характеру видов умственного труда, попробуем хотя бы вкратце пояснить, каким образом «умудряется» машина переводить книги с одного языка на другой.

Автоматический перевод

Английский текст для перевода вводится в запоминающее устройство, причем каждая буква изображается определенной комбинацией электрических импульсов. Кроме того, в память машины записываются словарь, грамматические таблицы и программа автоматического перевода.

Прежде всего машина отыскивает в словаре для каждого английского слова его русский эквивалент. Для нее это ничуть не сложнее, чем отыскать в триго-

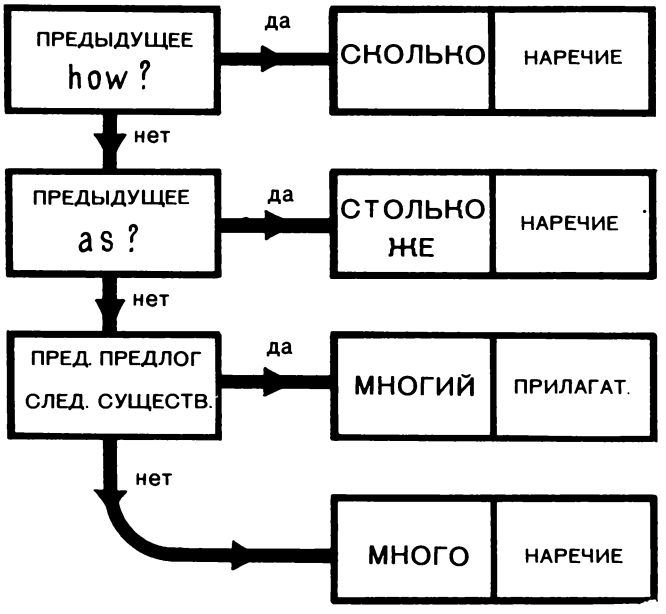


Рис. 14. Анализ слова many.

нометрической таблице для заданного угла значение его косинуса. Но очень значительные трудности возникают при этом всякий раз, когда одно и то же английское слово, подобно, например, русскому слову «коса» (рис. 13), имеет несколько различных значений. Переводчик обычно выбирает одно из этих значений, наиболее подходящее по смыслу, машина же может руководствоваться только формальными правилами, которые должны быть ей заранее заданы. Поэтому для всякого многозначного слова в машинном словаре дается не перевод, а команда-ссылка — проанализировать это слово по специальной программке. Программка эта представляет собой последовательность вопросов, ответы на которые позволяют раскрыть смысл слова. Покажем, как это делается, на примере английского слова many.

Когда в предложении встречается это слово, машина его сначала пропускает и переводит все остальные. Но затем она обязательно возвращается к слову many и приступает к последовательному исполнению команд программки его анализа (рис. 14).

Первая команда этой программки гласит: проверить предыдущее слово, не является ли оно словом how. Если да — машина дает перевод «сколько», потому что сочетание how many всегда имеет именно такое значение.

Если же нет — машина переходит к следующей проверке: не является ли предыдущее слово словом as.

Если да — перевод будет «столько же», потому что таков смысл сочетания as many.

Если нет — машина должна проверить, не является ли предыдущее слово предлогом, а последующее — существительным.

Совершенные числа

Число 6 делится на себя, а также на 1, 2 и 3, причем $6=1+2+3$.

Число 28 имеет пять делителей кроме самого себя: 1, 2, 4, 7 и 14, причем, аналогично, $28=1+2+4+7+14$.

Конечно, далеко не всякое натуральное число равно сумме всех его делителей, исключая его самого. Числа, которые обладают этим свойством, математиками Древней Греции были названы совершенными.

Каждое такое число обозначим символом V_n, где n — номер совершенного числа.

Тогда первое, самое меньшее совершенное число $V_1=6$.

Может быть, именно поэтому шестое место считалось самым почетным на пирах у древних римлян.

Второе по старшинству совершенное число $V_2=28$. В некоторых ученых обществах и академиях полагалось иметь 28 членов. Почти до наших дней дожила эта традиция, идущая из далеких эпох. В Риме в 1917 г. при выполнении подземных работ обнаружилось помещение одной из древнейших академий: зал и вокруг него 28 кабинетов — как раз по числу членов академии.

Лев Николаевич Толстой не раз бывало шутливо «хвастался» тем, что дата его рождения (28 августа по календарю того времени) является совершенным числом. Год рождения Л. Н. Толстого (1828) — тоже интересное число: последние две цифры (28) образуют совершенное число; если переставить две цифры, то получится

$$V_4=8128,$$

четвертое совершенное число.

Третье совершенное число —

$$V_3=496,$$

причем $496=1+2+4+8+16+31+62+124+248$.

Первые четыре совершенных числа:

6, 28, 496, 8128 —

были обнаружены 2000 лет назад.

Пятое совершенное число —

$$V_5=33\,550\,336$$ —

было выявлено лишь 500 лет назад.

В настоящее время зарегистрировано пока 23 совершенных числа, причем начиная с тринадцатого все были обнаружены с помощью электронных вычислительных машин. Например, восемнадцатое совершенное число состоит из 1937 цифр и имеет следующий вид:

$$V_{18}=2^{3216}\,(2^{3217}-1).$$

В 1965 г. найдено

$$V_{23}=2^{11212}(2^{11213}-1),$$

остающееся пока наибольшим совершенным числом.

Такая проверка легко осуществима, так как большинство слов предложения уже переведено, а перевод содержит все необходимые грамматические сведения, выписываемые вместе с самими словами из словаря.

При положительном ответе (да) машина должна будет записать перевод «многий», при отрицательном (нет) — «много». Особенно существенно здесь то, что в первом случае слово «многий» — это прилагательное с мягким окончанием, а во втором («много») — неизменяемое наречие.

Когда все переводы для всех (в том числе и многозначных) слов найдены и зафиксированы в запоминающем устройстве, машина начинает оформлять их в соответствии с правилами русской грамматики.

В частности, прилагательное «многий» должно быть поставлено в нужном падеже, роде и числе. Род, падеж и число прилагательного обычно определяются тем *русским* существительным, перед которым оно стоит. В свою очередь род русского существительного при переводе был выписан из словаря, число определено по окончанию английского слова, а падеж выяснен при анализе по предыдущему предлогу или глаголу.

На основании этих данных машина заменяет в слове «многий» окончание «-ий» другим, которое берется из грамматических таблиц для прилагательных с мягкими окончаниями (такие таблицы, как и словарь, тоже хранятся в машинной памяти). Следующий этап включает в себя обработку перевода по правилам синтаксиса и определение порядка слов.

После того как синтез русского предложения закончен, перевод передается в выводное устройство, которое и печатает его русскими буквами на бумаге (если какого-нибудь английского слова машина в своем словаре не нашла, она впечатывает его в текст перевода латинскими буквами).

Пока что автоматический перевод книг практического применения не нашел — нужна еще большая предварительная работа, которая может быть выполнена только совместными усилиями филологов, математиков и инженеров. Однако успех даже первых, пускай еще примитивных опытов в этом направлении еще раз подтверждает, что область применения электронных вычислительных машин не ограничивается одними математическими вычислениями.

Электронные вычислительные машины должны быть, без всякого сомнения, отнесены к числу наиважнейших факторов научно-технического прогресса.

Решения и ответы

Решение к стр. 359.

Пусть одна дробь $\frac{a}{b}$, а другая $\frac{ka}{b}$, тогда по условию

$$\frac{a^2}{b^2}(1+k^2)=\frac{a^3}{b^3}(1+k^3),$$

или

$$1+k^2=\frac{a}{b}(1+k^3),$$

откуда $\frac{a}{b}=\frac{1+k^2}{1+k^3}$;

полагая $k=2$, получаем:

$$\frac{a}{b}=\frac{5}{9}$$

и, следовательно,

$$\left(\frac{5}{9}\right)^2+\left(\frac{10}{9}\right)^2=\left(\frac{5}{9}\right)^3+\left(\frac{10}{9}\right)^3$$

Полагая $k=3$, получаем:

$$\frac{a}{b}=\frac{1+9}{1+27}=\frac{5}{14}$$

и, следовательно,

$$\left(\frac{5}{14}\right)^2+\left(\frac{15}{14}\right)^2=\left(\frac{5}{14}\right)^3+\left(\frac{15}{14}\right)^3$$

и т. д. Конечно, k можно давать и дробные значения, например для $k=\frac{3}{2}$ получим:

$$\frac{a}{b}=\frac{26}{35}.$$

Что такое кибернетика

Управляющие системы

Одно из важнейших понятий современной науки — понятие *управляющей системы*. С разнообразными управляющими системами мы встречаемся в технике, в растительном и животном мире, в человеческом обществе.

Пример технической управляющей системы — примитивный поплавочный регулятор уровня воды (рис. 1). Задача его — поддерживать постоянный уровень жидкости в сосуде. Регуляторы подобного типа употребляются, например, в простейших паровых котлах.

В этом примере управляющая система состоит из поплавка, рычага и пробки. Эта система заключает в себе все основные черты гораздо более сложных управляющих систем. Действительно; любая из них должна иметь прежде всего *чувствительный элемент*, или *вводное устройство* (в данном случае — поплавок), с помощью которого она воспринимает сведения, или, как обычно принято говорить, *информацию*, о состоянии *объекта управления* (в данном случае — сосуда с жидкостью).

Далее, управляющая система должна содержать устройство, преобразующее информацию, полученную от объекта управления с помощью чувствительного элемента. Подобным *преобразователем информации* может считаться рычаг.

Наконец, управляющая система должна иметь возможность воздействовать на объект управления с помощью исполнительного механизма (выводного устройства). В нашем примере таким механизмом служит пробка, закрывающая конец трубы.

В современной технике мы встречаемся с автоматическими системами, несравненно более сложными, чем описанная. Еще более сложны биологические управляющие системы, и первое место среди них занимает нервная система человека, его головной мозг. Подобно техническим управляющим системам, нервная система человека также обладает чувствительными элементами (окончания нервов в органах чувств), исполнительным механизмом (окончания нервов, управляющих мышцами) и преобразователем информации (собственно нервная система).

А как устроены управляющие системы в человеческом обществе? Возьмем, например, управление экономикой. Чувствительный элемент системы — аппарат первичного учета, собирающий различные сведения о состоянии народного хозяйства. Преобразование собранной информации и выработка соответствующих решений осуществляются в Госплане, министерствах и т. п. Имеется также и специальный исполнительный аппарат на предприятиях, проводящий в жизнь принятые решения.

Все приведенные примеры показывают, что, несмотря на принципиальные различия, существующие в разных управляющих системах, все они имеют нечто общее. Изучение общих законов, на основе которых действуют управляющие системы, составляет предмет специальной науки — *кибернетики*. Термин «кибернетика» происходит от древнегреческого слова «кибернетес» (рулевой) и напоминает, что кибернетика — наука об управлении, или, более точно, *наука об общих законах преобразования информации в управляющих системах*.

Этот термин впервые употребил в 1834 г. французский физик А. Ампер, назвав кибернетикой не существовавшую еще в то время науку об управлении обществом. В 1948 г. словом «кибернетика» была названа общая наука об управлении, выделившаяся впоследствии в самостоятельную научную дисциплину (ее создание связывают с именем американского ученого Н. Винера). Возникновение кибернетики — результат предшествующего развития науки и техники. Фундамент кибернетики — современная математика, такие ее бурно развивающиеся области, как алгебра, теория информации, теория алгоритмов, теория оптимальных решений, теория массового обслуживания, исследование операций и т. д.

В настоящее время кибернетика — теоретическая основа автоматизации, и главным образом автоматизации многих видов умственной деятельности.

Конечно, между техническими и биологическими системами, и тем более между ними обеими и управляющими системами в человеческом обществе, имеются глубокие качественные различия. Поэтому наряду с кибернетикой существуют отрасли науки, изучающие особенности различных типов управляющих систем. К ним относятся техническая автоматика, физиология высшей нервной деятельности и большая группа социальных (общественных) наук.

Прикладной характер кибернетики выражается в применении ее к самым разнообразным объектам исследований реального мира. Так, перед *экономической кибернетикой* стоит задача приложения общих законов управляющих систем к экономике; *биокибернетика* исследует живые организмы, мышление человека, занимается созданием модели интеллекта, или разума; *техническая кибернетика* изучает вопросы проектирования сложных систем — вычислительных машин, информационных систем и т. д.

Такое применение кибернетики, в свою очередь, вызывает к жизни новые теоретические вопросы, исследование которых составляет суть *теоретической кибернетики*.

Рис. 1.

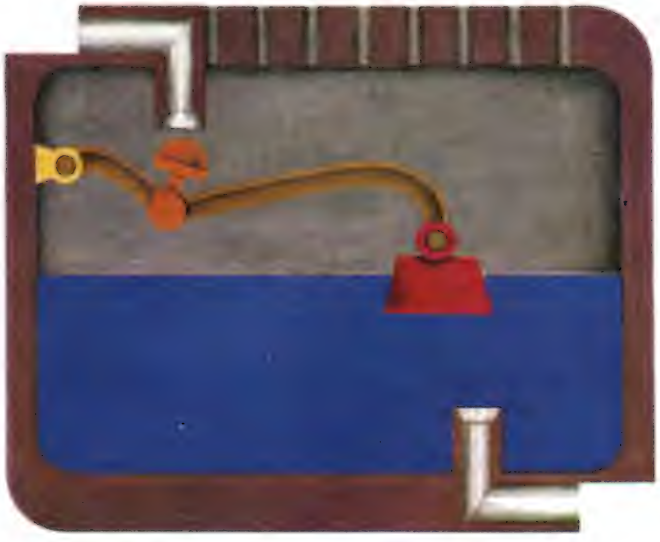
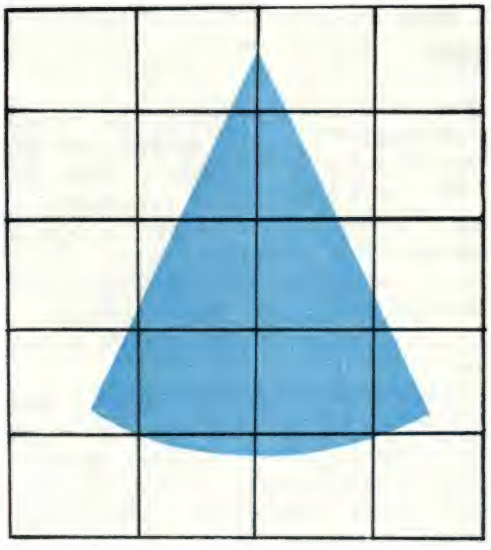


Рис. 2



Информация и кодирование

Важная составная часть кибернетики — так называемая *теория информации*. Она изучает различные формы представления и передачи информации как в отвлеченном (абстрактном) виде, так и применительно к конкретным управляющим системам. Информация может представляться в двух формах — непрерывной и дискретной, то есть прерывистой.

В первом случае информация представляется в виде плавно, непрерывно меняющихся величин. Например, при передаче речи по радио или по телефону звуки представляются в виде плавно изменяющихся электрических величин — напряжения или силы тока. При передаче той же речи по телеграфу, с помощью азбуки Морзе, или при записи ее на бумаге характер представления меняется, информация разбивается на отдельные порции: точки и тире, буквы алфавита; переходы от одной порции к другой совершаются скачками. Это уже дискретная форма представления информации.

На современном уровне развития кибернетики особо важное значение приобрела дискретная форма представления информации. Оказывается, что информация, заданная в непрерывной форме, может быть с любой наперед заданной точностью представлена в дискретной форме. Более того, в качестве отдельных порций информации может быть выбрано любое нужное количество каких-либо значков (обобщенных букв), называемое обычно *абстрактным алфавитом*. Важно лишь, чтобы этот алфавит содержал более одной обобщенной буквы. Процесс представления информации в виде последовательно расположенных букв абстрактного алфавита называется *кодированием*.

Для примера рассмотрим процесс кодирования информации, содержащейся в рис. 2 (абстрактный алфавит состоит из двух обобщенных букв — 0 и 1). Разобьем рисунок на прямоугольнички, размеры которых зависят от точности, с какой мы хотим представить информацию.

Условимся обозначать каждый прямоугольничек нулем, если более половины его площади не зачернено, и единицей в противоположном случае.

Тогда, пробегая все прямоугольнички по строкам слева направо, а строки сверху вниз, мы получим для нашего рисунка следующий дискретный код: 00000000011001100000.

Разумеется, такое представление описывает рисунок с малой точностью. Однако, разбивая изображение на достаточно большое число прямоугольничков, мы можем добиться высокой точности описания.

Обратный процесс воссоздания по данному коду первоначального рисунка, т. е. восстановление исходного вида информации по ее дискретному коду, называется *декодированием*.

В теории информации разработаны не только способы кодирования различных сообщений, но и способы количественной оценки содержащейся в них информации.

Теория автоматов

Вопросы кодирования и декодирования, а также другие проблемы возникают в первую очередь при разработке вводных и выводных устройств управляющих систем. Теоретическую основу устройств для преобразования информации составляет раздел современной кибернетики — *теория автоматов*.

Основной объект исследований этой теории — автомат, его свойства, структура, проектирование, а также способы преобразования информации с помощью автоматов.

Теория автоматов тесно связана с *теорией алгоритмов*, а само понятие *автомат* основывается на математическом понятии *алгоритма*. Алгоритмом называется конечная система правил, по которым совершается преобразование дискретной информации. С понятием алгоритма вы, сами того не ведая, знакомились еще в школе. Из курса алгебры, например, хорошо известны алгоритмы (правила) решения квадратных уравнений, систем линейных уравнений, раскрытия скобок и приведения подобных членов в буквенных выражениях и т. п. Но алгоритмы широко распространены и за пределами математики. Если сформулировать все правила, которые употребляет опытный переводчик для переводов, скажем, с английского языка на русский, мы получим не что иное, как алгоритм англо-русского перевода.

Если элементарные правила шахматной игры дополнить системой стратегических правил, позволяющих в каждой позиции находить единственный, наилучший (с точки зрения данной системы правил) ход, получится алгоритм игры в шахматы.

Теоретически чуть ли не всякий вид умственной деятельности человека может быть сведен к выполнению того или иного алгоритма. Но практически найти правила, составляющие эти алгоритмы, — очень сложная и трудоемкая задача.

Алгоритмическая система включает в себя: способ задания информации, набор элементарных операций (приемов), правила построения алгоритмов из элементарных алгоритмов.

Для кибернетики особенно важны два результата, полученные в теории алгоритмов. Первый — *универсальность алгоритмических систем* — состоит в том, что в данной алгоритмической системе можно записать любой алгоритм, т. е. представить его в виде *конечной* последовательности элементарных операций (приемов). Подобно тому как из атомов складываются молекулы различных веществ или как из одних и тех же букв складываются слова совершенно различного содержания, так и всякий алгоритм можно составить, комбинируя элементарные алгоритмические операции.

Второй важный результат заключается в том, что существуют так называемые *алгоритмически неразрешимые проблемы*, т. е. такие задачи, которые для своего решения требуют *бесконечного* числа различных приемов. А всякий алгоритм обязательно включает в себя лишь *конечное* число приемов, хотя, может быть, и очень большое.

Так, например, можно построить алгоритм для доказательства любой теоремы из элементарной геометрии (не использующей понятие предела). В то же время доказано, что для теории чисел (устанавливающей свойства целых чисел) подобного алгоритма построить нельзя, его не существует.

Основная задача теории автоматов — разработка методов создания преобразователей информации для осуществления тех или иных алгоритмов, например машин для контроля и управления производственными процессами в различных отраслях промышленности, для автоматического перевода с одного языка на другой, для игры в шахматы и т. п.

Если существуют универсальные алгоритмические системы, то в принципе возможно построить *универсальные преобразователи информации*, способные реализовать любые алгоритмы. Подобные универсальные преобразователи уже построены и успешно работают. Это так называемые *универсальные электронные цифровые вычислительные машины* (ЭЦВМ). Цифровыми вычислительными эти машины называются потому, что первым их назначением была реализация *вычислительных алгоритмов*. Информация, с которой они имели дело, была *цифровой*, т. е. набором чисел. Такие машины снабжаются так называемыми *запоминающими устройствами* (памятью), позволяющими им «запоминать» как перерабатываемую информацию, так и *программу* работы машины, т. е. записанный в условных кодах алгоритм, который должна реализовать машина.

Чтобы изменить программу, не нужно переделывать машину, достаточно пропустить через вводное устройство набор бумажных карточек с пробитыми в соответствующих местах отверстиями — *перфокарты* или ленту с отверстиями — *перфоленту*. Так вводится в машину новая программа, настраивающая ее на новый вид работы.

Благодаря этому открываются широкие возможности для автоматизации умственной деятельности человека, достаточно найти алгоритм, описывающий тот или иной вид подобной деятельности, перевести его в программу, или, как говорят, запрограммировать, и ввести в машину.

На универсальной машине можно программировать любой алгоритм, и, поскольку машина работает гораздо быстрее и точнее человека, она, как правило, выполняет заданный алгоритм гораздо лучше него. Отсюда понятно, какое большое практическое значение имеет кибернетика в автоматизации таких видов умственной деятельности, где человек уже сейчас не в силах справиться с переработкой информации за разумное время, например в научных и инженерных расчетах.

Вычислительная техника в народном хозяйстве

Во многих разделах современной науки и техники, таких, как атомная физика или ракетная техника, решаются задачи, требующие вычислений, состоящих из многих миллиардов арифметических операций. Даже при помощи клавишных вычислительных приборов человек успевает в среднем выполнять за минуту лишь две арифметические операции над многозначными числами. А для выполнения одного миллиарда операций потребовалась бы тысяча лет непрерывной работы без сна и отдыха! В то же время современная электронная цифровая машина, например, БЭСМ-6, выполняющая 1 млн. арифметических операций в секунду, справится с этой работой за четверть часа! При таком росте производительности труда становится возможным решение задач, которые ранее были недоступны человеку.

Автоматизация расчетов нужна не только в новейших областях науки и техники. Так, в метеорологии только благодаря автоматизации удается вовремя выполнить сложные расчеты, необходимые для составления прогнозов погоды. В техническом проектировании внедрение автоматизации позволяет перейти от выбора лучших проектов из относительно небольшого числа вариантов к выбору наилучшего из всех возможных вариантов (так называемого оптимального проекта).

Рассмотрим, например, задачу выбора наилучшего варианта проекта железной дороги по заданному маршруту (трассе). Производя мысленный вертикальный разрез местности вдоль трассы, получим некоторую кривую, изображающую неровности рельефа (рис. 3, стр. 408). Проложить дорогу непосредственно по этому рельефу, как правило, нельзя: подъемы и спуски получаются слишком крутыми, и преодолеть их при эксплуатации уже построенной дороги либо окажется невозможно, либо потребуются большие затраты (снижение скорости и веса составов, использование нескольких локомотивов и т. д.).

Необходимо поэтому выровнять рельеф. Такое выравнивание проводят по нескольким выбранным отметкам. В нашем примере таких точек всего 5 (точки A, B, C, D, E). Каждая точка, за исключением крайних — A и E, находящихся на определенном уровне, может занимать 100 различных положений по высоте. У нас будет $100^3 = 1\,000\,000$ различных вариантов выравнивания рельефа.

Если просматривать их со скоростью два варианта в минуту, потребуется целый год. Если же число точек увеличивается до 100, то количество вариантов выражается единицей со 196 нулями, а количество лет, необходимое для их просмотра, — единицей с 190 нулями. В этом случае просмотреть все варианты практически невозможно не только для человека, но и для электронных вычислительных машин.

Необходимо поэтому разработать методы, позволяющие резко уменьшить количество просматриваемых вариантов, отбросить целые группы заведомо плохих. Разработкой такого рода методов занимается специальный раздел кибернетики — теория *оптимальных решений*.

В настоящее время разработан ряд методов для решения задач оптимального проектирования, планирования и управления. Для решения задач оптимального проектирования дорог, линий электропередач и др. удобен *метод последовательного анализа вариантов*. С помощью этого метода оптимальный вариант выравнивания рельефа для прокладки железной дороги в несколько сотен километров находится вычислительной машиной среднего быстродействия (10—12 тыс. операций в секунду) за 2—3 часа.

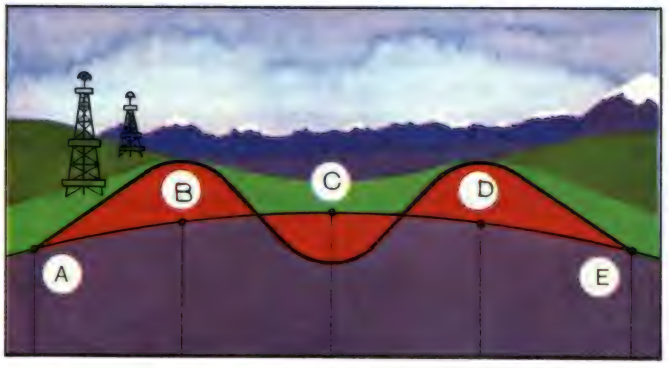
В ряде областей техники разрабатываются системы алгоритмов, позволяющие осуществить полную автоматизацию проектирования многих сложных объектов.

Не менее важно также оптимальное планирование и управление народным хозяйством. Эти вопросы выделяют обычно в специальный раздел кибернетики — *экономическую кибернетику*. Масштабы производства и темпы роста народного хозяйства в СССР так велики, что обычные неавтоматизированные методы планирования уже не могут нас удовлетворить. Практика показывает, что выбор оптимальных (наилучших) вариантов планов уже сейчас практически недоступен никакому человеческому коллективу, не пользующемуся электронными цифровыми машинами.

Электронные цифровые машины используются пока для решения лишь частных планово-экономиче-

Рис. 4 (см. стр. 409). Варианты рациональных перевозок, рассчитанные ЭЦВМ.

Рис. 3. Схема выбора наилучшего варианта проекта железной дороги.



ских задач. Особенно успешно решаются с помощью *методов линейного программирования* (см. стр. 413) так называемые транспортные задачи (нахождение планов перевозок с минимальными транспортными расходами), а также задачи о наилучшей загрузке станков и др. Экономия от такой автоматизации исчисляется обычно 10—15%, а в отдельных случаях доходит до 50—60%.

На рис. 4 дана схема перевозок грузов с заводов А, Б, В, Г на склады 1, 2, 3, 4. Минимальная стоимость перевозок зависит от объема продукции каждого завода (цифры возле заводов, в тысячах тонн), от вместимости складов (цифры, проставленные около складов, в тысячах тонн), от стоимости перевозки единицы товаров с каждого завода на склад (цифры возле стрелок, в рублях). Красные линии показывают оптимальные маршруты перевозок.

Для решения этой задачи обычным способом нужно много времени. А если будет большее количество поставщиков и потребителей? С помощью же электронно-вычислительной машины решение можно найти за несколько минут.

На повестке дня сейчас полная автоматизация не только самих процессов планирования и управления экономикой, но и процессов сбора и систематизации необходимой первичной информации, учета и справочно-статистической работы. С этой целью создаются специальные вычислительные центры, имеющие иерархическую структуру, снабженные мощными электронными цифровыми машинами и соединенные между собой, а также с производством современными каналами связи для быстрой передачи необходимой информации.

Информация, поступающая от низовых ЭЦВМ по каналам связи в вычислительную машину высшего уровня, будет обрабатываться и выдаваться за несколько десятков минут, на что сейчас требуются годы. Обработанные результаты передадут в головную организацию (госпланы республик, оттуда — в Госплан СССР). Если в дальнейшем возникнет необходимость вернуться к данным материалам для решения какой-либо новой экономической задачи, вся информация, хранящаяся в ЭЦВМ на местах, может быть вызвана через систему связи и систему машин, которые ее обрабатывали.

К задаче оптимального управления экономикой тесно примыкает задача оптимального управления производственными процессами. Сейчас еще во многих случаях диспетчер или группа диспетчеров управляет тем или иным сложным процессом далеко не лучшим образом. Дело в том, что человеческий мозг не успевает своевременно перерабатывать огромный объем необходимой информации. Помочь здесь могут только автоматизированные управляющие системы, основу которых составляют специально приспособленные для управления универсальные электронные цифровые машины.

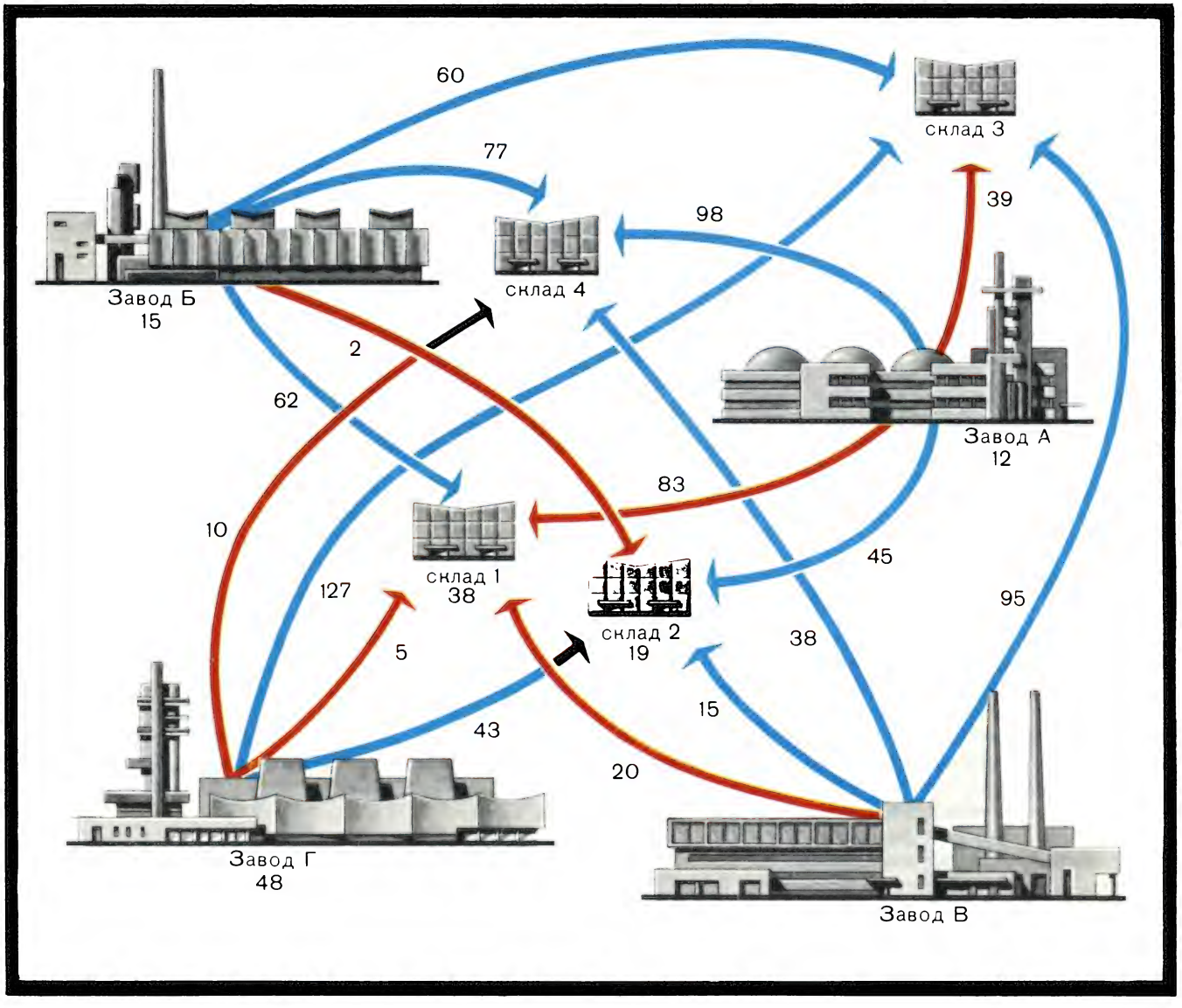
Они называются обычно *универсальными управляющими машинами*. Эти машины снабжены особыми вводными и выводными устройствами, позволяющими автоматически собирать и выдавать информацию, необходимую для управления производством. Примером системы управления предприятием может служить система управления на Львовском телевизионном заводе, разработанная научными сотрудниками Института кибернетики АН УССР совместно со специалистами завода.

Техническую базу автоматизированной системы «Львов» представляет комплекс двух электронно-вычислительных машин типа «Минск-22», снабженных дополнительными устройствами, за счет которых значительно повышаются их эксплуатационные характеристики и эффективность комплекса в целом.

Машина составляет наилучшую программу работы для всех участков производства, следит за соблюдением технологии, выполнением графиков и при необходимости включает определенные механические комплексы. В любой момент можно получить всестороннюю объективную информацию о положении дел в цехах завода.

Все это ведет к высокому уровню рентабельности предприятия. Внедрение автоматизированной системы «Львов» повышает эффективность использования капитальных вложений в три раза.

Универсальная управляющая машина «Днепр» предназначена для контроля и управления производственными процессами в различных отраслях промышленности. Машина успешно управляет выплавкой стали, газорезательными станками, производством химических и нефтепродуктов, движением поездов на железнодорожном транспорте, производством целлюлозы и бумаги и другими процессами.



Машина используется и для автоматизации научных и инженерных исследований, для сбора и обработки данных о результатах научных и инженерных экспериментов.

Так, установка на научно-исследовательском судне «Михаил Ломоносов» машины «Днепр» дала возможность обрабатывать результаты гидрофизических исследований непосредственно во время рейса, на что раньше затрачивались месяцы и даже годы работы по окончании экспедиции.

Для управления производственными процессами на значительных расстояниях можно использовать электронные цифровые вычислительные машины, установленные в вычислительных центрах в другом городе.

Но создание управляющих машин лишь наполовину решает проблему автоматизированного управления производственными процессами. Не менее важно решить задачу алгоритмизации, т. е. найти эффективные алгоритмы для управления производственными процессами. Построением общей теории управления техническими (производственными) объектами занимается *техническая кибернетика*.

Разумная машина — верный помощник человека

Алгоритмизация производственных процессов обычно чрезвычайно трудоемка, а из-за непрерывного совершенствования технологии необходимо часто изменять и совершенствовать алгоритмы управления. Поэтому стараются использовать все чаще такие системы, которые могут *самосовершенствоваться*.

Особенно велико значение самосовершенствующихся систем при решении одной из самых увлекательных задач кибернетики — задачи моделирования процессов, протекающих в мозгу человека. Дело в том, что человеческий мозг — очень сложная и во многих отношениях замечательно устроенная самосовершенствующаяся система. Возможности мозга наглядно иллюстрируются таким примером.

Если показать человеку, ранее не имевшему представления об этажности домов, рисунки с одноэтажными и пятиэтажными домами, впоследствии он может правильно классифицировать и изображения, которые ему не были еще показаны, например двухэтажных, трехэтажных и т. д. домов. Значит, у человека выработалось достаточно правильное представление о домах в несколько этажей. Иными словами, человек внешне относительно просто приспособляется к распознаванию какого-либо класса изображения (в нашем случае — рисунков домов с различным числом этажей).

Для моделирования такой способности мозга в кибернетике было построено много различных алгоритмов и проведены эксперименты. Они послужили в ряде случаев основой для решения практических задач автоматизации процессов распознавания зрительных образов, а также человеческой речи. Впрочем, в направлении автоматического распознавания речи сделаны пока лишь первые шаги: машина распознает всего несколько десятков слов, произносимых разными голосами в различных условиях.

Обучение машин распознаванию зрительных и других образов — лишь самая первая, относительно несложная задача в моделировании мыслительных процессов. Более сложно моделировать логическое мышление, процесс обучения языку, моделировать процессы творчества.

В области логического мышления в первую очередь моделируются различные системы, позволяющие осуществлять автоматическое доказательство теорем в некоторых областях математики. При этом речь идет об автоматическом доказательстве не только теорем, вошедших в учебники, но и новых, еще неизвестных человеку. Значение такой автоматизации огромно: используя скорость и безошибочность работы даже современных, относительно еще мало совершенных, универсальных электронных цифровых машин, вероятно, можно будет уже в ближайшем будущем доказать сложные теоремы, которые «невооруженному» человеческому уму недоступны.

Здесь уже возникает вопрос об использовании автоматизации для развития самой науки. В будущем кибернетические машины будут незаменимыми помощниками человека не только в доказательстве новых теорем, но и в обобщении результатов наблюдений, в построении новых физических и других теорий и т. д. Уже сейчас помимо помощи в сложных вычислениях и обработке экспериментальных данных машины начинают применяться для автоматизации справочно-информационной и библиографической работы, отнимающей много времени у ученых. В принципе возможно накапливать научную информацию не только в библиотеках, но и в электронной памяти кибернетических машин в специальных информационных центрах. Из этих центров можно будет быстро получать необходимую справку, краткое или полное содержание научной статьи и т. д.

Важное место в научном творчестве займут также автоматический перевод с одного языка на другой, автоматическое реферирование и конспектирование статей и т. п. Для этих целей в машину должна быть вложена та или иная система знаний о человеческих языках. На первых порах в эту систему включаются обычно лишь необходимый словарный запас и грамматические правила. Однако в принципе ничто не препятствует тому, чтобы обучать машину распознаванию смысла вводимых в нее фраз.

Опыты такого рода были проделаны в Академии наук УССР. Универсальная электронная цифровая машина, работая в так называемом режиме обучения, обучалась отличать осмысленные фразы, состав-

Рис. 5 (см. стр. 410). БЭСМ-6.

Рис. 6. ЭЦВМ «Минск-22» (верхний рис.).

ЭЦВМ «Днепр-2» (нижний рис.).

ленные из выбранных наугад 100 слов, от бессмысленных. Важно подчеркнуть, что машина не просто «зазубривала» вводимые в нее «учителем» фразы, а создавала новые понятия, задавала «учителю» вопросы и в режиме экзамена различала смысл не только тех фраз, которые ей были сообщены «учителем», но и абсолютно новых для нее.

Возникает актуальный и острый вопрос: возможна ли автоматизация самих процессов творчества? О научном творчестве уже говорилось выше. Необходимо лишь определить: не потребуется ли программисту затратить больше усилий на составление программы, чем на непосредственное решение вопроса, заключенного в программе?

Рассмотрим простой пример. Предположим, программист не знает, как решаются квадратные уравнения, но может проверить, является ли то или иное число корнем заданного квадратного уравнения. В таком случае он без особых затруднений может составить программу, по которой машина будет пытаться решать квадратные уравнения по различным формулам, последовательно перебирая все такие формулы — от более простых к более сложным. При этом каждая такая попытка будет проверяться с помощью подстановки определяемых по испытуемой формуле корней в заданное уравнение (или в несколько заданных уравнений). В случае неудачи машина должна автоматически строить следующую формулу и испытывать ее — и так до тех пор, пока очередная попытка не приведет к успеху. Благодаря огромной скорости работы машина довольно быстро найдет требуемую формулу.

При решении более сложных проблем применение метода простого перебора может не привести к успеху. Однако, как правило, благодаря огромной быстроте действий машина может решать соответствующие проблемы с помощью более простых методов, чем те, которые потребовались бы для этой цели человеку. Поэтому составление программы для решения даже единичной проблемы творческого характера может оказаться более простым делом, чем непосредственное решение самой проблемы. В действительности же положение еще облегчается и тем, что составленная программа используется для решения всех проблем одного типа.

Возможности автоматизации творческих процессов не ограничиваются рамками одних лишь точных наук. Уже сейчас, когда кибернетика делает здесь первые робкие шаги, проведены успешные опыты по автоматизации музыкального творчества; машины сочиняют стихи (правда, пока еще плохие), играют в шахматы и т. д. С каждым днем перед автоматизацией процессов творчества открываются все новые и новые горизонты. Однако, разумеется, далеко не во всех областях подобная автоматизация так нужна, как в процессах научного творчества.

Хотя сегодня уже начинают применять математические методы исследования художественных произведений, вряд ли можно говорить о потребности автоматизировать литературное или музыкальное творчество. К тому же стихи электронных поэтов в обозримом будущем вряд ли смогут превзойти истинные поэтические шедевры.

Особый интерес представляют взаимосвязи между кибернетикой и биологией и медициной. Кибернетика дает в руки биологам новые методы исследований. Универсальные электронные цифровые машины позволяют моделировать процессы эволюции и естественного отбора, автоматизировать процесс определения болезней по их признакам, моделировать механизм возникновения условных рефлексов и других видов деятельности мозга животных и даже мозга человека.

В медицине врач-исследователь или лечащий врач сможет получить информацию о состоянии больного, выборочные данные из истории болезни, справку об эффективности лечебного комплекса применительно к большой группе подобных больных из информационного медицинского центра, оснащенного ЭЦВМ. Такие центры будут созданы во многих городах нашей страны.

Биология, в свою очередь, снабжает кибернетику новыми идеями, касающимися создания машин, ко-

ЭЦВМ «Мир-2».

торые в значительно большей степени приблизятся к свойствам мозга, чем ныне существующие.

Кибернетика непрерывно совершенствует свою техническую базу. На смену громоздким и малонадежным ламповым машинам пришли машины, использующие полупроводники и магнитные элементы. Успехи современной физики позволили сделать следующий шаг: перейти к чрезвычайно миниатюрным элементам, использующим тонкие пленки, твердые схемы и др. Машины четвертого поколения будут строиться на так называемых БИСах — больших интегральных схемах. В одной такой схеме, объем которой составляет доли кубического сантиметра, может размещаться блок машины, занимавший в машинах первого поколения целый шкаф. Машины станут чрезвычайно надежными, малогабаритными, относительно дешевыми и простыми в эксплуатации. Эволюция в технической основе ЭЦВМ привела к коренным изменениям в ее логической организации. Машина принимает и обрабатывает могучий поток информации, что позволяет сэкономить тысячи лет человеческого труда. При работе с машиной практикуется мультипрограммирование — одновременное решение большого количества задач, поставленных перед ЭЦВМ, а это, в свою очередь, ведет к более полной загрузке оборудования. Происходит также непрерывное совершенствование логической структуры машин, увеличение быстроты их действия и объема памяти. Наряду с этим разрабатываются методы построения новых машин, копирующих не только функции, но и некоторые детали внутреннего строения человеческого мозга.

Успешно решается проблема общения человека с машиной. Разработано большое количество универсальных и специализированных языков для работы с машиной, позволяющих человеку гораздо проще писать для нее исходные задания. С машиной должен работать не только математик-программист, но и инженер. Так, например, на машине «Проминь» любой инженер может легко программировать простые задачи. Для решения широкого круга инженерных задач удобна малогабаритная полупроводниковая машина «Мир». Новая машина этой серии «Мир-2» еще более удобна в эксплуатации. В ее конструкцию введено техническое новшество — экран со световым карандашом. Оператор, видя на экране рабочее поле машины, может вносить правки световым карандашом непосредственно в определенный участок программы. Все это придает особую гибкость процессу вычислений, возможность вмешиваться в процесс вычисления и давать машине необходимые указания, не прерывая ее работы. Математическое обеспечение «Мира-2» также разработано в плане реализаций возможности упрощения диалога человек — машина. Перед учеными стоит сложная проблема — разработать такой язык, который был бы понятен машине и приближался к человеческому языку. Путь к осуществлению этого уже намечен.

На базе новейших кибернетических устройств и систем быстрыми темпами развивается автоматизация различных видов умственной деятельности человека. Автоматизация эта захватывает все новые и новые области, возможности ее безграничны. У ряда буржуазных философов и писателей успехи подобной автоматизации вызывают опасения за будущность человечества: не вытеснят ли автоматы человека? Однако подобные опасения лишь результат непонимания закономерностей исторического развития. В социалистическом и коммунистическом обществе, которое с исторической неизбежностью приходит на смену капитализму, машины, какими бы совершенными они ни были, всегда останутся верными помощниками человека, способствуя неизмеримому расцвету материальных и духовных сил человеческого общества.

Чем занимается теория линейного программирования

В самых различных отраслях народного хозяйства постоянно возникает необходимость в составлении наилучшего плана производства: плана перевозок нефти между местами ее добычи и городами-потребителями; плана использования станков или другого оборудования; плана использования имеющихся ресурсов. Нахождением наилучшего решения такого рода задач и занимается теория *линейного программирования*. Название «линейное» связано с нахождением оптимального (минимального или максимального) значения линейной функции нескольких переменных, на которые наложены ограничения в виде линейных уравнений или неравенств. Слово «программирование» происходит от конечной цели методов этой теории — составления оптимальной (наилучшей) программы действия.

Линейное программирование — новая область прикладной математики. Основные идеи линейного программирования были развиты всего лишь три десятилетия назад. В 1939 г. появилась работа советского академика Л. В. Канторовича «Математические методы в организации и планировании производства». В 1949 г. опубликована работа американского математика Джорджа Б. Данцига, в которой излагались идеи метода последовательного улучшения плана, называемого теперь *симплексным методом*. Этот метод является одним из самых универсальных и эффективных.

Методы линейного программирования очень быстро получили широкое применение в экономике при решении различных задач планирования. О характере таких задач дает представление следующий пример.

Сначала рассмотрим *экономическую постановку* задачи. Цех выпускает два вида продукции: A и B (можно предположить, что продукция A — это столы, продукция B — шкафы). В данном цехе четыре группы оборудования (т. е. станков разного типа), которое используется для производства одной штуки продукции A и B указанным в таблице образом:

	Группы оборудования			
Виды продукции	**I**	**II**	**III**	**IV**
A	1	1	2	0
B	1	2	0	2
Всего станков по группам оборудования	18	24	24	18

Данные в таблице показывают, сколько станков определенной группы используется одновременно для производства одной штуки продукции (наличие нуля означает, что станки данной группы в производстве данного вида продукции не используются). Цех получает прибыль с одной штуки продукции вида A 40 рублей, вида B — 60 рублей. Необходимо составить такой производственный план цеха, который позволял бы получать максимальную прибыль при имеющихся в наличии станках и производственных мощностях.

Математизация экономической постановки задачи

Предположим, что цех должен выпускать x_1 штук продукции вида A и x_2 штук продукции вида B. При этом станков I группы будет использовано $1 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2$. Но в цехе имеется всего 18 станков I группы, следовательно, имеем первое ограничение:

$$x_1 + x_2 \leqslant 18.$$

Три остальных ограничения получаются аналогично:

$$x_1 + 2x_2 \leqslant 24,$$
$$2 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 \leqslant 24,$$
$$0 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 \leqslant 18.$$

Таким образом, нами получена система четырех линейных неравенств. Нас будут интересовать только неотрицательные (допустимые) решения данной системы (нельзя же практически использовать, например, решение, где $x_1 = -6$, эквивалентное тому, что цех должен сделать -6 штук продукции?!).

x_1 штук продукции вида A дадут цеху прибыль $40 \cdot x_1$ руб., а x_2 штук продукции вида B дадут $60 \cdot x_2$ руб. Общую прибыль будет описывать линейная функция $F = 40x_1 + 60x_2$. Нам необходимо среди неотрицательных решений системы линейных неравенств отыскать такое, которое максимизировало бы линейную функцию F.

Математическая формулировка этой задачи выглядит так:

Найти максимум линейной функции

$$F = 40x_1 + 60x_2$$

при условии

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\leqslant 18, \quad (а) \\ x_1 + 2x_2 &\leqslant 24, \quad (б) \\ 2x_1 &\leqslant 24, \quad (в) \\ 2x_2 &\leqslant 18, \quad (г) \\ x_1 &\geqslant 0, \quad (д) \\ x_2 &\geqslant 0. \quad (е) \end{aligned} \qquad (1)$$

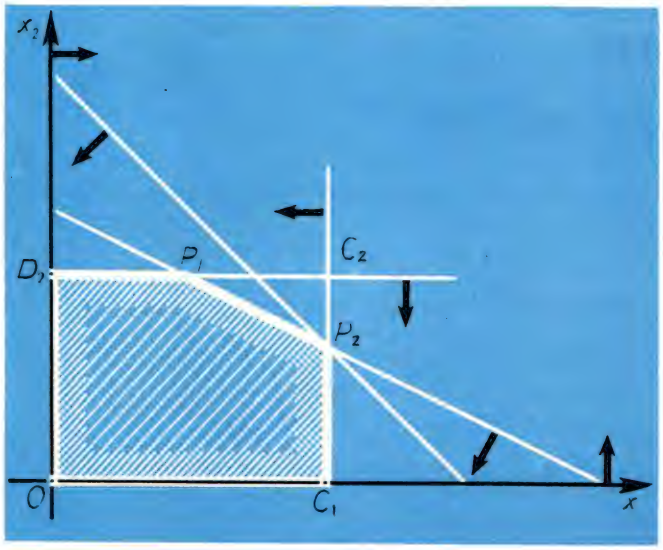


Рис. 1 (верхний).

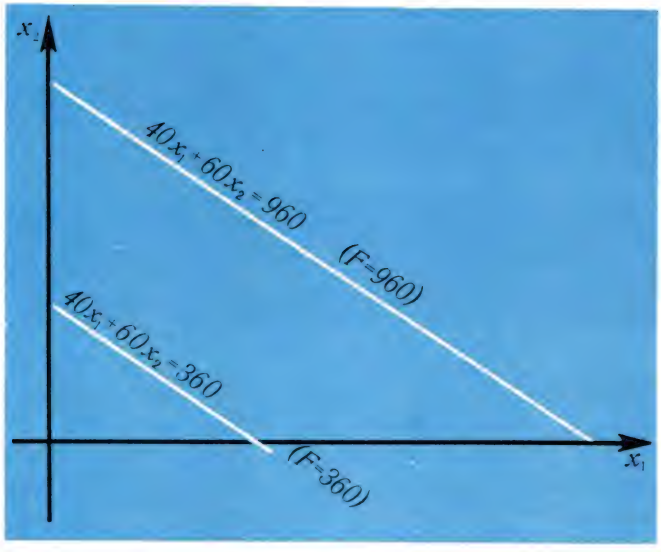


Рис. 2 (нижний).

I решение. В этой задаче только два неизвестных x_1 и x_2. Это позволяет получить решение геометрически. Неравенства (д) и (е) ограничивают поиск решения первым квадрантом (рис. 1).

Неравенствам (в) и (г) удовлетворяют лишь точки, находящиеся внутри или на сторонах прямоугольника $D_2C_2C_1O$. Линейные неравенства (а) и (б) еще сильнее ограничивают область поисков допустимых решений. После наложения всех шести ограничений мы получили многоугольник $OD_2P_1P_2C_1$, являющийся множеством допустимых решений задачи. Теперь среди множества этих решений надо выбрать такое, при котором линейная функция F достигала бы максимума, т. е. необходимо найти такую точку, принадлежащую этому многоугольнику, чтобы координаты ее (x_1^0, x_2^0) обращали F в максимум. Приравняем выражение для F, т. е. $F=40x_1+60x_2$, какой-либо постоянной a:

$$40x_1+60x_2=a.$$

Известно, что это уравнение определяет прямую, в каждой точке которой функция F принимает одно и то же значение a.

Пусть $a=360$, тогда уравнение

$$40x_1+60x_2=360$$

определяет прямую ($F=360$) на рис. 2.

Если же положить $a=960$, то уравнение

$$40x_1+60x_2=960$$

определит другую прямую ($F=960$).

Если представить, что a, возрастая, принимает значения от 0 до ∞, то прямая, соответствующая уравнению

$$40x_1+60x_2=a,$$

смещаясь параллельно самой себе, образует семейство параллельных прямых. Такое семейство показано на рис. 3, где каждой прямой поставлено в соответствие определенное значение функции F. Направление возрастания значения a показано стрелкой. По взаимному расположению многоугольника допустимых значений и этого семейства прямых можно определить, какая точка многоугольника соответствует наибольшему значению F. Из рис. 4 видно, что такой точкой является точка P_2. Чтобы определить координаты этой точки, достаточно решить систему уравнений тех прямых, пересечением которых она является:

$$\begin{aligned} x_1+x_2&=18,\\ x_1+2x_2&=24,\\ x_1&=12. \end{aligned}$$

Откуда $x_1^0=12$, $x_2^0=6$. При этом допустимом решении

$$F=40x_1+60x_2=840 \text{ (руб.)}.$$

Это решение *оптимальное*, ибо ни при каком другом допустимом решении значение линейной функции F не будет бóльшим.

Предлагаем читателю самому убедиться в этом, вычислив для сравнения, например, значение F в точке P_1. Заметим, что в теории линейного программирования доказывается теорема, по которой оптимального значения линейная функция может достигать только на границе многоугольника допустимых решений.

II решение. Теперь решим эту же задачу с помощью симплексного метода. Читателю следует обратить внимание на основную идею этого метода — последовательное улучшение допустимых решений.

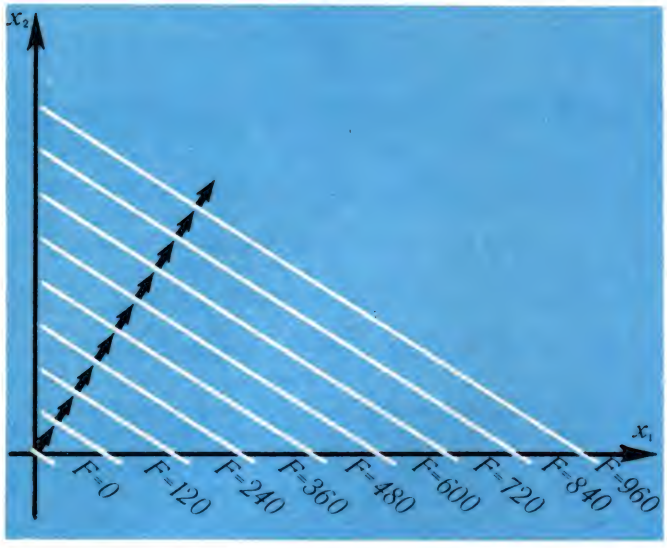


Рис. 3 (верхний).

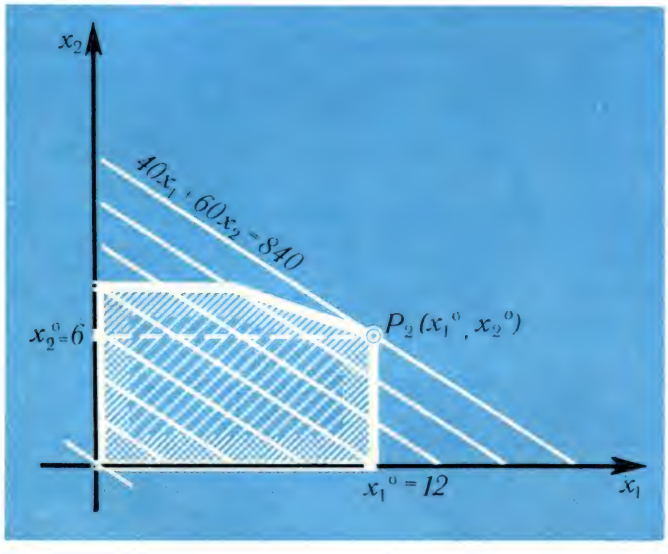


Рис. 4 (нижний).

Сначала приведем нашу задачу к виду, удобному для применения симплексного метода. Для этого систему неравенств (1) необходимо преобразовать в систему линейных уравнений. Чтобы неравенство $x_1+x_2\leqslant 18$ превратить в равенство, достаточно в левую его часть ввести дополнительное неотрицательное неизвестное, например, x_3:

$$x_1+x_2+x_3=18.$$

Вводя дополнительные неизвестные x_4, x_5, x_6 в остальные неравенства, имеем:

$$\begin{aligned} x_1+\ x_2+x_3&=18,\\ x_1+2x_2+x_4&=24,\\ x_1+\quad +x_5&=12,\\ x_2+\quad +x_6&=\ 9. \end{aligned} \qquad (2)$$

Эта система четырех уравнений имеет шесть неизвестных. Значит, имеется два неизвестных, называемых *свободными*, через которые можно выразить остальные четыре, называемые *базисными*. Заметим, что свободные неизвестные неотрицательны. В качестве свободных неизвестных произвольно выбираем x_1 и x_2.

$$\begin{aligned} x_3&=18-x_1-x_2,\\ x_4&=24-x_1-2x_2,\\ x_5&=12-x_1,\\ x_6&=\ 9-x_2. \end{aligned} \qquad (3)$$

Линейная функция уже выражена через свободные неизвестные:

$$F=40x_1+60x_2.$$

Если придавать свободным неизвестным какие-либо значения, то будем получать все новые и новые решения. В симплексном методе ограничиваются только базисными решениями, т. е. решениями, которые получаются, когда свободные неизвестные равны нулю.

Система (3) имеет такое базисное решение ($x_1=0$, $x_2=0$, $x_3=18$, $x_4=24$, $x_5=12$, $x_6=9$), при котором значение линейной функции $F=0$. При этом допустимом решении цех ничего не должен делать и, естественно, прибыль равна нулю. В выражении для F свободные неизвестные входят со знаком «плюс». Следовательно, их увеличение должно привести и к увеличению F. Будем увеличивать x_1 при $x_2=0$. Нас интересуют только допустимые (неотрицательные) решения, поэтому x_1 нельзя увеличивать неограниченно, ибо при этом базисные неизвестные x_3, x_4, x_5 могут стать отрицательными (см. систему (3). Из третьего уравнения системы (3) видно, что x_1 можно увеличить лишь до 12. Положим теперь $x_1=12$, тогда $x_5=0$. Это приводит к новому допустимому решению:

$$x_1=12,\ x_2=0,\ x_3=6,\ x_4=12,\ x_5=0,\ x_6=9,$$

при котором значение линейной функции стало больше:

$$F=40x_1+60x_2=480\ \text{(руб.)}.$$

В этом решении (как и в первом) два неизвестных равны нулю (x_2 и x_5). Будем считать их свободными и выразим через них новое базисное неизвестное x_1. Из третьего уравнения системы (3) имеем:

$$x_1=12-x_5.$$

Подставляя это выражение для x_1 в остальные уравнения системы (3) и в выражение линейной функции, получим:

$$\begin{aligned} x_3&=6-x_2+x_5,\\ x_4&=12-2x_2+x_5,\\ x_6&=9-x_2,\\ x_1&=12-x_5,\\ F&=480+60x_2-40x_5. \end{aligned} \qquad (4)$$

Из системы (4) видно, что увеличение x_2 при $x_5=0$ будет вести к дальнейшему увеличению значения F.

Но первые три уравнения системы (4) ограничивают увеличение x_2.

При $x_2=6$ значение линейной функции станет $F=840$. Неизвестные x_3 и x_4 при этом окажутся равными нулю, т. е. станут свободными.

Нами получено новое допустимое решение:

$$x_1=12,\ x_2=6,\ x_3=0,\ x_4=0,\ x_5=0,\ x_6=3.$$

Выразим новое базисное неизвестное x_2 через свободные. Из первого уравнения имеем:

$$x_2=6-x_3+x_5\,.$$

Выражая F через свободные неизвестные, имеем:

$$F=480+60\,(6-x_3+x_5)-40x_5=840-60x_3+20x_5.$$

Из этого выражения как будто бы следует, что за счет увеличения x_5 можно добиться еще большего увеличения F. Выразим базисные неизвестные системы (4) через свободные неизвестные x_3 и x_5:

$$\begin{aligned} x_4&=2x_3-x_5\\ x_6&=3+x_3-x_5\\ x_1&=12-x_5\\ x_2&=6-x_3+x_5 \end{aligned} \qquad (5)$$

Анализ уравнений системы (5) показывает, что любое увеличение неизвестного x_5 при $x_3=0$ сразу же приводит к недопустимому решению, так как x_1, x_4, x_6 станут отрицательными. Полученное решение $x_1=12$, $x_2=6$, $x_3=0$, $x_4=0$, $x_5=0$, $x_6=3$ нельзя улучшить. Это решение будет *оптимальным*, ибо соответствующее ему значение линейной функции F максимальное среди всех ранее рассмотренных.

$$F_{max}=840\ (\text{руб.}).$$

Сравните с решением, полученным геометрически.

Заметим, что последовательное улучшение допустимых решений в симплексном методе обычно происходит до тех пор, пока в выражении для линейной функции все свободные неизвестные не окажутся со знаком «минус» (в случае минимизации — со знаком «плюс»).

Нами была рассмотрена простейшая задача линейного программирования. На практике приходится иметь дело с задачами, число неизвестных в которых исчисляется сотнями, и тогда на помощь приходят электронные вычислительные машины.

Решение к стр. 381. Введем обозначения: a — Саша, b — Костя, c — не Саша, d — 18 лет, e — 21 год и f — 25 лет.

Мама сказала: «$a\cdot e$», папа сказал: «$b\cdot d$», а дочь сказала: «$c\cdot f$». Так как часть каждой информации неверна (имеет значение 0), то $a\cdot e=b\cdot d=c\cdot f=0$ и $a+e=1$, $b+d=1$, $c+f=1$.

Сын Николая Ивановича не может иметь сразу два имени и два возраста; следовательно: $a\cdot b=a\cdot c=d\cdot e=d\cdot e=e\cdot f=0$.

Перемножим суммы $a+e=1$ и $b+d=1$, тогда $a\cdot b+a\cdot d+b\cdot e+e\cdot d=1$, после выбрасывания нулевых членов останется равенство $a\cdot d+b\cdot e=1$. Перемножим эту сумму и сумму $c+f=1$, что после выбрасывания нулевых членов даст равенство $b\cdot c\cdot e=1$, откуда следует, что $b=1$, $c=1$, $e=1$ (верхняя информация). Значит, сына Николая Ивановича зовут не Саша ($c=1$), а Костя ($b=1$) и возраст его 21 год ($e=1$).

Интересное свойство числа 121

Запись 121 имеет смысл числа не только в десятичной системе, но и в любой другой, основание которой $B>2$. Это число интересно тем, что является полным квадратом как при основании 10 ($121=11^2$), так и при любом другом основании $B>2$.

Докажите!

Решение на стр. 432.

Пять зашифрованных действий

$$***+***=****$$

$$****-***=***$$

$$****\times *=*****$$

$$*****:****=*$$

$$\frac{**}{*\times *-*}=\frac{*+*}{\sqrt{*^{*}}}$$

Расшифруйте эти пять равенств, заменяя звездочки цифрами так, чтобы в каждом равенстве появились все 10 цифр от 0 до 9.

Числа, образующие первые четыре действия, не должны совпадать.

Ответ на стр. 432.

Исследование операций

Исследование операций — это наука о математическом обосновании решений. Что такое «решение», знает каждый. Пусть имеется ситуация (положение, стечение обстоятельств), в которой перед нами возникает вопрос: Как поступить? Какой образ действий выбрать? Если мы выбираем в данной ситуации определенный образ действий из ряда возможных, это и называется *решением*.

Необходимость принимать решения так же стара, как само человечество. Вероятно, еще в каменном веке люди, отправляясь на охоту, принимали решения, например: Чем вооружиться? Какой район леса выбрать? Разделиться ли на две группы или идти всем вместе? И так далее.

Однако до поры до времени решения принимались без всяких научных расчетов, просто на основе опыта и здравого смысла. В ряде случаев такой способ принятия решений устраивает нас и до сих пор. Скажем, человек выходит утром из дому, чтобы ехать на работу. По ходу дела ему приходится принять целый ряд решений: Надевать плащ или нет? В каком месте перейти улицу? Ехать автобусом, троллейбусом или, может быть, трамваем? Все такие решения человек принимает мгновенно (часто бессознательно), опираясь на имеющийся у него опыт и здравый смысл. Здесь никакая наука не нужна и вряд ли понадобится в дальнейшем.

А теперь возьмем другой пример: пусть речь идет об организации работы городского транспорта в большом городе с миллионным населением. Нужно принять ряд решений: Какое количество и каких транспортных средств (автобусов, троллейбусов, трамваев) направить по каким маршрутам? Где расположить остановки? Как часто пускать машины в разное время суток? И т. д.

Здесь решения гораздо сложнее, чем в первом примере, а главное, от них гораздо больше зависит. В первом примере неудачный выбор решения затронет интересы одного человека, во втором — может отразиться на деловой жизни целого города. Такие ответственные решения уже нельзя принимать наобум — для них требуются специальные расчеты. Эти расчеты позволяют избежать риска, заранее оценить сильные и слабые стороны каждого решения и выбрать то из них, которое является наилучшим (или, как говорят, оптимальным). Чем сложнее, чем дороже мероприятие, которое мы собираемся предпринять, тем менее допустимы в нем произвольные, «волевые» решения, опирающиеся только на «опыт и здравый смысл». В особенности когда речь идет о мероприятии, которое вообще проводится впервые! Здесь «опыт» молчит, а «здравый смысл» легко может ввести в заблуждение. Нет уж, лучше «семь раз примерь, один раз отрежь»! Такой предварительной «примеркой» перед выбором решения и служат математические расчеты — *исследование операций*.

Подобными расчетами люди занимались от случая к случаю с самых давних пор, но в наше время они стали более массовыми и необходимыми, так как сами мероприятия стали более сложными и ответственными. Что касается названия «исследование операций», то оно появилось сравнительно недавно, в годы второй мировой войны, когда в вооруженных силах США и Англии были созданы специальные научно-исследовательские группы, в задачи которых входила подготовка разумных решений по организации боевых операций различных родов войск. В настоящее время это название укрепилось за всеми расчетами по обоснованию решений, к какой бы области практики они ни относились. Математические методы исследования операций применяются сегодня в экономике, промышленности, сельском хозяйстве, в медицине и биологии, в градостроительстве, инженерном деле и транспорте — одним словом, везде, где людям приходится организовывать сложные мероприятия и принимать решения. За последние годы исследование операций развивается очень быстрыми темпами и завоевывает себе все более широкое поле применений. Знакомство с математическими методами исследования операций требуется сейчас от инженеров, научных работников, хозяйственных руководителей. Широкое развитие и применение методов исследования операций опирается в наши дни на вычислительную технику — на быстродействующие электронные цифровые машины (ЭЦВМ), позволяющие в сжатые сроки осуществлять огромный объем расчетов, связанных с переработкой информации о состоянии дела и с оптимизацией решений.

Чтобы дать представление о задачах исследования операций, рассмотрим несколько примеров таких задач.

1. Имеется группа промышленных предприятий $П_1$, $П_2$, $П_3$, $П_4$, расположенных в определенных географических пунктах (рис. 1). Эти предприятия нужно снабжать сырьем. Источники сырья $С_1$, $С_2$, $С_3$, $С_4$, $С_5$ также размещены в разных географических пунктах и связаны с предприятиями какими-то путями сообщения (железнодорожными, шоссейными, водными, воздушными) со своими тарифами. Требуется разумным образом разместить заказы на сырье так, чтобы потребности предприятий были удовлетворены в заданные сроки и при этом расходы на перевозку сырья были наименьшими (минимальными).

2. Организуется продажа сезонных товаров (купальных костюмов, шапочек, защитных очков и т. д.). Требуется выбрать количество и вид товаров,

Рис. 1.

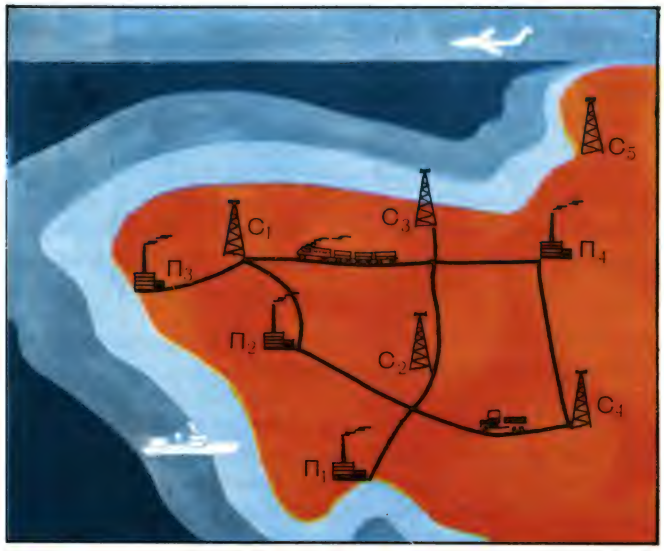
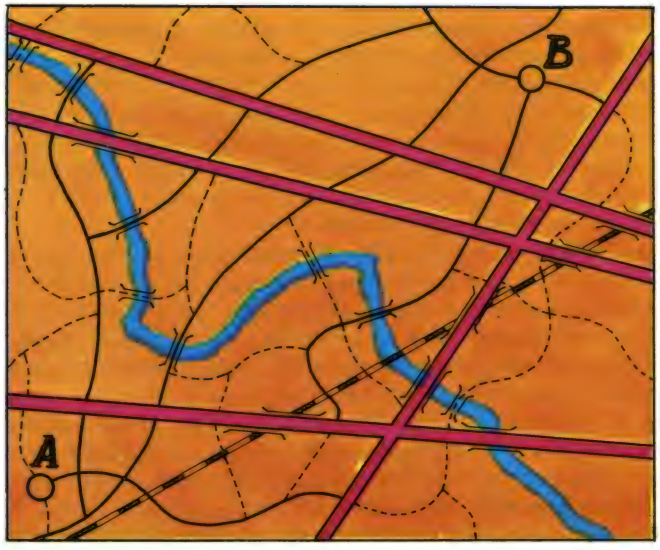


Рис. 2.



число торговых точек, их размещение и т. д., с тем чтобы прибыль за сезон была наибольшей (максимальной).

3. Для обеспечения телевизионной связи запускается серия искусственных спутников Земли. Требуется выбрать количество спутников, их орбиты, тип оборудования и т. д. так, чтобы заданное качество и объем передач были обеспечены при минимальных расходах.

4. Необходимо к определенному сроку произвести обследование большой группы населения для того, чтобы выявить некоторые виды заболеваний. На обследование выделены какие-то средства (врачебный персонал, оборудование, деньги). Требуется разработать план обследования (число медпунктов, их размещение, способ работы, вид и количество анализов и т. п.), с тем чтобы выявить максимальный процент заболевших.

5. Завод изготовляет определенного вида изделия (телевизоры или, скажем, подшипники). Для обеспечения их высокого качества организуется система контроля, причем изделия (все или некоторые) подвергаются каким-то испытаниям (тестам). Требуется рациональным образом организовать этот контроль, т. е. назначить вид тестов, их последовательность, правила браковки и т. д., так, чтобы обеспечить заданный уровень качества изделий при минимальных расходах.

6. Требуется проехать на автомашине из пункта A в пункт B (рис. 2); пункты соединены сетью дорог разного качества: первоклассные благоустроенные шоссе, дороги среднего качества и проселки. Некоторые из них пересекают реки и железнодорожные пути, причем на переездах могут возникать «пробки» (скопления машин). Требуется проложить такой маршрут, по которому машина придет из пункта A в пункт B за кратчайшее время.

Как видно, наши примеры взяты из самых разных областей, и все же в них есть что-то общее, а именно: в каждом из них идет речь о каком-то *мероприятии,* преследующем определенную цель. Заданы какие-то *условия,* в которых проводится мероприятие (в частности, ресурсы или средства, которыми мы располагаем). В рамках этих условий требуется принять *решение* так, чтобы наше мероприятие было в каком-то смысле наиболее выгодным (или наименее убыточным). Все эти задачи относятся к области исследования операций, и перечисленные черты являются для них общими и типичными.

Познакомимся с терминологией и основными понятиями исследования операций. Под *операцией* в широком смысле слова понимается любое мероприятие (или система мероприятий), направленное к определенной цели, заранее спланированное и руководимое из единого центра. Этим мероприятием мы можем в какой-то мере *управлять,* выбирая зависящие от нас параметры X_1, X_2, ..., которые мы будем называть *элементами решения.* Если мы выбрали определенным образом все эти параметры, это будет значить, что мы приняли *решение.*

Решение может быть удачным или неудачным, обеспечивать больший или меньший успех операции. Успешность (или эффективность) операции характеризуется какой-то величиной — мы будем обозначать ее W и называть *целевой функцией* (иначе — показателем эффективности) операции. Эту величину тре-

буется сделать максимальной (или, наоборот, минимальной). Так, в примере 1 целевой функцией W является *стоимость перевозок* и ее нужно сделать минимальной. В примере 2 целевой функцией является *прибыль* и ее, наоборот, надо сделать максимальной. Предлагаем читателю самостоятельно назвать целевую функцию в остальных примерах.

Оптимальным решением называется решение, при котором целевая функция обращается в максимум (или в минимум, смотря по смыслу задачи).

Математические методы исследования операций позволяют с помощью расчета заранее выявить оптимальные решения и этим помочь в выборе образа действий тем людям (коллективам), которые несут ответственность за правильную, разумную организацию операции.

Чтобы проанализировать совокупность возможных решений и найти среди них оптимальное, нужно прежде всего построить *математическую модель* операции, т. е. выразить с помощью каких-то математических формул зависимость между условиями операции α_1, α_2, ..., элементами решения X_1, X_2, и целевой функцией W.

Построение математической модели — самая сложная и ответственная часть исследования. В модели надо по возможности учесть все важные, существенные факторы (причины), от которых зависит успех операции, а менее существенные, второстепенные — отбросить. Чтобы построить правильную, доброкачественную математическую модель, нужно не только хорошо знать математику, но и глубоко разбираться в существе того явления, о котором идет речь. Если математическая модель строится человеком, который имеет о данной области только общее представление, он всегда рискует, с одной стороны, не учесть ряда существенных факторов или учесть их неправильно, а с другой стороны, «утонуть» в несущественных подробностях, излишне усложняющих модель. Наилучшие результаты получаются, когда над моделью работают совместно математики и специалисты в данной конкретной области, к которой относится операция. Для наиболее сложных случаев приходится создавать коллективы специалистов разных профилей — математиков, физиков, инженеров, экономистов, психологов и т. д.

Предположим, что самая трудная и ответственная часть работы по исследованию операций — создание математической модели — выполнена. Это значит, что мы для любых заданных условий α_1, α_2, ... и любого решения (X_1, X_2, ...) можем вычислить целевую функцию W. Запишем зависимость W от условий и элементов решения в виде формулы:

$$W = W(\alpha_1, \alpha_2, \ldots; X_1, X_2, \ldots).$$

Не нужно думать, что эта зависимость всегда имеет вид простой алгебраической формулы, — нет, часто она гораздо сложнее, например имеет вид уравнения, которое нужно еще решить, или системы графиков, или программы для вычислительной машины, по которой всегда можно вычислить W. Так или иначе, примем, что задача вычисления W решена. Тогда задачу выбора оптимального решения можно поставить следующим образом:

При заданных условиях α_1, α_2, ... найти такие элементы решения X_1, X_2 ..., при которых целевая функция W обращается в максимум (минимум).

Для решения таких задач современная математика разработала много специальных методов, таких, например, как методы *линейного программирования, динамического программирования, метод случайного поиска* и другие, позволяющие в обозримое время найти оптимальное решение. Надо заметить, что в случаях, когда число элементов решения X_1, X_2, ... велико, а целевая функция W зависит от них и заданных условий сложным образом, задача поиска оптимального решения может оказаться в вычислительном отношении очень громоздкой. В настоящее время подавляющее большинство таких задач решается на вычислительных машинах.

Однако вычислительные трудности — это далеко не главные трудности, с которыми приходится встречаться при исследовании операций. Значительно более серьезные затруднения возникают в связи с *неопределенностью ситуации*.

Представим себе, что обстановка, в которой будет выполняться операция, заранее неизвестна и может оказаться той или другой. Скажем, в задаче о распродаже сезонных товаров (пример 2) успех распродажи существенно зависит от спроса, а спрос — от погоды, которую, как известно, в точности предугадать невозможно, особенно задолго. В задаче о маршруте автомашины (пример 6) тоже нельзя заранее предвидеть, сколько придется простоять машине на том или другом переезде.

Если условия выполнения операции α_1, α_2, не все известны заранее, а среди них есть неопределенные, задача исследования операций превращается в *задачу о выборе решения в условиях неопределенности*. Трудная задача, но, к сожалению, очень типичная! И встречается она на практике куда чаще, чем случай, когда все условия известны заранее.

Как же быть? Отказаться от математического исследования? Ни в коем случае!

Разумеется, неопределенность есть неопределенность, с этим ничего не поделаешь, и любое решение, принятое в условиях неопределенности, хуже того, которое мы приняли бы, если полностью знали обста-

новку. Приняв решение в условиях неопределенности, мы не гарантированы, что обстановка не обернется против нас, и тогда мы выиграем меньше, чем рассчитывали. И все-таки математические методы помогут нам принять решение более разумное, чем если бы мы действовали просто наобум. Существует ряд приемов, позволяющих принять и в условиях неопределенности решение лучшее, чем остальные.

Прежде всего надо сказать о вероятностных методах анализа случайных ситуаций. Как известно, теория вероятностей занимается закономерностями в случайных явлениях и предсказаниями (прогнозами) в области массовых случайных явлений. Методами теории вероятностей можно найти разумный способ поведения в условиях, которые могут меняться случайным и непредвиденным образом. Мы можем, например, выбрать такое решение, которое обеспечит нам *максимальный средний выигрыш* при неоднократном выполнении операции (а многие операции как раз и выполняются неоднократно!). Или, если мы очень боимся риска, неожиданных крупных потерь, можно выбрать такое решение, которое сводит к минимуму вероятность крупной потери. Многого можно достигнуть при математическом исследовании операции даже в условиях неопределенности — нужно только хорошо знать, к чему мы стремимся и чего опасаемся.

Бывают особые обстоятельства, когда неизвестные условия операции зависят не от «слепого случая», а от сознательно противодействующего нам противника (например, в ходе военных действий). В таких задачах найти оптимальное решение помогает специальная наука — *теория игр* (так называется математическая теория конфликтных ситуаций). Близкими к теории игр задачами занимается *теория статистических решений* — там рассматривается неопределенность, не обязательно связанная с враждебной деятельностью противника (так называемые «игры с Природой»).

Особые сложности в задачах исследования операций возникают, когда успешность операции описывается не одной-единственной целевой функцией (показателем эффективности) W, а сразу несколькими: W_1, W_2, ..., W_k, из которых одни желательно сделать побольше (максимизировать), а другие поменьше (минимизировать). Например, организуется работа промышленного предприятия, и нам хотелось бы: а) максимизировать прибыль, б) минимизировать количество занятых на производстве людей, в) максимизировать количество сэкономленного сырья и т. д. Одним словом, хочется, чтобы «и волки были сыты и овцы целы»...

Легко видеть, что поставленные требования противоречивы: максимально удовлетворяя одному из них, мы неизбежно ставим под удар другие. Возникает вопрос о выборе так называемого *компромиссного* решения, которое, не будучи, может быть, в точности «оптимальным» ни по одному показателю, является *приемлемым* по всей совокупности показателей. Здесь тоже могут быть применены некоторые математические методы, позволяющие, например, заранее выявить и отбросить те варианты решения, которые уступают другим *по всем показателям,* со всех точек зрения. После того как эти заведомо негодные варианты решения будут отброшены, уже легче из оставшихся выбрать удачное компромиссное решение, приемлемое по всем показателям.

С некоторыми задачами исследования операций вы можете познакомиться по книжке А. Кофмана и Р. Фора «Займемся исследованием операций».

Наука о случайном

Обыденные представления

Наша повседневная речь широко использует слово «случай» и его производные — «случайность», «случайный» и т. п. Каждый из нас слышал и сам произносил фразы, подобные следующим: «Я случайно натолкнулся на интересную мысль», «Только случай помог мне сегодня», «Что за приятная случайность помогла нам встретиться!» Всякий раз при употреблении подобных выражений в них вкладывается один и тот же смысл: случайные события происходят крайне редко, представляют собой нечто совершенно исключительное, идущее вразрез с установившимся порядком вещей. В обыденном представлении случайное противопоставляется закономерности, является чем-то, что нарушает закономерный ход событий, нормальное их развитие.

Но так ли это на самом деле? Не упрощаем ли мы такими представлениями действительность? Не лишаем ли мы себя существенных возможностей

В объективе фотоаппарата положение летящего мяча случайно совпало с положением головы вратаря.

в познании явлений природы, а также процессов техники и экономики, когда считаем, что в мире господствует лишь строгая закономерность определенного типа — каждая определенная ситуация влечет за собой определенные следствия?

Мы сейчас на ряде примеров, заимствованных из окружающей жизни, убедимся в том, что множество важнейших явлений существенно зависит от случая и без учета влияния случайного не может быть полноценного их исследования. Мы увидим, что без учета влияния случайных явлений человек становится бессильным направлять развитие интересующих его процессов в желательном для него направлении. Мы узнаем далее, что случайные события также подчинены своим особым закономерностям. Изучение этих закономерностей — задача науки о случайном — *теории вероятностей*.

Примеры случайных событий

Почти каждый из нас пользуется телефоном-автоматом. Все мы прекрасно знаем, что иногда приходится долго ждать своей очереди, иногда же удается позвонить без всякого ожидания. Иногда нужный номер занят и нам не удается дозвониться даже после нескольких проб; иногда же соединение происходит немедленно, при первой же пробе. Все эти колебания, изменения условий использования телефона не представляют собой ничего необычного, хотя и носят случайный характер.

Известно, что при проведении измерений некоторой величины один результат отличается от другого. Невозможно, чтобы при проведении нескольких замеров все они дали абсолютно тождественные результаты. Этот факт хорошо известен экспериментаторам, и уже давно выработаны действенные меры для исключения случайных ошибок измерения. Каждый школьник, выполнявший измерения, связанные с физическими или химическими опытами, знает, что для получения более надежного результата опыт следует повторить несколько раз и за лучшее приближение к истине нужно взять среднее арифметическое из полученных чисел. Мы снова столкнулись с влиянием случая в таких событиях, которые систематически выполняются многими тысячами людей в лабораториях заводов, исследовательских институтов, в больницах и в торговых организациях.

При страховании жизни, посевов, скота, имущества никто не может предсказать, что случится в течение года с тем или иным застрахованным, с тем или иным гектаром посева или домом. Может случиться, что с застрахованным лицом произойдет несчастье, посев будет выбит градом или выжжен засухой; ничто не гарантирует нас от падежа скота или пожара, в результате которого погибнет все имущество.

Страховые организации при определении размеров страховых взносов и страховых премий в случае несчастий с застрахованным как-то должны учитывать влияние случая и в какой-то мере уметь предсказывать долю тех застрахованных, которым придется выплатить страховую премию. На этом всестороннем учете влияния случая как раз и построено все страховое дело.

Когда предприятия обувной промышленности планируют ассортимент обуви для выпуска в предстоящем году, то они не запрашивают у возможных потребителей, какие номера ботинок и в каком количестве им потребуются. Чтобы не получилось затоваривания обуви тех размеров, которые не потребуются, необходимо научиться заранее рассчитывать долю покупателей с тем или иным размером ног. И хотя ни один магазин не знает в лицо своих покупателей и ни одно обувное предприятие не знает

Рост подростков одного и того же возраста подчинен математической закономерности.

всех своих потребителей, выпуск обуви в общем хорошо удовлетворяет запросы населения. Это основано на изучении размеров ног. Оказывается, здесь приходится иметь дело с одним из законов случая, который получил название теоремы Лапласа — Ляпунова.

Советский Союз с каждым годом расширяет свою внешнюю торговлю и в связи с этим ежегодно значительно увеличивает количество грузовых судов. Для лучшего использования флота необходимо знать те закономерности, которым подчиняется прибытие грузовых судов. На первый взгляд кажется, что здесь нет никакой задачи, так как прибытие и отплытие судов заранее планируются и их движение происходит по строгому расписанию. Однако в действительности это далеко не так: в данный порт приходят суда из многих портов мира, по пути они попадают в различные метеорологические условия, которые существенно влияют на скорость движения. Это обстоятельство влияет на сроки прихода в порт назначения. Закупка товаров у иностранных фирм и иностранными фирмами у нас никак не согласована с графиком прихода судов в порт.

Поставка товаров в порт с мест производства также подвержена влиянию множества причин, ни одну из которых заранее учесть невозможно. В результате график прихода судов в порт дает лишь очень суммарное представление об истинной картине загрузки порта.

Для примера скажем, что в сентябре 1962 г. из судов, которые должны были прийти по графику в Ленинградский порт, не пришли совсем 17. Вместе с тем прибыли 22 судна, которые не были запланированы. Для того чтобы выяснить, насколько хорошо действуют здесь законы случая, приведем небольшую табличку, в которой указан фактический приход судов с так называемыми генеральными грузами в Одессу за конец апреля и май 1962 г. В первой строчке таблицы указано число судов, прибывших за сутки; во второй — число суток, когда прибывало указанное число судов; наконец, в третьей приведены числа суток, вычисленные на основании теории вероятностей, в которые должно прибывать в порт указанное число судов.

Число судов в сутки	0	1	2	3
Фактическое число суток	16	13	10	3
Вычисленное число суток	15,5	15,5	8,6	2,4

Из таблицы мы видим, что согласно законам теории вероятностей должно быть 15,5 суток, когда в порт не должно прийти ни одного судна с генеральными грузами. Фактически таких дней было 16. За рассматриваемый период было 3 дня, когда в порт приходили по 3 судна. Расчет показал, что таких дней должно было быть 2,4. Рассмотренный пример показывает, что и в работе флота должно учитывать влияние случая.

Зачем нужно изучать случайные явления

Приведенные примеры достаточно убедительно показывают, что с игрой случая приходится считаться в большинстве видов человеческой деятельности. Однако убедиться в этом еще не означает, что становится ясной цель изучения случайных явлений. А ведь всегда полезно видеть, к чему следует стремиться, что может дать обществу вновь приобретенное знание. Мы постараемся выяснить этот вопрос на нескольких примерах.

Что может, скажем, дать нам знание закономерностей случайного прихода судов в порт? В первую очередь ясное представление о числе судов, с которыми придется иметь дело. А это уже многое. Действительно, руководитель порта должен так организовать работу, чтобы прибывающие суда не простаивали в ожидании освобождения причала для погрузки или выгрузки. Сколько нужно причалов, если известен грузооборот порта? Если мы поступим чисто арифметически, т. е. разделим количество перерабатываемых грузов на число часов в месяц и число тонн, которое в течение часа способны переработать механизмы порта, то такой подсчет будет ошибочным. Ведь при этом мы не учтем, что моменты подхода судов случайны. Современная теория вероятностей позволяет произвести расчеты так, что будут учтены многие случайные факторы: подходы судов, случайные колебания длительности обработки

Распределение автотранспорта на отдельных участках шоссе неравномерно. Оно подвержено случайным колебаниям.

судна и пр. И при этом можно добиться такого положения, чтобы общая сумма затрат на содержание флота и причалов была минимальной. Таким образом, решение важной экономической задачи опирается на познание случайных явлений.

Когда мы ставим какой-нибудь эксперимент или производим наблюдения, то нас в первую очередь интересует вопрос: сколько измерений нужно произвести или сколько раз следует поставить опыт, чтобы можно было быть уверенным в том, что полученный результат окажется достаточно точным? Поскольку наша задача состоит в том, чтобы уменьшить влияние случайных ошибок измерений, то для исключения влияния случая мы должны знать законы случайных явлений.

Важное и часто встречающееся в практической деятельности использование наших знаний закономерностей случайных явлений проходит по такому пути: о составе большого числа предметов судят по сравнительно небольшой пробе (или, как часто говорят, «выборке»). Так, когда хотят составить представление о длине и крепости волокон хлопка, находящегося в кипе, то совершенно случайно выхватывают из этой кипы небольшой пучок (штапель). По результатам изучения длины и крепости волокон, содержащихся в штапеле, судят о качестве волокна во всей кипе. Этот способ дает прекрасные результаты. И исследование, проведенное буквально над долями грамма, дает надежную основу для назначения последующего технологического процесса, которому должен быть подвергнут хлопок этой партии. Точно таким же способом судят о качестве большой партии зерна по небольшой пробе, взятой из этой партии наудачу. В основе этих широко используемых практических методов лежат общие теоремы теории вероятностей, получившие название *законов больших чисел*.

При современном промышленном производстве зачастую нет возможности проверить качество каждого отдельного изделия, так как либо этих изделий так много, что на их испытание необходимо потратить многие годы, либо изделия таковы, что при испытании приходят в негодность. Поэтому испытывают лишь небольшую долю продукции и по ней судят о качестве всей партии. Как следует выбирать такие доли продукции? Как много изделий следует испытывать? Насколько точные результаты могут быть получены? Все эти вопросы таковы, что на них может дать определенный ответ лишь наука о случае. И практика в наше время этим ответом очень широко пользуется. Оказывается, что разработанные методы дают превосходные результаты, позволяющие экономить средства, материалы, труд и время.

Зарождение науки о случае

Как и все науки, наука о случае начала развиваться тогда, когда в этом появилась потребность, когда задачи практики уже не могли обходиться выводами, сделанными на глаз, а понадобился точный расчет. Первые шаги в создании теории вероятностей — математической науки о случайных явлениях — были сделаны в середине XVII в., в эпоху зарождения новой математики. Почти одновременно были заложены основы аналитической геометрии и появились ростки, давшие вскоре элементы дифференциального и интегрального исчислений — основы всей современной математики. Этот бурный расцвет математики закономерен. Он был вызван крупными сдвигами в общественных отношениях: развитием торговли, промышленного производства, мореплавания.

Первые понятия теории вероятностей формировались под влиянием потребностей страхования и

Когда-то азартные игры помогли возникновению математической теории.

азартных игр. Страхование в ту пору получило широкое распространение из-за непрерывного роста морских сообщений и морской торговли. Азартные игры захватили феодальную верхушку общества. Множество дворян искали в играх способ поправить свои дела. Наряду с большинством бездумных игроков оказались и такие, которые стремились подметить в случайных ситуациях некоторые закономерности. Один из страстных игроков, кавалер де Мере, обратился с рядом возникших у него вопросов к крупнейшему математику и мыслителю того времени Б. Паскалю. Вот один из них. При четырехкратном бросании игральной кости что происходит чаще: выпадет шестерка хотя бы раз или же шестерка не появится ни разу?

Посмотрим, как решается эта задача. При бросании одной игральной кости может выпасть одна из 6 граней. В 5 случаях из 6 выпадает грань без шестерки. Если же мы бросим игральную кость один за другим 4 раза, то возможных сочетаний выпавших граней будет значительно больше. Действительно, при двукратном бросании кости число различных сочетаний выпадения граней при первом и втором бросаниях уже будет $36 = 6^2$ (см. таблицу).

Таблица

(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

При бросании кости трижды будет уже 6^3 различных сочетаний, а при четырехкратном бросании может представиться $6^4 = 1296$ различных возможностей. При скольких же возможных исходах ни разу не появится шестерка? Из нашей таблички видно, что из 36 возможностей при двукратном бросании кости в 25 случаях (5^2) шестерка не появится ни разу. При четырехкратном бросании игральной кости шестерка ни разу не появится в $5^4 = 625$ случаях. Отсюда вытекает, что хотя бы раз при 4 бросаниях шестерка появится в $1296 - 625 = 671$ случае. Таким образом, при четырехкратном бросании игральной кости хотя бы раз шестерка появляется несколько чаще, чем ни разу. Это открытие, согласно воспоминаниям современников, не без успеха было использовано кавалером де Мере.

Возникновение основных понятий теории вероятностей и правил действия с ними связано с именами математиков XVII в. Б. Паскаля, П. Ферма, Х. Гюйгенса и Я. Бернулли.

Те задачи, которые возникали на заре теории вероятностей, сводились примерно к таким ситуациям: при каждом испытании может появиться одно из n одинаково возможных событий. Интересующее нас событие A появляется тогда, и только тогда, когда происходят определенные m из них. Пример: при бросании четырех костей возможны 1296 различных состояний; из них 625 таковы, что при каждом из них ни разу не выпадает шестерка.

Число случаев, при которых наступает интересующее нас событие A, дает нам средство оценки того, как часто оно может наступить при реальных испытаниях. Однако такой способ оценки неудобен, и в науку было введено следующее понятие: *вероятностью события A называется отношение числа случаев, при которых событие A наступает, к числу всех возможных случаев.* Вероятность события A мы обозначим символом $P\{A\}$. Итак, по определению

$$P\{A\} = \frac{m}{n}.$$

В нашем примере вероятность того, что при 4 бросаниях ни разу не выпадет шестерка, равна:

$$P\{A\} = \frac{625}{1296}.$$

Вероятность же того, что шестерка выпадет хотя бы один раз, равна $\frac{671}{1296}$.

Рассмотрим теперь еще одну задачу, относящуюся ко времени возникновения теории вероятностей. (Рассказывают, что с этой задачей обратился к Х. Гюйгенсу один из ландскнехтов — наемных солдат.) При одновременном бросании трех игральных костей какая сумма выпавших на них очков должна появляться чаще — 11 или 12? Ландскнехт заметил, что и та и другая сумма может осуществиться шестью различными способами, а именно:

$$11=1+4+6=1+5+5=2+3+6=2+4+5=$$
$$=3+3+5=3+4+4,$$
$$12=1+5+6=2+5+5=2+4+6=3+3+6=$$
$$=3+4+5=4+4+4.$$

Словами: сумма 11 может появиться только тогда, когда или на одной из костей появляется 1, на другой — 4 и на третьей — 6, или и т. д. Точно так же 12 может появиться только тогда, когда или на одной кости появится 1, на другой — 5, на третьей — 6, или и т. д.

Казалось бы, 11 и 12 должны появляться одинаково часто, предполагал ландскнехт, однако его долголетний опыт учит другому: 11 появляется несколько чаще, чем 12. В чем же здесь причина?

Мы уже знаем, что всех различных исходов при бросании трех игральных костей будет 216. Теперь задача состоит в том, чтобы подсчитать число всех одинаково возможных исходов, при которых в сумме появляется 11 и 12. Мы увидим при этом, что одинаковое число разложений 11 и 12 на сумму трех слагаемых еще не является достаточным основанием для заключения равенства вероятностей этих событий. Все дело в том, что не все эти суммы одинаково часто встречаются. Так, все суммы, в которых все три слагаемых различны при подсчете числа возможных исходов, должны быть взяты с бóльшим весом, чем остальные. Действительно, разложение 11 на сумму слагаемых $1+4+6$ может произойти шестью различными способами: (1, 4, 6), (1, 6, 4), (4, 1, 6), (4, 6, 1), (6, 1, 4), (6, 4, 1). Мы мысленно нумеруем кости и на первом месте указываем число очков, выпавших на первой кости, на втором — на второй кости и на третьем — на третьей.

Точно так же суммы, в которых два слагаемых одинаковы, например $1+5+5$, могут осуществиться лишь тремя различными способами: (1, 5, 5), (5, 1, 5), (5, 5, 1). И наконец, сумма $4+4+4$ осуществляется одним-единственным способом: (4, 4, 4).

Если теперь учтем только что сказанное, то окажется, что число случаев, при которых в сумме появляется 11, равно: $6+6+6+3+3+3=27$, а при которых появляется 12, равно: $6+6+6+3+3+1=25$. Таким образом, получаем:

$$P\{11\}=\frac{27}{216}, \quad P\{12\}=\frac{25}{216}.$$

Мы теперь же должны сказать, что расширение области применений теории вероятностей убедительно показало недостаточность того классического определения вероятности, которым мы пользовались, и установило необходимость широкого его обобщения. Такое обобщение сейчас уже произведено, и пока оно удовлетворяет всем запросам как практиков, так и теоретиков. Тем не менее классическое определение вероятности оказалось исключительно полезным для современного естествознания — оно лежит в основе многих важных выводов.

Теоремы сложения и умножения вероятностей

Прежде всего рассмотрим две важные формулы, которые лежат в основе действий с вероятностями. Эти формулы носят название теорем сложения и умножения вероятностей.

Пусть два события A и B таковы, что при каждом испытании может появиться только одно из них или же ни одного, а вместе появиться они не могут. Такие события называются *несовместными*. Теорема сложения утверждает, что если A и B несовместны, то

$$P\{A \text{ или } B\}=P\{A\}+P\{B\}$$

Представим теперь себе, что события A и B таковы, что наступление одного из них не изменяет вероятности наступления другого. Такие события называются *независимыми*. Для независимых событий имеет место теорема умножения, состоящая в следующем:

$$P\{A \text{ и } B\}=P\{A\}\cdot P\{B\}$$

Рассмотрим для иллюстрации следующую задачу, с которой в настоящее время приходится часто встречаться при организации производства. Ремонтный рабочий обслуживает 6 механизмов, каждый из которых независимо от других может выйти из нормального рабочего режима и потребовать к себе внимания. Вероятность выхода каждого из механизмов за период длительности T равна p. Чему равна вероятность того, что за период длительности T из рабочего режима выйдет не более двух механизмов?

Вероятность того, что данный механизм за весь период работы не выйдет из нормального рабочего состояния, равна $1-p$. По теореме умножения вероятность того, что все шесть механизмов проработают

благополучно, равна $(1-p)^6$. Вероятность того, что определенный механизм выйдет из нормального состояния работы, а остальные пять будут работать хорошо, равна по теореме умножения $p(1-p)^5$. Механизмом, потребовавшим внимания, может оказаться любой из шести, поэтому вероятность того, что из строя выйдет только один механизм (безразлично какой), равна по теореме сложения $6p(1-p)^5$.

Вычислим еще вероятность того, что какие-то два механизма выйдут из рабочего состояния, а остальные четыре будут работать нормально. С этой целью заметим, что по теореме умножения вероятность выхода из строя двух определенных механизмов и нормальной работы остальных четырех равна $p^2(1-p)^4$. Но два механизма из шести можно выбрать $C_6^2=15$ различными способами. Для каждого из них вероятность уже вычислена. В результате по теореме сложения искомая вероятность равна $15p^2(1-p)^4$.

Так как интересующее нас событие (выход из нормального рабочего состояния не более чем двух механизмов) может осуществиться следующими несовместимыми способами: все механизмы будут работать безотказно, откажет лишь один механизм, откажут в точности два механизма, то его вероятность по теореме сложения равна:

$$(1-p)^6+6p(1-p)^5+15p^2(1-p)^4.$$

Если, для примера, вероятность выхода механизма из нормального рабочего состояния равна 0,2, то вероятность того, что за указанный срок:

все механизмы будут работать нормально, равна 0,262144;

только один механизм выйдет из строя, равна 0,393216;

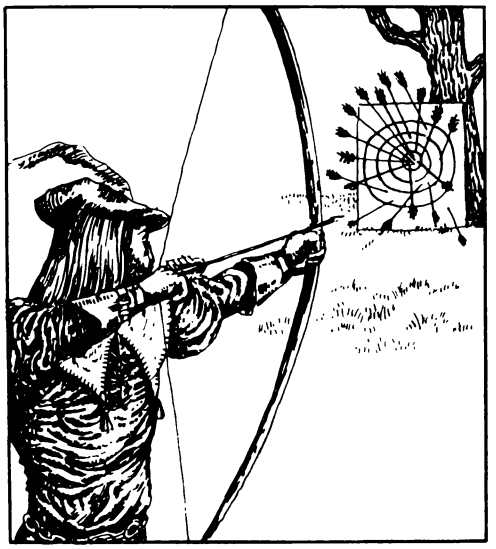
только два механизма выйдут из строя, равна 0,245760.

Таким образом, при указанных условиях работы искомая вероятность равна 0,90112.

Дополнительные исторические сведения

Конец XVIII и XIX век принесли множество новых задач, связанных со случайными явлениями. Прежде всего бурное развитие астрономии, физики, химии, точных технических измерений со всей остротой поставило задачу построения теории ошибок измерений. Почти одновременно основы современной теории ошибок наблюдений были созданы двумя крупнейшими математиками — А. Лежандром и К. Гауссом. Далее,

При многократной стрельбе по мишени попадания выявляют определенную закономерность.



развитие военного дела потребовало развития теории стрельбы. Пока стрельба велась на малые расстояния по видимым целям, задача прицела, например, не играла решающей роли. Исключительное значение для прогресса всего естествознания и науки о случайных явлениях имело развитие молекулярных концепций в физике. Создание кинетической теории газов с особой силой потребовало систематического изучения теории случайных величин.

Такие выдающиеся математики, как П. Лаплас, С. Пуассон, П. Л. Чебышёв, А. М. Ляпунов, А. А. Марков, обогатили теорию вероятностей рядом замечательных открытий.

Вместе с тем во второй половине XIX в. стала все сильнее ощущаться необходимость создания новой математической дисциплины, которая получила название *математической статистики*. Среди простейших вопросов, которые относятся к ней, упомянем лишь следующий. Допустим, нам неизвестна вероятность p случайного события A. Как оценить ее значение? С этой целью производят некоторое число n независимых испытаний, в каждом из которых событие A появляется с неизменной вероятностью p, нам неизвестной. Далее подсчитывают число появлений события A. Отношение этого числа к n дает нужную оценку.

В наши дни математическая статистика приобрела особенно большое значение. На ее правилах и результатах основаны, в частности, методы анализа производственных процессов, текущий и приемочный статистический контроль качества массовой промышленной продукции, оценка наличия или отсутствия сигнала на фоне шума и пр.

Закон больших чисел

Мы ограничимся здесь формулировкой двух теорем, получивших многочисленные теоретические и практические применения. Первая из них была доказана Я. Бернулли и опубликована в 1713 г.

Производится последовательность независимых испытаний, в каждом из которых событие A может произойти с одной и той же вероятностью p. Пусть среди первых n испытаний событие A наступило в некоторых m. Тогда, как бы мало ни было взято $\varepsilon > 0$,

$$P\left\{\left|\frac{m}{n} - p\right| > \varepsilon\right\} \leqslant \frac{1}{4n\varepsilon^2}.$$

Таким образом, если взять n достаточно большим, то вероятность неравенства

$$\left|\frac{m}{n} - p\right| > \varepsilon$$

становится как угодно малой. А так как события с малой вероятностью имеют мало шансов наступить, то мы видим, что при больших n, как правило, отношение $\frac{m}{n}$ будет близко к p.

Теорема Я. Бернулли служит базой для приближенной оценки неизвестных вероятностей случайных событий. Длительные наблюдения над рождениями установили, что в среднем на каждую 1000 рождений приходится 511 мальчиков и 489 девочек. Отсюда делается вывод, что вероятность рождения мальчика приблизительно равна 0,511. По вероятности рождения мальчика делаются серьезные прогнозы о составе населения.

Все страховое дело построено на определении статистическим путем (посредством теоремы Бернулли) вероятностей различных событий: смерти лица определенной профессии в течение определенного года его жизни, гибели от пожара дома, гибели посевов от града и т. д. На этой базе рассчитываются страховые взносы. Эти расчеты оказываются настолько точными, что страховые общества не разоряются, а приносят систематический доход.

Вторая теорема доказана П. Л. Чебышёвым в 1867 г. Его доказательство просто и изящно, оно вполне доступно учащимся IX класса. Мы ограничиваемся формулировкой лишь частного случая теоремы.

Предположим, что случайная величина ξ может принимать значения

$$x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$$

соответственно с вероятностями

$$p_1,\ p_2,\ \ldots\ p_n\ (p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1).$$

Средним значением (математическим ожиданием) случайной величины ξ называется сумма

$$a = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \ldots + p_n x_n.$$

Представим теперь себе, что имеется последовательность независимых случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k, \ldots$, каждая из которых имеет среднее значение, равное a, и все случайные величины ограничены некоторым числом c. При этих условиях для любого $\varepsilon > 0$ имеет место неравенство:

$$P\left\{\left|\frac{\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_k}{k} - a\right| > \varepsilon\right\} \leqslant \frac{c^2}{k\varepsilon^2}.$$

Таким образом, среднее арифметическое независимых случайных величин при большом числе слагаемых становится почти постоянным. Это обстоятельство исключительно важно, оно находит широкое и разнообразное использование на практике.

Пусть, для примера, ξ_k есть результат k-го измерения некоторой величины a, лишенного систематической ошибки (например, постоянной ошибки измерительного прибора). Закон больших чисел утверждает, что для получения приближенного значения измеряемой величины следует взять среднее арифметическое из результатов измерений, и чем измерений больше, тем среднее арифметическое будет ближе к измеряемой величине.

В качестве другого примера рассмотрим давление газа на стенку заключающего его сосуда. Это давление есть результат суммарного воздействия ударов отдельных молекул о стенку. Число этих ударов в единицу времени и их сила — дело случая. Таким образом, давление в каждой части поверхности сосуда подвергается случайным колебаниям. Но так как давление складывается из колоссального числа ударов отдельных частиц, то среднее арифметическое отдельных производимых ими давлений, согласно закону больших чисел, практически достоверно является почти постоянной величиной. Отсюда вытекает, что давление газа в нормальных условиях (для не слишком разреженных газов) лишь ничтожно мало колеблется около некоторой постоянной величины. Но это утверждение мы знаем из физики под названием закона Паскаля. Таким образом, мы закон Паскаля получили не как опытный факт, а как результат теории, как следствие из общей теоремы теории вероятностей, из теоремы Чебышёва.

Заметим, что теорема Чебышёва содержит в себе теорему Бернулли как простейший частный случай, когда все случайные величины могут принимать лишь два значения — 0 и 1, соответственно с вероятностями $1 - p$ и p.

Некоторые современные направления развития теории вероятностей

Основные понятия современной теории вероятностей — понятия случайного процесса, случайного поля, информации. Физика, химика, биолога и техника интересует в первую очередь изучение процессов, т. е. явлений, протекающих во времени. Так, при изучении химической реакции или же в технологических процессах на химическом предприятии нас всегда интересует, как при заданных условиях эта реакция протекает во времени, какая часть вещества уже вступила в реакцию, когда практически реакция уже закончилась.

Представим себе, что мы задались целью проследить за движением какой-либо молекулы газа или жидкости. В случайные моменты времени эта молекула сталкивается с другими молекулами, меняет при этом свою скорость и направление движения. Ряд физических задач требует для своего решения умения вычислять вероятности того, как много молекул успеет за тот или иной промежуток времени передвинуться на то или иное расстояние. Так, например, если приведены в соприкосновение две жидкости, то начинается взаимное проникновение молекул одной жидкости в другую — происходит диффузия. Как быстро протекает процесс диффузии, по каким законам, когда образующаяся смесь газов становится практически однородной? На все эти вопросы дает ответ статистическая теория диффузии, в основе которой лежат вероятностные расчеты.

Весьма важный круг явлений происходит по принципу радиоактивного распада. Это явление, как известно, состоит в том, что в случайные моменты времени какие-то атомы радиоактивного вещества распадаются, превращаясь в атомы другого вещества. Каждый распад происходит подобно взрыву, с выделением некоторой энергии. Если масса распадающегося вещества не слишком велика (меньше определенной величины, называемой критической), то распады атомов, как показывают многочисленные наблюдения, происходят независимо друг от друга. Для изучения процесса радиоактивного распада весьма важно определить вероятность того, что за определенный промежуток времени распадается то или иное число атомов. Впрочем, в точности такая задача возникает в телефонном деле, при проектировании пропускной способности мостов, в теории надежности, в экономике, в военном деле, в технике. Независимо от конкретного воплощения вопрос, который постоянно возникает, ставится так: как велика вероятность того, что за определенный промежуток времени наступит некоторое число определенных событий (вызовов абонентов на телефонную станцию; машин, которым требуется пересечь мост; отказов элементов, из которых составлено сложное оборудование, и т. д.)? При весьма широких условиях искомая вероятность может быть вычислена по формуле:

$$P_k(t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}.$$

Здесь $P_k(t)$ означает вероятность того, что за промежуток времени t произойдет ровно k событий; λ — постоянная, так называемая интенсивность наступления событий, $e = 2{,}71828...$, $k! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot k$.

В начале статьи была приведена табличка приходов судов в Одесский порт. Нижняя строка ее вычислялась как раз по этой формуле. Эта же формула широко используется в физике для подсчета числа космических частиц, попадающих на определенный участок земной поверхности за время t. Она же служит для вычисления числа ламп в электронной вычислительной машине, которые перегорят за срок t. Эта формула дает прекрасное совпадение с фактически наблюдаемым числом вызовов на телефонной станции.

Рассмотрение задач естествознания не с точки зрения качественного, а с позиций их количественного изучения привело к формированию понятия случайного процесса. Первые идеи в этом направлении были высказаны биологами и физиками еще в конце прошлого века. Более определенную форму они приняли в работах физиков А. Фоккера и М. Планка. Однако точное определение случайного процесса и начала теории были построены А. Н. Колмогоровым и А. Я. Хинчиным. Первому из них принадлежит заслуга в создании основ так называемых *марковских процессов*, второму — *стационарных процессов*.

Теория вероятностей — наука о случайных явлениях — в настоящее время находится на крутом подъеме. К ней теперь обращаются физики и астрономы, экономисты и лингвисты, биологи и врачи. Без нее не может быть глубокого познания процессов образования помех при радиовещании, правильного расчета организации производства, создания рациональных способов приема больших партий продукции, расчета запасов и средств обороны.

Прогресс теории вероятностей и ее применений требует непрерывного пополнения творчески работающих в ней математиков способной молодежью. Несомненно, среди читателей этой книги будет и та часть молодежи, которая даст новых Лапласов и Чебышёвых.

Теория игр

Чем занимается теория игр

Что такое теория игр?

Это математическая теория конфликтов.

А что такое конфликт?

Это такая ситуация (положение, стечение обстоятельств), в которой сталкиваются интересы сторон, происходит борьба интересов. Каждый из участников хочет чего-то своего, не того, чего хочет другой (или другие).

Самые простые примеры конфликтов — это игры (шашки, шахматы, различные спортивные игры). Они отличаются тем, что ведутся по определенным правилам. Правила игры — это система условий, указывающих, какие возможности предоставляются игрокам (перечень возможных ходов) и к какому результату (выигрышу, проигрышу) приводит каждая данная совокупность ходов.

Далеко не каждый встречающийся на практике конфликт протекает по правилам. Чтобы сделать возможным математический анализ конфликта, нужно представить конфликт в игровой форме, т. е. указать *стратегии* (образы действий), возможные для участников, и уточнить, к какому результату приведет игра, если каждый из игроков выберет определенную стратегию. Таким образом, игра есть конфликт с четко сформулированными условиями.

Часто бывает так, что результат конфликта — даже при вполне определенных стратегиях участников — предсказать в точности нельзя, так как он зависит от случая. Такими случайными обстоятельствами, вмешивающимися в ход игры, могут быть, например, тасовка и сдача карт, попадание или непопадание в цель при стрельбе и т. п. Тогда вместо «результата игры» нужно говорить о *среднем результате*, т. е. о результате, приходящемся в среднем на одну партию игры, если будет сыграно достаточно большое количество партий. Действительно, в одной партии может случайно «повезти» и игроку, применяющему явно неразумную стратегию. Если же партий будет много, то *в среднем* выигрывает тот, кто ведет себя разумно.

Когда мы говорим о результате, или среднем результате, игры, то предполагаем, что этот результат выражается определенным *числом*. А всегда ли это бывает так? Не всегда. Например, в шахматах мы не всегда выражаем результат числом, а просто говорим: выигрыш, проигрыш, ничья. Но ведь можно условиться и перевести их в числовую форму, например выигрышу приписать значение $+1$, проигрышу -1, ничьей 0.

Мы будем предполагать, что в любом конфликте выигрыш (проигрыш) каждого из игроков выражается числом. Тогда основную задачу теории игр можно сформулировать так: *как должен вести себя (какую стратегию применять) разумный игрок в конфликте с разумным противником (или противниками), чтобы обеспечить себе в среднем наибольший возможный выигрыш?*

Парная игра с нулевой суммой. Цена игры

Если в конфликте участвуют две стороны, игра называется *парной*, если несколько — *множественной*. Парные игры проще множественных и имеют большее практическое значение. Мы ограничимся только парными играми. Заметим, что игра между двумя командами игроков, преследующими противоположные цели, равносильна парной игре.

Каждую парную игру будем рассматривать как конфликт между двумя игроками: K («красные») и C («синие»). Для удобства рассуждений, чтобы иметь какую-то определенную точку зрения, будем обычно становиться на сторону одного из игроков (пусть это будет K) и говорить о нем «мы», а о другом — «противник». Это не означает, что сторона K будет иметь какое-нибудь реальное преимущество. Просто нам так будет удобнее.

Игра называется *игрой с нулевой суммой*, если одна сторона выигрывает то, что проигрывает другая, т. е. сумма выигрышей K и C равна нулю. В жизни часто встречаются конфликты, в которых это условие не соблюдается. Например, в военном столкновении вполне возможно, что проигрывают обе стороны. Однако во многих случаях можно, не слишком искажая сущность явления, рассматривать парные конфликты как игры с нулевой суммой.

Итак, допустим, что интересы K и C строго противоположны и сумма выигрышей равна нулю. Это будет для нас очень удобно в вычислительном смысле. Еще бы! Ведь если выигрыш K равен по величине и противоположен по знаку выигрышу C, то можно рассматривать выигрыш только одного из игроков: выигрыш другого определится автоматически.

Давайте выберем в качестве «выигрывающего» игрока K. Игрок K заинтересован в том, чтобы обратить свой выигрыш (обозначим его k) в максимум (сделать его наибольшим). Игрок C, наоборот, заинтересован в том, чтобы обратить его в минимум (сделать наименьшим). Каждый из игроков K и C, пре-

следуя свою цель, принимает все меры к тому, чтобы ему было лучше, а сопернику хуже.

В результате борьбы интересов, если оба противника одинаково разумны, по-видимому, должно быть найдено некоторое *равновесное положение,* при котором каждый игрок получит то, что ему причитается, — не больше и не меньше. Этот равновесный средний выигрыш, на который вправе рассчитывать игрок K, если обе стороны будут вести себя разумно, т. е. придерживаться своих оптимальных (наилучших) стратегий, называется *ценой игры.*

Если цена игры равна нулю, — значит, это справедливая игра, т. е. она в одинаковой мере выгодна или невыгодна той и другой стороне. Если цена игры положительна, — значит, игра выгодна для K. Если отрицательна, придется признать, что она выгодна для C...

Решить игру — это значит найти пару оптимальных стратегий (для K и C) и цену игры, т. е. средний выигрыш игрока K, если оба — и K и C — будут вести себя разумно.

А если разумно будет вести себя только K, а не C? Ну что же — тем хуже для C! Выигрыш K от этого уменьшиться не может. В худшем случае он останется таким же, а в лучшем — увеличится.

Игра в нормальной форме. Матрица игры

Мы будем рассматривать только *конечные игры,* т. е. такие, в которых каждый участник располагает конечным числом стратегий.

Если у игрока K имеется в распоряжении m стратегий, а у игрока C — n стратегий, игра называется игрой $m \times n$.

Правила игры можно записать в виде следующей таблицы (или *матрицы*), в которой m строк и n столбцов:

		Стратегии «синих»			
		C_1	C_2	. . . . .	C_n
Стратегии «красных»	K_1	k_{11}	k_{12}	. . . . .	k_{1n}
	K_2	k_{21}	k_{22}	. . . . .	k_{2n}
	.	.	.	. . . . .	.
	.	.	.	. . . . .	.
	.	.	.	. . . . .	.
	Km	k_{m_1}	k_{m_2}		k_{mn}

Игра «Осада и оборона города»

«Красные» стремятся занять город, «синие» обороняют его. У «красных» — два отряда, каждый из которых они могут направить по любой из двух дорог — I и II, ведущих к городу. У «синих» три отряда, которые могут разместиться произвольным образом на любой из двух дорог. Никто из противников не осведомлен об образе действий другого. Условия таковы: если на дороге встречаются равные силы «красных» и «синих», то в 50% случаев «красные» побеждают и занимают город, в 50% — отступают. Если «красные» встречаются с превосходящими силами «синих» (один отряд — с двумя или два — с тремя), они отступают. Определить, как должны распорядиться своими отрядами «красные» и «синие», чтобы обеспечить себе наилучшие возможные результаты игры.

У «красных» три стратегии:

K_1 — послать оба отряда по дороге I,

K_2 — послать оба отряда по дороге II,

K_3 — послать на каждую дорогу по одному отряду.

У «синих» — четыре стратегии:

C_1 — поставить все три отряда на дорогу I,

C_2 — поставить все три отряда на дорогу II,

C_3 — поставить два отряда на дорогу I, а один — на дорогу II,

C_4 — поставить два отряда на дорогу II, а один — на дорогу I.

Выигрышем будем считать процент случаев, когда «красным» удается занять город.

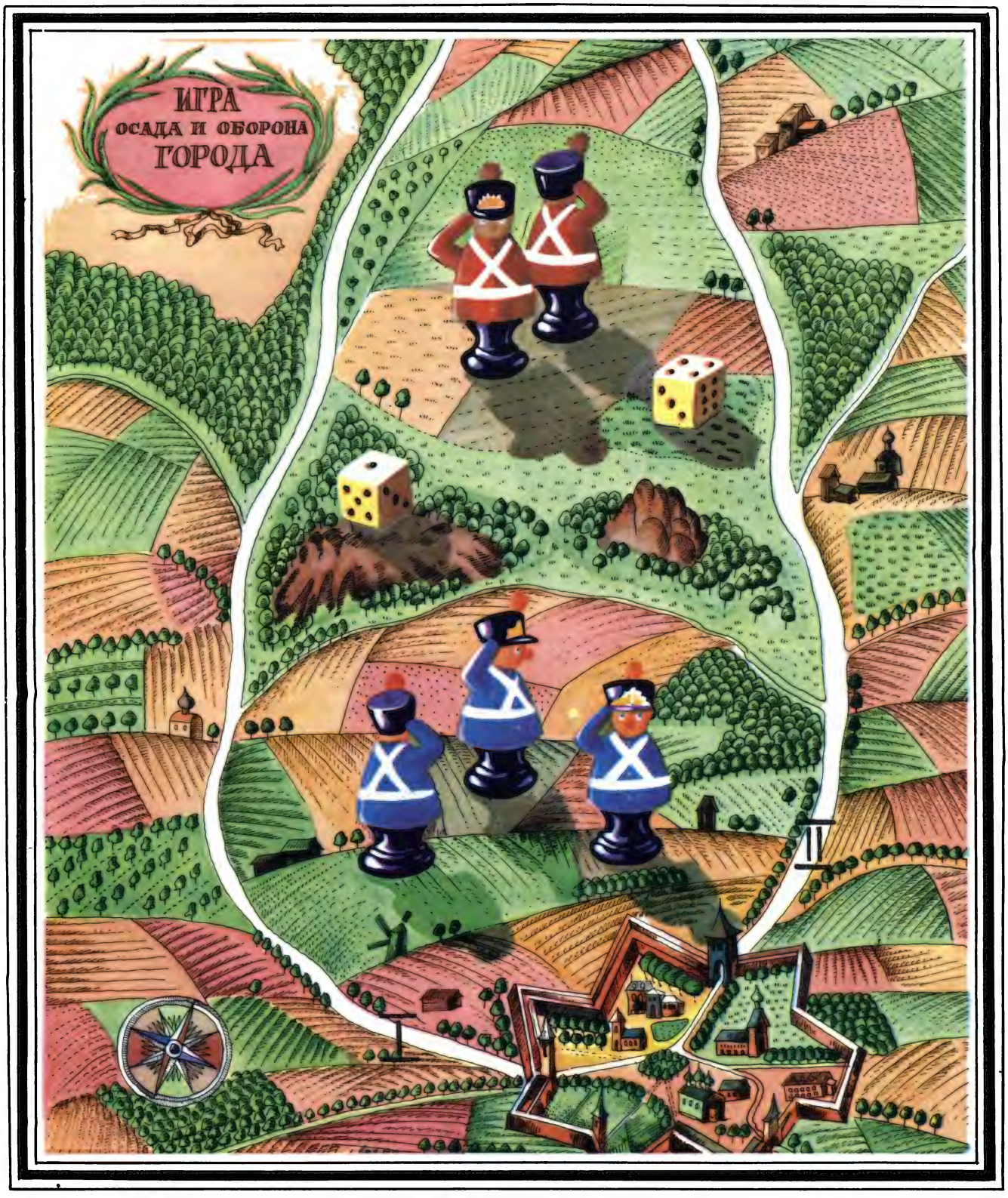
Матрица игры будет иметь вид ($\alpha = 50\%$, $\beta = 100\%$; об α и β см. стр. 434):

	C_1	C_2	C_3	C_4	Минимумы строк
K_1	0%	100%	50%	100%	0%
K_2	100%	0%	100%	50%	0%
K_3	100%	100%	50%	50%	50%
Максимумы столбцов	100%	100%	100%	100%	

Ищем решение в смешанных стратегиях. Сразу же замечаем, что стратегии K_1 и K_2 симметричны и, значит, должны входить в решение с одинаковыми частотами:

$$p_1 = p_2.$$

Объединим эти две стратегии в одну K_{12}, которая состоит в применении K_1 и K_2 с одинаковыми частотами. Выигрыш будет средним арифметическим соответствующих строк. Матрица примет вид:


ИГРА
ОСАДА И ОБОРОНА
ГОРОДА

Строки соответствуют стратегиям «красных», которые мы обозначим: $K_1, K_2, \ldots, K_m$, а столбцы — стратегиям «синих»: $C_1, C_2, \ldots, C_n$.

В клетках таблицы помещены выигрыши (или средние выигрыши) «красных» при соответствующей паре стратегий. Например, k_{12} — выигрыш, который получат «красные», если выберут стратегию K_1, а «синие» — C_2; вообще, k_{ij} — выигрыш «красных» при комбинации стратегий K_i и C_j.

Такая таблица называется *платежной матрицей* или просто *матрицей игры*.

Если конечная игра записана в виде такой матрицы, то говорят, что она *приведена к нормальной форме*.

Но попробуйте, например, записать в нормальной форме обыкновенные шахматы! Вы сразу столкнетесь с тем, что количество возможных стратегий необозримо велико — настолько велико, что их перечисление выходит за пределы возможностей не только человека, но и современной вычислительной машины.

А жаль! Потому что, если бы построение матрицы шахматной игры было возможно, это имело бы очень любопытные последствия... Но не будем забегать вперед.

Примеры конечных игр. Принцип минимакса

Приведем несколько примеров конечных игр. Каждую из них мы запишем в нормальной форме.

Пример 1. Рассматривается игра, которую назовем «Поиск». В ней участвуют две стороны: K и C. K хочет найти C; C, наоборот, хочет спрятаться от K.

У C есть два места — убежища I и II, где он может прятаться. Выбирает он себе любое убежище. Игрок K по правилам игры тоже может искать C где ему вздумается. Если он нашел C, то C проиграл одно очко, если не нашел, т. е. пошел не в то убежище, где спрятался C, то, наоборот, K проиграл одно очко. Требуется записать игру в нормальной форме.

Решение. У K — две стратегии:

K_1 — искать в убежище I,

K_2 — искать в убежище II.

У C — тоже две стратегии:

C_1 — прятаться в убежище I,

C_2 — прятаться в убежище II.

	C_1	C_2	C_3	C_4
K_{12}	50%	50%	75%	75%
K_3	100%	100%	50%	50%

Поступим так же со стратегиями «синих», т. е. объединим C_1 и C_2, C_3 и C_4. Получим игру 2×2:

	C_{12}	C_{34}
K_{12}	50%	75%
K_3	100%	50%

Решение этой игры будет:

$$S_k^* = \begin{pmatrix} K_{12} & K_3 \\ 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}; \quad S_C^* = \begin{pmatrix} C_{12} & C_{31} \\ 1/3 & 2/3 \end{pmatrix},$$

т. е. «красные» должны одинаково часто применять каждую из своих стратегий (K_{12} — ставить оба отряда на какую-то одну из дорог и K_3 — ставить по одному отряду на каждую дорогу), «синие» — в одной трети всех случаев пользоваться стратегией C_{12}, т. е. посылать все три отряда на одну (любую) из дорог, а в остальных двух третях распределять их по дорогам так: два на одну и один на другую (стратегия C_{34}).

Для розыгрыша стратегии можно бросить обычную игральную кость: если выпадет 1, 2, 3 или 4 — применять K_{12}, если 5 или 6 — применять K_3.

Ответ к стр. 416.

1) 849+753=1602;
2) 1089−432=657;
3) 7039 · 4=28 156;
4) 27504 : 9168=3;

$$\frac{50}{4 \cdot 7 - 8} = \frac{9+1}{\sqrt[3]{26}}.$$

В каждом равенстве, как видите, присутствуют все 10 цифр. Возможны и другие решения.

Решение к стр. 416.

$$(121)_B = 1 \cdot B^2 + 2 \cdot B + 1 \cdot B_0 = \\ = B^2 + 2B + 1 = (B+1)^2.$$

Игра — конечная 2×2, матрица игры будет:

	C_1	C_2
K_1	1	—1
K_2	—1	1

К этой игре мы еще вернемся в дальнейшем и найдем ее решение. А пока что просто порассуждаем за игрока K. Представим себе, что мы игрок K и что нам предлагается выбрать себе стратегию. Что ж, попробуем! Выберем, например, K_1, т. е. будем искать всегда в убежище I. Но тогда разумный противник через несколько партий догадается о нашей стратегии и будет прятаться там, где мы его не ищем, т. е. в убежище II. Плохо! Выберем теперь стратегию K_2.

Ничуть не лучше: противник снова догадается и будет прятаться в убежище I. Что же нам делать? Попробуем применять стратегии K_1 и K_2 попеременно, через одну партию игры. Но ведь противник и об этом может догадаться и будет прятаться каждый раз не там, где мы его ищем. Как ни кинь — все клин!

Что же, значит, наше положение безвыходно? При любом выборе стратегии нам придется проигрывать? Выходит, что так.

Давайте теперь встанем на точку зрения противника. С удивлением мы обнаружим, что его положение ничуть не лучше нашего! Какую бы стратегию он ни выбрал — все ему невыгодно.

Позже мы с вами решим эту игру, т. е. найдем пару оптимальных стратегий K и C. Впрочем, о них можно по секрету сообщить заранее: каждому игроку надо будет чередовать свои стратегии, но не регулярно (через одну), а *случайным образом* (например, подбросить монету и, если она упадет гербом, искать в убежище I, а если цифрой — в убежище II). Аналогично должен будет действовать и C. При этом в среднем на одну партию будет приходиться нулевой выигрыш (цена этой игры будет равна нулю): K не будет ни выигрывать, ни проигрывать. Не очень приятно, но все-таки много лучше, чем всегда быть в проигрыше!

Здесь мы впервые столкнулись с одним из важных понятий теории игр — с понятием *смешанной стратегии*, т. е. чередования нескольких «чистых» стратегий по случайному закону в определенных пропорциях, или, как говорят, с определенными *частотами*. В данном примере каждая из стратегий применяется с частотой $^1/_2$.

Рассмотрим теперь другую игру, решение которой уже не будет столь очевидным.

Пример 2. Игра «Три пальца».

Два игрока K и C одновременно и не сговариваясь показывают друг другу один, два или три пальца. Если общее число показанных пальцев (первым и вторым игроками вместе) будет четное, то выигрывает K: он получает столько очков, сколько всего было пальцев, если нечетное — выигрывает C, на тех же условиях. Требуется записать игру в нормальной форме.

Решение. Перенумеруем стратегии по числу показанных пальцев. Игра 3×3. Матрица игры будет:

	C_1	C_2	C_3
K_1	2	—3	4
K_2	—3	4	—5
K_3	4	—5	6

Поразмыслим немного над стратегиями каждой стороны. Станем сначала на сторону K. Предположим, что мы выбрали стратегию K_1. Что будет делать противник? Он разумен и хочет отдать поменьше. Ясно, он выберет стратегию C_2; наш выигрыш при этом будет равен —3, т. е. мы потеряем 3 очка. Плоховато! Запишем число —3 против первой строки в добавочном столбце (минимумы строк).

	C_1	C_2	C_3	Минимумы строк
K_1	2	—3	4	—3*
K_2	—3	4	—5	—5
K_3	4	—5	6	—5
Максимумы столбцов	4*	4*	6	

Попробуем другую стратегию $-K_2$. На нее разумный противник ответит C_3. Мы тогда потеряем 5 очков. Еще хуже! Третья стратегия — K_3 — дает точно тот же результат: выигрыш (—5).

Что же делать? Пожалуй, лучше других будет все-таки стратегия K_1 — при ней мы по крайней мере не проиграем больше 3 очков! Ведь против этой стратегии стоит максимальное число дополнительного столбца — в таблице мы его отметили звездочкой.

Выбрав стратегию K_1, мы гарантируем себе, что, как бы ни вел себя противник, мы никак не проиграем больше 3 очков (т. е. не выиграем меньше (—3) очков). Величина (—3) есть максимальный гарантированный выигрыш, который мы («красные») можем себе обеспечить, применяя только одну-единственную стратегию. Такой стратегией должна быть K_1.

Как мы получили (−3)? Нашли минимум каждой строки и из этих минимумов взяли максимальный. Эта величина называется *максимином* или *нижней ценой игры*. Будем обозначать ее α.

Подумаем теперь за противника. Он тоже хочет отдать поменьше, а получить побольше. Но, какую бы он стратегию ни выбрал, мы («красные») поведем себя таким образом, чтобы получить с него побольше. Значит, противник («синие») должен в каждом столбце выписать не минимальное, а максимальное число (см. нижнюю добавочную строку в матрице).

Из этих максимумов он должен найти минимальный (он называется *минимаксом* или *верхней ценой игры*); обозначим его β. Эта величина в нашем случае равна 4 и отмечена звездочкой. Чтобы не проиграть больше 4, «синие» должны придерживаться любой из своих двух стратегий C_1, C_2.

Значит, если каждому участнику предлагается выбрать одну-единственную стратегию, то эти стратегии должны быть K_1 для «красных» и C_1 или C_2 для «синих».

Как мы выбрали эти стратегии? Руководствуясь принципом осторожности, который говорит: *в игре веди себя так, чтобы получить наибольшую выгоду при наихудших для тебя действиях противника.* Этот принцип называется *принципом минимакса* и является в теории игр основным.

Применяя этот принцип, мы пока что рекомендовали игроку K показывать один палец, игроку C — показывать один или два пальца.

Но нашли ли мы решение игры, т. е. такую пару стратегий, которая является *равновесным* положением? Легко убедиться, что нет. Найденные нами стратегии обладают досадным свойством: они *неустойчивы*.

Действительно, пусть оба игрока держатся рекомендованных чистых стратегий: K_1 и, скажем, C_1. Пока оба держатся этих стратегий, выигрыш будет равен 2, т. е. на каждую партию игры C проигрывает K два очка. K, может быть, и доволен, но C досадно. Он не хочет проигрывать. Допустим, он откуда-то узнал, что мы придерживаемся стратегии K_1. Что он будет делать? Разумеется, немедленно перейдет к стратегии C_2 и будет получать по 3 очка, т. е. сведет наш выигрыш к −3. А если мы теперь узнаем о поведении C? Перейдем на стратегию K_2. В ответ на это C перейдет на стратегию C_3. И т. д.

Мы убедились, что пара стратегий, вытекающих из принципа минимакса, неустойчива: стоит одному игроку узнать, что делает другой, как равновесие нарушается...

Всегда ли это будет так? Оказывается, не всегда.

Седловая точка. Чистая цена игры

Рассмотрим пример. Пусть дана матрица игры:

	C_1	C_2	C_3	C_4	Минимумы строк
K_1	10	1	2	1	1
K_2	6	8	5	6	5*
K_3	2	4	4	8	2
Максимумы столбцов	10	8	5*	8	

Требуется найти нижнюю цену игры α, верхнюю цену игры β и минимаксные стратегии и проверить, являются ли они устойчивыми.

Решение. Из анализа дополнительных столбца и строки получаем: $\alpha = 5$, $\beta = 5$. Максимин равен минимаксу! Что же из этого следует?

Возьмем пару минимаксных стратегий: K_2 и C_3. Если оба держатся этих стратегий, то выигрыш будет равен 5. Теперь допустим, что узнали о поведении противника. Что будем делать? А ничего! Мы по-прежнему будем держаться стратегии K_2, потому что любое отступление от нее нам невыгодно. Знаем мы или не знаем о поведении противника — все равно будем держаться стратегии K_2! То же относится и к «синим» — им нет смысла менять стратегию C_3.

В данном примере пара стратегий K_2 и C_3 *устойчива*, т. е. представляет собой положение равновесия и дает решение игры.

Почему так получилось? Потому что в матрице имеется особый элемент 5; он является минимальным в своей строке и одновременно максимальным в своем столбце. Такой элемент называется *седловой точкой*. Если матрица имеет седловую точку (т. е. нижняя цена игры равна верхней), то игра имеет решение в чистых стратегиях: это пара стратегий, пересекающихся в седловой точке. Сама же седловая точка дает цену игры — в нашем примере это 5.

Класс игр, имеющих седловую точку, имеет большое значение в теории игр. В частности, доказано, что если по правилам игры каждый из игроков знает результат всех предыдущих ходов, как своих, так и противника (так называемая игра с полной информацией), то *игра имеет седловую точку и, значит, имеет решение в чистых стратегиях.*

Примерами игр с полной информацией могут служить шахматы, шашки, «крестики и нолики» и т. п.

Приведем пример игры с полной информацией, решение которой легко найти.

Два игрока (K и C) поочередно кладут одинаковые монеты на круглый стол. Положение каждой

монеты выбирается произвольно, лишь бы она не перекрывалась другими. Выигрывает тот из игроков, который положит монету последним (когда места для других уже не остается).

Стоит немножко подумать, чтобы убедиться, что исход этой игры всегда предрешен и что существует вполне определенная стратегия, гарантирующая выигрыш тому из игроков, который кладет монету первым (пусть это будет K). А именно, K должен положить первую монету в центр стола, а далее на каждый ход C отвечать в точности симметричным относительно центра стола ходом! Бедный C может при этом вести себя как угодно, спасения ему нет...

Очевидно, такая игра имеет смысл только для тех, кто не знает решения. Любопытно, что совершенно так же обстоит дело и с такой популярной игрой, как шахматы! Эта игра имеет смысл только до тех пор, пока не найдено ее решение. Теоретически доказано, что решение существует, и исход шахматной игры в сущности предрешен: если каждая сторона будет пользоваться своей оптимальной стратегией, то игра либо всегда будет кончаться выигрышем белых, либо всегда выигрышем черных, либо всегда ничьей! Но чем же именно? Мы пока этого не знаем, так как число возможных стратегий слишком велико, чтобы можно было построить матрицу шахматной игры и найти в ней седловую точку...

Наверное, любители шахмат заинтересованы в том, чтобы шахматная игра была решена еще не скоро.

Заметим в заключение, что седловых точек в матрице может быть не одна, а несколько; тогда решений игры в чистых стратегиях существует столько, сколько имеется седловых точек. Каждое из них дает выигрыш, равный цене игры.

Решение игры в смешанных стратегиях. Основная теорема теории игр

Мы знаем, что если нижняя цена игры α равна верхней β (максимин равен минимаксу), то игра имеет седловую точку и по крайней мере одно решение в чистых стратегиях.

А если $\alpha \neq \beta$? Можно доказать, что и в этом случае решение всегда есть, только оно лежит не в области чистых, а в области *смешанных стратегий*. *Решением игры* называется такая пара стратегий — в общем случае смешанных, систематическое применение которых обеспечивает каждой стороне максимально возможный для нее по условиям игры выигрыш, определяемый ценой игры. Если же одна из сторон отступает от своей оптимальной стратегии (в то время как другая продолжает придерживаться своей), то это *ни в коем случае не может быть выгодно для отступающего:* это либо оставит его выигрыш неизменным, либо уменьшит. Доказано, что *каждая конечная игра имеет решение* (возможно, в области смешанных стратегий). Это положение называется *основной теоремой теории игр.*

Введем специальное обозначение для смешанных стратегий. Пусть K применяет свои стратегии K_1, K_2, K_3 с частотами соответственно p_1, p_2, p_3 ($p_1+p_2+p_3=1$). Эту смешанную стратегию будем обозначать:

$$S_k = \begin{pmatrix} K_1 & K_2 & K_3 \\ p_1 & p_2 & p_3 \end{pmatrix}.$$

Аналогично смешанную стратегию игрока C будем обозначать:

$$S_c = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 & C_3 \\ q_1 & q_2 & q_3 \end{pmatrix},$$

где $q_1+q_2+q_3=1$.

Очевидно, любая чистая стратегия — частный случай смешанной, в которой все частоты, кроме одной, равны нулю, а одна — единице.

Решение игры — пару оптимальных стратегий — будем обозначать S_k^* и S_c^*, а соответствующий выигрыш (цену игры) ν. Очевидно, что цена игры ν не может быть меньше нижней и больше верхней цены:

$$\alpha \leqslant \nu \leqslant \beta.$$

В первом примере мы путем нестрогих соображений догадались, что решение игры должно быть:

$$S_k^* = \begin{pmatrix} K_1 & K_2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}; \qquad S_c^* = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix},$$

а цена игры $\nu=0$. Проверим это. Пусть мы («красные») держимся своей стратегии S_k^*, т. е. ищем C в убежищах I и II одинаково часто, чередуя эти стратегии случайным образом. Может ли C улучшить свое положение (повысить свой выигрыш), отступая любым образом от своей стратегии S_c^*? Очевидно, нет. А если одностороннее отступление от стратегии S_k^* придет в голову нам (в то время как разумный C будет держаться стратегии S_c^*), то это нам тоже не может быть выгодно. Значит, мы и в самом деле нашли решение игры и ее цену $\nu=0$. Правда, эта игра была довольно простой! Уже второй пример дает игру, решение которой не так очевидно. Из того, что в нем $\alpha \neq \beta$, следует только, что решение нужно искать в смешанных стратегиях.

Но каково это решение? Какова цена игры? Выгодна ли игра «красным», или «синим», или никому из них? Ответы на эти вопросы вы можете найти в книге автора данной статьи, указанной в библиографическом указателе «Что читать по математике».

Выдающиеся математики

Архимед

Великий математик, механик и инженер древности Архимед родился в 287 г. до н. э. (предположительно) в Сиракузах — богатом торговом городе Сицилии. Отцом его был астроном Фидий, который привил сыну с детства любовь к математике, механике и астрономии. В Александрии Египетской — научном и культурном центре того времени — Архимед познакомился со знаменитыми александрийскими учеными: астрономом Кононом, разносторонним ученым Эратосфеном, с которыми потом переписывался до конца жизни. В то время Александрия славилась своей библиотекой, в которой было собрано более 700 тыс. рукописей. По-видимому, именно здесь Архимед познакомился с трудами Демокрита, Евдокса и других замечательных греческих геометров, о которых он упоминал в своих сочинениях.

Уже при жизни Архимеда вокруг его имени создавались легенды, поводом для которых служили его поразительные изобретения, производившие ошеломляющее действие на современников. Известен рассказ о том, как Архимед сумел определить, сделана ли корона царя Гиерона из чистого золота или ювелир подмешал туда значительное количество серебра. Удельный вес золота был известен, но трудность состояла в том, чтобы точно определить объем короны: ведь она имела неправильную форму! Архимед все время размышлял над этой задачей. Как-то он принимал ванну, и тут ему пришла в голову блестящая идея: погружая корону в воду, можно определить ее объем, измерив объем вытесненной ею воды. Согласно легенде, Архимед выскочил голый на улицу с криком «Эврика!», т. е. «Нашел!». И действительно, в этот момент был открыт основной закон гидростатики.

Другая легенда рассказывает, что построенный Гиероном в подарок египетскому царю Птолемею роскошный корабль «Сирокосия» никак не удавалось спустить на воду. Архимед соорудил систему блоков (полиспаст), с помощью которой он смог проделать эту работу одним движением руки. Этот случай или размышления Архимеда над принципом рычага послужили поводом для его крылатых слов: «Дайте мне точку опоры, и я сдвину Землю».

Архимед прославился и другими механическими конструкциями. Изобретенный им бесконечный, или архимедов, винт для вычерпывания воды до сих пор применяется в Египте. Архимед построил планетарий, или «небесную сферу», при движении которой можно было наблюдать движение пяти планет, восход Солнца и Луны, фазы и затмения Луны, исчезновение обоих тел за линией горизонта.

Инженерный гений Архимеда с особой силой проявился во время осады Сиракуз римлянами в 212 г.

А ведь в это время ему было уже 75 лет! Построенные Архимедом мощные метательные машины забрасывали римские войска тяжелыми камнями. Думая, что они будут в безопасности у самых стен города, римляне кинулись туда, но в это время легкие метательные машины близкого действия забросали их градом ядер. Мощные краны захватывали железными крюками корабли, приподнимали их кверху, а затем бросали вниз, так что корабли переворачивались и тонули.

Римляне вынуждены были отказаться от мысли взять город штурмом и перешли к осаде. Знаменитый историк древности Полибий писал: «Такова чудесная сила одного человека, одного дарования, умело направленного на какое-либо дело... римляне могли бы быстро овладеть городом, если бы кто-либо изъял из среды сиракузян одного старца». Только вследствие измены Сиракузы были взяты римлянами осенью 212 г. При этом Архимед был убит. Плутарх сохранил нам яркий рассказ о его смерти: «К Архимеду подошел солдат с мечом в руке, чтобы убить его. Но Архимед настойчиво просил его подождать одну минуту, чтобы задача, которой он занимался, не осталась нерешенной; солдат, которому не было дела до его доказательства, пронзил его своим мечом».

Архимед был замечательным механиком-практиком и теоретиком, но основным делом его жизни была математика. По словам Плутарха, Архимед был просто одержим ею. Он забывал о пище, совершенно не заботился о себе. Его работы относились почти ко всем областям математики того времени: ему принадлежат замечательные исследования по геометрии, арифметике, алгебре. Так, он нашел все полуправильные многогранники, которые теперь носят его имя (см. рис. на стр. 279), значительно развил учение о конических сечениях, дал геометрический способ решения кубических уравнений вида $x^2(a \pm x) = b$, корни которых он находил с помощью пересечения параболы и гиперболы. Архимед провел и полное исследование этих уравнений, т. е. нашел, при каких условиях они будут иметь действительные положительные различные корни и при каких корни будут совпадать. Остались отрывки работы Архимеда, в которой он развивает математическую теорию популярной в Греции игры (так называемой стомахии), предвосхищая, таким образом, более чем на 2 тыс. лет создание математической теории игр.

Но главное его внимание было сосредоточено на трех типах проблем:

1. *Определение площадей криволинейных фигур или, соответственно, объемов тел.* Вы уже знаете, наверное, как определять площади прямолинейных фигур, площадь круга, объем призмы, пирамиды, цилиндра и конуса. Все это умели делать греки и до Архимеда. Но только он нашел общий метод, позволяющий найти любую площадь или объем. Трудно переоценить значение этого метода, без которого была бы немыслима ни физика, ни астрономия. Идеи Архимеда легли в основу интегрального исчисления.

Сам Архимед определил с помощью своего метода площади и объемы почти всех тел, которые рассматривались в античной математике. Лучшим своим достижением он считал определение поверхности и объема шара. Он просил выбить на своей могиле шар, вписанный в цилиндр.

2. *Пусть дана некоторая кривая линия. Как определить касательную в любой ее точке?* Или, если переложить эту проблему на язык физики, *пусть нам известен путь некоторого тела в каждый момент времени. Как определить скорость его в любой точке?* В школе учат, как проводить касательную к окружности. Древние греки умели, кроме того, находить касательные к эллипсу, гиперболе и параболе. Первый общий метод решения и этой задачи был найден Архимедом. Этот метод впоследствии лег в основу дифференциального исчисления.

3. В математике, физике и астрономии очень важно уметь находить *наибольшие и наименьшие значения изменяющихся величин — их экстремумы.* Например, как среди цилиндров, вписанных в шар, найти цилиндр, имеющий наибольший объем? Все такие задачи в настоящее время могут быть решены с помощью дифференциального исчисления. Архимед первым увидел связь этих задач с проблемами опреде-

ления касательных и показал, как с их помощью можно решать задачи на экстремумы.

Огромное значение для развития математики имело вычисленное Архимедом отношение длины окружности к диаметру $\frac{C}{D}$, т. е. число π, с большой степенью точности. Для этого он рассматривал последовательность вписанных и описанных правильных многоугольников с числом сторон 6, 12, 24, 48 и 96 и нашел отношения их периметров к диаметру. Ясно, что $\frac{p_n}{D} < \frac{C}{D} < \frac{P_n}{D}$, где p_n — периметр вписанного, а P_n — описанного n-угольника. Архимед нашел, что

$$3\frac{10}{71} < \pi = \frac{C}{D} < 3\frac{1}{7}.$$

Идеи Архимеда почти на два тысячелетия опередили свое время. Только в XVII в. ученые смогли продолжить и развить труды великого греческого математика. Только тогда было раскрыто их подлинное значение.

Лейбниц, один из творцов дифференциального и интегрального исчислений, писал: «Внимательно читая сочинения Архимеда, перестаешь удивляться всем новейшим открытиям геометров».

Омар Хайям

Омар Хайям, один из крупнейших математиков средневекового Востока, поэт и философ, родился в 1048 г. (предположительно), умер в 1131 г. Он был уроженцем Нишапура, главного города Хорасана, страны, лежавшей к юго-востоку и востоку от Каспийского моря.

В молодые годы Хайяму пришлось много скитаться. Он жил и работал в Самарканде и Бухаре, а в 1076 г. был поставлен во главе обсерватории, организованной в столичном городе Исфахане. Здесь ученый разработал проект нового весьма точного календаря, который не смог, однако, найти применения. Вскоре один за другим умерли покровительствовавшие Хайяму первый министр Низам-аль-Мульк и султан Мелик-шах, и обсерватория была закрыта. Мусульманское духовенство ненавидело вольнодумца Хайяма. При преемниках Мелик-шаха влияние духовенства усилилось, и Хайям впал в немилость.

Математические сочинения Хайяма относятся к алгебре, арифметике и геометрии. Они написаны на арабском языке, которым, как правило, пользовались ученые в странах Азии и Африки, покоренных арабами.

Главный труд Хайяма называется «Трактат о доказательствах задач алгебры и ал-мукабалы». Уравнения в то время приводили для решения к нормальному виду, располагая в обеих частях уравнения члены с положительными коэффициентами. Так, например, различали три вида квадратных уравнений:

$$x^2 = px + q,\ x^2 + px = q \text{ и } x^2 + q = px$$

и для каждого формулировали свой особый прием решения. Уравнение $x^2 + px + q = 0$ вовсе не рассматривалось, так как при $p \geqslant 0$, $q \geqslant 0$ у него не может быть положительных решений, а только они одни в то время и принимались во внимание. Операция переноса вычитаемых членов данного уравнения в другую часть, где они оказываются уже прибавляемыми, называлась ал-джебр («восполнение»). Операция приведения подобных членов в обеих частях уравнения называлась ал-мукабала («противопоставление»). От слова «ал-джебр» произошло наше слово «алгебра», и уже у Хайяма говорится об «алгебраистах».

Трактат Хайяма посвящен в основном кубическим уравнениям. Первые задачи, приводящие к кубическим уравнениям с целыми корнями, которые легко найти с помощью простого подбора, появились еще в древнем Вавилоне. Древние греки нашли геометрический прием построения положительных корней кубических уравнений. Прежде всего они применили его к задаче об удвоении куба, т. е. отыскании ребра x такого куба x^3, который был бы вдвое больше данного куба a^3. Величину x, т. е. корень уравнения $x^3 = 2a^3$, они строили как абсциссу точки пересечения двух парабол с уравнениями $2ax = y^2$ и $ay = x^2$, отличной от начала координат. Затем Архимед свел к уравнению вида $x^3 + r = px^2$ задачу о делении шара плоскостью на два сегмента, объемы которых находятся в данном отношении. Он построил корень этого уравнения как абсциссу точки пересечения некоторых параболы и гиперболы и произвел тщательный анализ задачи.

Проблема Архимеда заинтересовала математиков арабских стран еще в середине IX в. Вскоре здесь занялись и другими вопросами геометрии, приводящими к уравнениям третьей степени. Такие уравнения имеют важное значение и для астрономии, а именно для вычисления необходимых астрономам тригонометрических таблиц. Дело в том, что вычисление синуса 1° можно привести к решению уравнения вида $x^3 + r = qx$. Ученые создали различные приемы приближенного вычисления корней уравнений третьей степени. Наряду с этим возникла потребность в более общей теории.

Наиболее полную для своего времени теорию разработал Хайям, широко применив геометрический

метод древних греков. Он рассмотрел все нормальные виды кубических уравнений, которые могут иметь положительные корни. Всего таких видов оказалось 14: одно двучленное, шесть с тремя членами и семь четырехчленных. Для каждого вида Хайям приводит соответствующее ему построение. Так, корень трехчленного уравнения $x^3+qx=r$ выражается абсциссой той точки пересечения окружности $x^2+y^2=\frac{r}{q}x$ и параболы $x^2=\sqrt{q}y$, которая отлична от начала координат. Анализируя построение, Хайям выясняет, при каких условиях уравнение данного вида имеет один или два положительных корня. Например, уравнение $x^3+qx=r$ при любых значениях коэффициентов имеет один, и только один, положительный корень. Иногда Хайям указывает границы, в которых лежит корень уравнения того или иного вида. На примерах Хайям показывает, как общая теория применяется к исследованию уравнений с данными числовыми коэффициентами.

Все же в исследовании Хайяма есть пробелы. Так, он не заметил, что уравнение вида $x^3+qx=px^2+r$ может иметь в некоторых случаях три положительных корня. Обнаружить это только с помощью чертежа трудно.

Как и другие математики средневекового Востока, Хайям пытался найти формулу для выражения корня кубического уравнения с помощью радикалов, подобно формулам корней квадратного уравнения. Достичь успеха ему не удалось. Только в начале XVI в. итальянские математики открыли выражение корня кубического уравнения с помощью кубических и квадратных радикалов. Но уже Хайям пришел к убеждению, что сделать это с помощью квадратных радикалов в общем случае невозможно.

Геометрическая теория кубических уравнений получила дальнейшее развитие как на Востоке, так и в Европе, в частности у Р. Декарта. В XVI—XVII вв. геометрические приемы исследования начинают быстро вытесняться алгебраическими, более совершенными и удобными. Все же до сих пор иногда пользуются геометрическим построением корней уравнений (не только кубических), чтобы примерно определить их значение или получить общее представление о числе положительных и отрицательных корней и т. п.

В алгебраическом трактате Хайям упоминает свой труд по арифметике, в котором он изложил прием извлечения корней любой целой положительной степени из чисел. (Ранее были известны способы извлечения квадратного и кубического корней.) Этот его труд до сих пор не обнаружен. Вероятно, Хайям вывел в нем так называемую формулу бинома Ньютона для целого положительного показателя. Впервые она встречается у другого выдающегося среднеазиатского математика — Насирэддина Туси в учебнике, написанном в 1265 г.

Подобно грекам, математики стран Арабского Востока не имели никаких алгебраических обозначений и все уравнения, преобразования и т. д. записывали словами. Это чрезвычайно удлиняло и затрудняло как исследование, так и изложение. Нашему современнику, приученному к экономной и изящной символической записи, трудно читать старинные трактаты по алгебре.

Хайям написал также комментарии к «Началам» Евклида, в которых высказал ряд интересных мыслей по теории параллельных линий, оказавших влияние на дальнейшее развитие геометрии.

Франсуа Виет

Трудно перечислить всех ученых, открытия которых изучаются в современной «школьной» математике. Но есть два математика, которые сделали для нее больше других: это геометр Древней Греции Евклид и «отец современной алгебры» Франсуа Виет.

Франсуа Виет родился во Франции в 1540 г. в городке Фонтеней. Адвокат по профессии, он был всесторонне образованным человеком, хорошо знал древние языки, астрономию. Но его истинным призванием была математика. Увлеченный математической задачей, он мог работать над ней долгое время без еды и сна. Виет умел активно применять свои способности и знания к всевозможным трудным задачам не только из алгебры и геометрии. Известно, например, что он любил разгадывать зашифрованные письма. Во время войны Франции с Испанией вся тайная переписка испанцев свободно читалась французами, так как Виет всякий раз разгадывал испанский шифр, как бы его ни запутывали вражеские шифровальщики. Не представляя себе могущества человеческого ума, испанцы думали, что французам помогает дьявол. Они даже жаловались римскому папе и просили его уничтожить эту «дьявольскую силу».

Виета называют творцом современной алгебры за очень важное нововведение — он целеустремленно и последовательно применял в алгебре *буквенное исчисление*. Чтобы отчетливее представить себе, в чем суть буквенного исчисления Виета и почему оно так важно для всей современной алгебры, посмотрим, что представляла собой алгебра до него. Почти все

действия и знаки записывались словами, не было и намека на те удобные, почти автоматические правила, которыми сейчас умеет пользоваться каждый ученик. Поэтому нельзя было записывать и, следовательно, изучать в общем виде алгебраические уравнения или какие-нибудь другие алгебраические выражения. Необходимо было доказать, что существуют такие общие действия над всеми числами, которые от этих самых чисел не зависят.

Виет и его последователи установили, что не имеет значения, будет ли рассматриваемое число количеством предметов или длиной перпендикуляра. Главное, что с этими числами можно производить алгебраические действия и в результате снова получать числа того же рода. Не имеет значения также, известно ли нам число или неизвестно. А если нам не важны цифровая запись или геометрическое истолкование каждого рассматриваемого числа, то все числа как бы однородны и их можно обозначать какими-нибудь отвлеченными знаками, например буквами латинского алфавита. Виет не только ввел свое буквенное исчисление, но сделал принципиально новое открытие, поставив перед собой цель изучать не числа, а действия над ними. Это была удачная мысль, и она стала сразу приносить обильные плоды. Например, вскоре был доказан общий алгебраический закон умножения: умножение отрезков есть та же операция, что и умножение чисел. Появилась возможность записывать алгебраические выражения в виде формул.

Однако у самого Виета алгебраические обозначения, или, как сейчас говорят, *алгебраические символы*, были мало похожи на наши. Сравните современную запись кубического уравнения:

$$x^3+3bx=d$$

и запись этого же уравнения в обозначениях Виета:

A cubus $+B$ planum *in* A 3 aequatur D solido.

Как видите, здесь еще очень много слов, но ясно, что эти слова уже играют роль наших символов; так, латинское слово cubus после неизвестного A (неизвестное обозначалось гласной буквой) означает наше «в кубе». Слово aequatur (в переводе на русский — «равный») написано вместо нашего знака «=», умножение чисел B и A обозначено предлогом *in* (все, что осталось после сокращения от выражения «взять во столько-то раз больше»). Остальные слова — это следы прошлого, следы того, что и у Виета алгебра еще не полностью освободилась от посторонних для нее влияний геометрии.

Но уже и такой способ записи позволил Виету сделать важные открытия при изучении общих свойств алгебраических уравнений. Особенно гордился Виет всем известной теперь теоремой его имени о выражении коэффициентов уравнения через его корни, хотя под корнями он понимал только положительные числа, не признавал за корни отрицательные и совсем не подозревал о существовании комплексных чисел.

При составлении обширных таблиц тригонометрических функций Виет с большим искусством применил десятичные дроби. Глубокий интерес к тригонометрии у него был вызван желанием сделать астрономию более точной. Увлекшись тригонометрией, Виет и здесь получает значительные результаты. Например, он выводит выражения для синусов и косинусов кратных дуг через $\sin x$ и $\cos x$ при помощи формул, которые мы теперь записали бы в виде:

$$\sin mx=2\cos x\sin(m-1)x-\sin(m-2)x,$$
$$\cos mx=2\cos x\cos(m-1)x-\cos(m-2)x.$$

Эти знания из тригонометрии Виет с успехом применял как в алгебре, так и в геометрии.

Используя представление о круге как о пределе вписанных в него многоугольников при увеличении числа их сторон, Виет вычислил число π до 18-го знака после запятой (из них 11 знаков верны).

Умение решать алгебраические задачи при помощи геометрии и тригонометрии принесло Виету славу победителя турнира лучших математиков того времени. Голландский математик Адриан ван-Роумен предложил математикам всего мира решить уравнение 45-й степени с числовыми коэффициентами. Французским математикам он не послал свой вызов, как бы намекая на то, что во Франции нет математиков, способных справиться с этой задачей. Узнав

об этом, король Франции Генрих IV, на службе у которого в то время состоял Виет, воскликнул: «И все же у меня есть математик, и весьма выдающийся. Позовите Виета!» И действительно, Виет тут же, в присутствии короля, нашел один корень предложенного уравнения, а на следующий день нашел еще 22 его положительных корня. После этого ван-Роумен стал ревностным почитателем Виета.

Виет решил при помощи циркуля и линейки знаменитую задачу, сформулированную геометром Древней Греции Аполлонием из Перги. По условию этой задачи надо построить круг, касательный к трем данным кругам. Гордясь найденным решением, Виет называл себя «Аполлонием из Галлии» (Галлией в старину называли Францию).

В последние годы своей жизни Виет занимал важные посты при дворе короля Франции. Умер Виет в Париже в 1603 г.

Бурно развивающаяся математика наших дней, конечно, использует идеи и методы, во много раз превосходящие по глубине и общности идеи и методы, которые разработал Виет. Но и сейчас для нас интересна и ценна острая алгебраическая мысль Виета, который широко распахнул перед математикой двери в новый мир современной алгебры. Не будем забывать, что в ее основе лежит буквенное исчисление Франсуа Виета.

Рене Декарт

Рене Декарт, знаменитый философ и математик, жил и работал в XVII в. В то время передовые ученые и философы Европы боролись с мертвящей властью церкви над разумом. Новая наука отвергала всяческие авторитеты и утверждала право человеческого разума и опыта быть единственными проводниками в поисках истины.

Для Декарта самым ясным и точным языком для выражения научных истин был язык математики. Он стремился и в философии, как и в любой другой науке, найти математические законы, свести каждый вопрос или каждую задачу к математической. Декарт хотел создать такой универсальный математический метод, который позволил бы всякому, овладевшему им, решать любую задачу.

Рене Декарт родился в 1596 г. во французском городе Лаэ. Еще ребенком Рене прозвали «маленьким философом» за его любовь к логическим рассуждениям. В школе-интернате из-за слабого здоровья ему

разрешали не ходить в класс и заниматься в постели. Рене очень быстро выполнял домашние задания и все свободное время посвящал усиленным занятиям любимой математикой. Необычная умственная энергия сохранилась у Декарта на всю жизнь. После окончания школы юноша три года учился в университете г. Пуатье и получил профессию юриста.

Молодой Декарт с увлечением отдается как науке, так и бурной жизни модного кавалера. Нередко дело доходило до ночной дуэли на улице Парижа. Это была эпоха мушкетеров, с мужеством которых мы хорошо знакомы по знаменитым романам А. Дюма.

Когда маленькие Нидерланды поднялись на борьбу за свободу против испанского владычества, Декарт не смог остаться в стороне. Добровольцем-мушкетером вступает он в армию, сражающуюся против испанцев. Но, как говорят историки, ему вряд ли довелось «понюхать пороху» и участвовать в сражениях. Во всяком случае, когда отряд мушкетеров стоял в нидерландском городе Бреды, Декарт больше интересовался вопросами науки, чем войной. Развлекаясь, молодые офицеры писали на городской стене всевозможные трудные задачи и каверзные загадки, предлагая прохожим их решить. Декарт был горячим участником всех этих затей и вскоре познакомился с местными учеными.

Сосредоточенно размышляя над вопросами философии и математики, Декарт настойчиво искал законы универсального метода, стремился дать четкие и общедоступные правила его. Он пишет: «Когда мне приходилось, будучи молодым, слушать о каких-либо искусных умозаключениях изобретательного авто-

ра, я пытался воспроизвести их самостоятельно, не читая этого автора. Постепенно я стал замечать, что пользуюсь определенными правилами».

Глубоко изучив психологию творчества, Декарт составил свои знаменитые «Правила для руководства ума». В них он учил, как надо анализировать проблему, разлагая трудные вопросы на более простые до тех пор, пока не появится возможность успешно их решить.

И вот как-то в минуту вдохновения он решил, что такой универсальный метод — это метод координат.

Обобщая и объединяя известные ему методы координат и буквенной алгебры, Декарт придает своему методу точную и ясную математическую форму. Суть метода Декарта состоит в установлении теснейшей связи между геометрическими объектами и алгебраическими формулами. Эта взаимосвязь устанавливается при помощи системы координат. Если на плоскости задана система координат, то для каждой точки можно определить пару чисел, ее координаты, и, обратно, если дана пара чисел, причем указан порядок их соответствия осям координат, то по ним всегда можно построить на плоскости единственную точку (см. ст. «Что такое координаты и для чего они служат»).

Декартов способ установления связи между точками и числами оказался настолько плодотворным, что, по сути дела, положил начало новой, современной математике. Великий математик и механик П. Лаплас писал, что 10 ноября 1619 г., день, когда Декарт уяснил себе свой метод, можно считать официальным днем рождения современной математики.

Развитие идей Декарта привело к созданию аналитической геометрии, на основе которой выросло и оформилось такое могущественное средство познания природы, как математический анализ.

Декарт много сделал, чтобы придать алгебраической символике максимальную простоту и всеобщность. Предложенные им обозначения сохранились до наших дней. Понимая, что сила математического метода не только в его всеобщности, но и в логической обоснованности, Декарт исследует основное понятие математики — «число». Историки считают, что и здесь ему принадлежит слава первооткрывателя современной точки зрения на число. Он вводит в математику, наряду с положительными и рациональными числами, как вполне законные отрицательные и иррациональные числа.

Декарт так описывает применение своего аналитического метода решения задач: «Таким образом, чтобы решить какую-либо задачу, нужно сначала считать ее как бы решенной и обозначить буквами все, как данные, так и неизвестные, величины. Затем, не делая никакого различия между данными и искомыми величинами, заметить зависимость между ними так, чтобы получить два выражения для одной и той же величины; это приводит к уравнению, служащему для решения задачи, ибо можно приравнять одно выражение другому». При помощи системы координат каждому алгебраическому уравнению от переменных x и y можно поставить в соответствие кривую, координаты точек которой удовлетворяют этому уравнению. Таким образом, переходя с языка геометрии на язык алгебры и обратно, можно пользоваться преимуществами обоих способов, обходя трудности. Декарт считал, что к алгебраическим уравнениям можно свести все математические задачи. В этом он заблуждался. Дальнейшее развитие математики показало, что важны и интересны многие другие методы и теории. Но и изучение алгебраических кривых, начало которому положил Декарт, представляет собой интересную и быстро развивающуюся область математики.

Много размышлял Декарт над общей теорией алгебраических уравнений. Как и во всем, он искал также и общий метод решения любого алгебраического уравнения. Декарт надеялся, что таким общим приемом может стать разработанный им способ разложения уравнения на произведение множителей более низких степеней.

Однако в XIX в. было доказано, что ни метод Декарта, ни какой-либо другой не помогут при решении общего алгебраического уравнения пятой или более высоких степеней, потому что такие уравнения в общем виде не могут быть решены в радикалах. Занимаясь исследованиями алгебраических уравнений, Декарт открыл теорему, которая известна под названием теоремы Безу. Ему же принадлежит открытие простого способа подсчета числа положительных и отрицательных корней у любого алгебраического уравнения. Это так называемое правило знаков Декарта.

Последовательно проводя мысль о том, что во всем необходимо искать прежде всего физические и математические закономерности, Декарт и явления живого мира рассматривал так же, как явления физики или даже математики.

Понятно, что такое учение, которое в конце концов исключало участие бога в жизни людей и природы, возбуждало ярость церковников и сочувствующих им. По мере распространения учения Декарта его жизнь в Нидерландах становилась все более напряженной. Чтобы избежать доносов и судебных преследований, Декарт воспользовался приглашением шведской королевы Христины. Королева хотела изучать науки под руководством самого Декарта, а за-

одно пользоваться его советами при создании Шведской академии наук. Декарт переехал в Швецию, но суровый северный климат оказался губительным для его слабого здоровья. Декарт умер в 1650 г. Семнадцать лет спустя его останки перевезли на родину, во Францию.

В современной математике доказывается, что универсального метода решения всех задач, о котором мечтал Декарт, нет и не может быть. Но, очищенные от посторонних философствований, математические идеи Декарта и в наши дни продолжают оставаться плодотворным оружием познания тайн природы и человеческого мышления.

Пьер Ферма

Мы очень мало знаем о жизни этого великого математика. Известно, что он родился в 1601 г. на юге Франции, был выходцем из «третьего сословия», изучал юридические науки и состоял советником тулузского парламента (суда). Математике он мог посвящать только свободное от работы время. Но сила его гения была столь велика, что, несмотря на это, его идеи наложили глубокий отпечаток на все дальнейшее развитие теории чисел, геометрии и математического анализа.

Тогда еще не было ни академии наук, ни научных журналов и отдельные любители науки, разбросанные по стране, либо непосредственно писали друг другу, либо посылали письма в Париж к какому-нибудь любителю, который переписывал их и пересылал другим ученым. Так, свои захватывающие мысли и идеи Ферма излагал в письмах к друзьям, среди которых были Р. Декарт, Ж. Роберваль, Б. Паскаль, Ж. Дезарг и другие. И все они считали Ферма величайшим математиком Европы.

Очень немногие сочинения Ферма были изданы им при жизни, и то по настоятельному требованию друзей. Первое собрание сочинений великого ученого появилось только после его смерти. Умер Ферма в 1665 г.

Ферма установил основной принцип геометрической оптики, согласно которому свет распространяется из одной точки в другую по такому пути, для прохождения которого требуется минимальное время. Из этого принципа Ферма выводятся законы отражения и преломления света.

С наибольшей силой гений Ферма проявился в математике. Так, еще до Декарта и в более совершенной форме он построил систему аналитической геометрии, открыл общий метод для определения максимумов, минимумов и касательных, существенно развил метод Архимеда и применил его для определения площадей, объемов и длин дуг. Но любимой его областью, которую он по существу открыл, была *теория чисел*. Ферма сумел среди множества разнообразных задач и вопросов выделить именно те, которые стали центральными в теории чисел XVIII и XIX вв. Однако он, как правило, не сообщал доказательств своих теорем. Поэтому утверждения Ферма так и остались для последующих ученых проблемами, часть из которых и до сих пор не получила решения.

Остановимся на четырех проблемах Ферма.

1. Занимаясь теорией чисел, Ферма обратил внимание на то, что во всех вопросах арифметики чрезвычайно важную роль играют простые числа: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17,.... Он попытался найти такую формулу, которая при подстановке вместо n целых чисел 1, 2, 3, 4,... давала бы только простые числа. Ферма полагал, что именно таким будет выражение $2^{2^n}+1$. Но через 100 лет Л. Эйлер заметил, что хотя при $n=0, 1, 2, 3, 4$ формула и будет давать простые числа 3, 5, 17, 257, 65 837, однако при $n=5$ получается число 4 294 967 297, которое делится на 641. Числа вида $2^{2^n}+1$ носят теперь название чисел Ферма. Они встречаются во многих исследованиях по теории чисел. Но до сих пор неизвестно, имеется ли среди этих чисел бесконечно много простых или нет.

2. В поисках критерия для определения того, является ли данное число простым, Ферма нашел сле-

дующую замечательную теорему: если n — простое число и a — целое число, которое не делится на n, то $a^{n-1}-1$ нацело делится на n. Так, например, 5^6-1 без остатка делится на 7, а 7^4-1 делится на 5. Но 2^5-1 не будет делиться на 6, следовательно, число 6 не простое. Эта теорема получила название малой теоремы Ферма. Она была впервые доказана Л. Эйлером, и теперь известно много ее различных доказательств. Она играет фундаментальную роль при исследовании проблем теории чисел и теории групп.

3. Еще бóльшую известность, чем «малая», получила «большая», или «великая», теорема Ферма, в которой утверждается, что уравнение

$$x^n + y^n = z^n \qquad (1)$$

не имеет целых решений, если только $n>2$ и $xyz\neq 0$

Случай $n=2$ был рассмотрен еще в древности; тогда же было доказано, что решений у такого уравнения будет бесконечно много. На полях «Арифметики» александрийского математика Диофанта, где излагалась эта задача, Ферма записал свою «великую теорему». Он добавил, что нашел для нее «поистине чудесное доказательство», однако не может его записать из-за недостатка места. С тех пор прошло около 400 лет, но общее доказательство «великой теоремы» до сих пор не найдено.

Интересна ее судьба. С одной стороны, математики, стараясь доказать теорему, развивали все более и более тонкие методы, открывали новые обширные области для исследований. В настоящее время теорема доказана для всех $n\leqslant 10\,000$.

С другой стороны, эта теорема получила большую известность среди неспециалистов. Их привлекала простота формулировки, а также загадочное замечание Ферма о найденном им «чудесном» доказательстве. Сотни людей тратили и до сих пор тратят свое время и силы, пытаясь доказать «великую теорему» элементарными средствами, ничего не зная об истории этой теоремы и о ее взаимосвязях с современными математическими теориями. Быть может, ни одна из теорем математики не принесла людям так много горьких разочарований и обманутых надежд. Теперь уже ясно, что людям, не знакомым с современной высшей математикой, не следует приниматься за доказательство этой теоремы.

4. «Великая теорема» представляет собой одну из задач так называемого диофантова анализа. Уравнение с двумя или более неизвестными, как, например, $x^n+y^n=z^n$, называется неопределенным. Одна из главных задач диофантова анализа — узнать, имеет ли заданное неопределенное уравнение с целыми коэффициентами целые или рациональные решения; если решения имеются, то конечно или бесконечно их число; в последнем случае постараться определить их все (например, так, как это было сделано в древности для уравнения (1) при $n=2$). Сам Ферма исследовал неопределенное уравнение

$$x^2 - ay^2 = \pm 1. \qquad (2)$$

В «Началах» Евклида говорится, как найти бесконечное множество решений уравнения

$$x^2 - 2y^2 = \pm 1,$$

исходя из наименьшего: $x_0=1$, $y_0=1$. Следующее решение будет: $x_1=x_0+2y_0=3$; $y_1=x_0+y_0=2$. И вообще, если x_n, y_n — решение, то из него можно получить следующее решение по формулам:

$$x_{n+1}=x_n+2y_n, \quad y_{n+1}=x_n+y_n.$$

Ферма исследовал уравнение (2) при любом целом неквадратном a. В одном из своих писем он поставил перед математиками следующие задачи: 1) дать способ нахождения наименьшего решения этого уравнения; 2) найти формулы для нахождения всех остальных решений, если наименьшее уже известно. Сам Ферма, безусловно, владел методом решения обеих задач. Чтобы узнать, имеется ли метод у других математиков, он нарочно выбрал такие значения a, для которых наименьшее решение очень велико, и поэтому его трудно найти простым подбором.

Исчéрпывающее решение обеих задач было получено только Л. Эйлером и Ж. Лагранжем в XVIII в.

Мы остановились здесь только на нескольких проблемах, которыми занимался великий математик. Но и их достаточно, чтобы оценить силу его гения.

Исаак Ньютон

Трудно найти другого человека, который оказал бы столь сильное влияние на историю мировой науки и культуры, как Ньютон.

Известный математик и историк науки Б. Л. Ван-дер-Варден пишет в своей книге «Пробуждающаяся наука»: «Каждый естествоиспытатель безусловно согласится, что механика Ньютона есть основа современной физики. Каждый астроном знает, что современная астрономия начинается с Кеплера и Ньютона. И каждый математик знает, что самым значительным и наиболее важным для физики отделом современной математики является анализ, в основе которого лежат дифференциальное и интегральное исчисления Ньютона. Следовательно, труды Ньюто-

на являются основой огромной части точных наук нашего времени». И не только наук: «Математика и техника влияют даже на нашу духовную жизнь, и настолько, что мы редко можем представить это себе полностью. Вслед за необычайным взлетом, который пережило в XVII веке естествознание, последовал неизбежно рационализм XVIII века, обожествление разума, упадок религии... Кто отдает себе отчет в том, — спрашивает автор, — что с исторической точки зрения Ньютон является самой значительной фигурой XVIII века?»

Исаак Ньютон родился в 1643 г. в деревне Вульсторп близ г. Грэнтэма. Отец его был небогатым фермером. Жизнь Ньютона совпала с бурными событиями в истории Англии: революция и гражданская война 1640—1648 гг., казнь короля Карла I, правление Кромвеля, реставрация Стюартов, вторая «бескровная» революция — вот неполный их перечень. Однако внешне она протекала спокойно и размеренно. Мальчик посещал сначала сельскую школу, а в 12 лет его отправили учиться в ближайший город. Директор школы обратил внимание на способного мальчика и уговорил мать Ньютона отправить сына учиться в Кембриджский университет. Ньютон был принят туда в качестве бедного студента, обязанного прислуживать бакалаврам, магистрам и студентам старших курсов.

В университете Ньютон решил посвятить себя физике и математике. Он изучал труды Евклида, Р. Декарта, Дж. Валлиса. Трудно представить себе всю интенсивность умственной работы молодого ученого. Наиболее поразительными в его жизни были 1664—1667 годы. В это время в Англии свирепствовала чума, и Ньютон жил в родном Вульсторпе. Именно здесь, в деревенской тиши, молодой Ньютон сделал почти все свои великие открытия в физике и математике. Уже в это время он открыл закон всемирного тяготения и приступил к исследованию с его помощью законов движения планет. В те же 1664—1667 годы он открыл дисперсию света и начал конструировать зеркальный телескоп-рефлектор.

Одновременно Ньютон работал над созданием математического аппарата, с помощью которого можно было бы исследовать и выражать законы физики. Такого аппарата еще не было, и каждый ученый придумывал свои методы, обобщая и применяя сделанное еще Архимедом. Ньютон первый построил дифференциальное и интегральное исчисления (он назвал их *методом флюксий и флюэнт*). Это сразу позволило решать самые разнообразные математические и физические задачи. До Ньютона многие функции определялись только геометрически, так что к ним невозможно было применять алгебру и новое исчисление флюксий. Ньютон нашел новый общий метод аналитического представления функций — он ввел в математику и начал систематически применять бесконечные ряды.

Поясним эту идею Ньютона. Известно, что любое действительное число можно представить десятичной дробью — конечной или бесконечной. Так, например:

$$\frac{7}{40} = 0{,}175;\ \frac{1}{3} = 0{,}333.\qquad \sqrt{2} = 1{,}414.$$

Это значит, что любое число a можно представить в виде:

$$a = N + a\left(\frac{1}{10}\right) + a_2\left(\frac{1}{10}\right)^2 + \quad + a_n\left(\frac{1}{10}\right)^n +$$

где N — целая часть, а a_1, a_2, ..., a_n ,... могут принимать одно из значений: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. По аналогии с таким представлением чисел Ньютон предположил, что любая функция от x, например $\sqrt{1+x}$, $\sin x$, $\log(1+x)$, может быть представлена как бесконечный многочлен или ряд, расположенный уже не по степеням $\frac{1}{10}$, а по степеням x:

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \quad + a_n x^n +$$

где a_0, a_1, a_2, a_n ... — числовые коэффициенты, которые каждый раз должны быть определены. Примером такого ряда может служить известная нам геометрическая прогрессия:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \quad + x^n +$$

Представление функции с помощью ряда имеет те же преимущества, что и выражение числа десятич-

ной дробью: математические операции с рядами столь же просты, как арифметические действия с десятичными дробями (которые производятся по тем же правилам, что и с целыми числами).

Ньютон нашел основные приемы разложения функций в ряды и показал, как применять ряды в математических исследованиях. Он нашел ряды для представления всех известных в то время функций: $(ax+b)^{\frac{m}{n}}$, тригонометрических и обратных тригонометрических функций, показательной и логарифмической функций, алгебраических функций, заданных неявно.

Занятия так поглощали Ньютона, что он совершенно забывал об окружающем. Сохранилось немало анекдотов о его баснословной рассеянности. А когда Ньютона однажды спросили, как он мог решить столь трудные проблемы, он ответил: «Постоянным размышлением о них».

Вернувшись в Кембридж, Ньютон изложил письменно свои математические открытия, но не спешил публиковать их. О части своих исследований он рассказывал в лекциях по оптике, другая часть была известна математикам только по рукописям Ньютона. Первые его чисто математические работы увидели свет лишь в 1704 и 1711 гг., самая же значительная из них — «Метод флюксий и бесконечных рядов» — была опубликована только после смерти ученого.

С 1669 г. Ньютон возглавил кафедру математики в Кембридже. В 1672 г. он был избран членом Лондонского королевского общества за конструкцию телескопа-рефлектора, а с 1703 г. он становится президентом этого общества и остается им до конца жизни.

Еще в 1680 г. Ньютон, уступая настоятельным требованиям своих друзей — ученых, приступил к работе над книгой «Математические начала натуральной философии», в которой задумал изложить свою систему мира. Работа продолжалась около 5 лет. Об этом периоде жизни Ньютона сохранились записи его секретаря. По его словам, Ньютон был в то время спокойным, приветливым, никогда не впадал в раздражение, почти никуда не выходил из своей комнаты, никогда не садился обедать без многократных напоминаний и чаще всего ел наспех и стоя, спал не более 4 или 5 часов в сутки и каждый час, не посвященный занятиям, считал потерянным. В 1687 г. книга была опубликована. Помимо работы над «Началами» Ньютон много времени посвящал тогда химическим опытам. Он был великолепным экспериментатором.

По единодушному мнению физиков, в истории естествознания не было более крупного события, чем появление ньютоновых «Начал». В нескольких словах трудно передать все величие этой книги. Положив в основу аксиомы движения, которые теперь известны под названием трех законов Ньютона, и закон всемирного тяготения, Ньютон выводит чисто математически все основные известные в то время факты механики земных и небесных тел: законы движения точки и твердого тела, кеплеровы законы движения планет (Кеплер установил их на основании наблюдений), закон движения Луны, явления приливов и отливов, форму орбит комет, строит начала гидродинамики. По выражению Д. И. Менделеева, Ньютоном впервые было показано, что возможно с единой точки зрения «охватить весь механизм мировых явлений — от вращения неподвижных звезд до перемещения химических атомов».

Для построения такой системы в то время не было еще достаточного математического аппарата, поэтому в начале своей книги Ньютон строит новую математическую теорию — учение о пределах.

«Начала» произвели сильнейшее впечатление на современников, и еще при жизни Ньютона они издавались 3 раза. Сто лет спустя Ж. Лагранж писал: «Ньютон был величайший гений из всех, когда-либо существовавших, и самый счастливый, ибо только однажды дано человеку открыть систему мира».

Уже будучи президентом Лондонского королевского общества, Ньютон пишет труды, задуманные еще в юности. Среди них — «Оптика», к которой ученый приложил два замечательных сочинения по математике — «О квадратуре кривых» и «Перечисление кривых третьего порядка». Первое из них посвящено вопросам дифференциального и интегрального исчислений, а второе — изучению свойств кривых третьего порядка. Все значение этого последнего сочинения было понято только в XIX в., когда получила развитие алгебраическая геометрия.

Умер Ньютон в 1727 г. в возрасте 84 лет. Он до последних дней жизни не прекращал научных исследований, как теоретических, так и экспериментальных.

Вот что говорил сам Ньютон о своем творчестве: «Не знаю, как на меня посмотрит мир, но самому себе я представляюсь мальчиком, играющим на морском берегу и приходящим в восхищение, когда ему удается порой найти более гладкий, нежели обыкновенно, камушек или красивую раковину; между тем громадный океан сокровенной истины простирается передо мною».

Готфрид Вильгельм Лейбниц

Готфрид Вильгельм Лейбниц родился в Германии в г. Лейпциге в 1646 г. Любознательный мальчик уже с 6 лет вел интересные беседы по истории со своим отцом — профессором Лейпцигского университета. К 12 годам он хорошо изучил латинский язык и увлекся древнегреческим. Особенно его интересовали древние философы, и он мог подолгу размышлять о философских теориях Аристотеля или Демокрита. В 15 лет Лейбниц поступает в Лейпцигский университет, где усердно изучает право и философию. Он очень много читает, среди его любимых книг — книги Р. Декарта, Г. Галилея, И. Кеплера и Т. Кампанеллы. Свои колоссальные знания по математике Лейбниц приобрел, будучи в этой области знаний самоучкой. Через три года, окончив университет, он покинул Лейпциг. Существует предание, что он был обижен отказом ученого совета университета присвоить ему степень доктора прав. Отказ объяснили тем, что Лейбниц был... слишком молод!

Началась жизнь, полная напряженного труда и многочисленных путешествий. Легко себе представить, как неудобно было путешествовать в неуклюжих каретах по тряским дорогам Европы тех времен. Лейбниц умел не терять времени даром — много удачных мыслей пришло ему в голову именно во время этих продолжительных поездок. Лейбниц отличался исключительной способностью быстро «входить» в задачу и решать ее наиболее общим способом. Однако интересных идей приходило в голову Лейбницу больше, чем он успевал их записывать. Чувствуя, что все это богатство мыслей ему не успеть переработать в ясные и завершенные теории, Лейбниц часто ограничивался сообщением только сути дела. Такая «охота» за идеями была по душе Лейбницу. Он шутливо сравнивал себя с тигром, о котором рассказывают, что если этот зверь не схватит чего-либо в первый, второй или третий прыжок, то предоставляет добыче убежать.

Люди, лично знавшие Лейбница, писали о нем как о мягком и отзывчивом человеке, очень скромном в своих привычках. Лейбниц был дипломатом, надворным советником, воспитателем княжеских детей, историографом. Почти все время он работал при дворах немецких государей, князей и герцогов. Но он всегда помнил о своей любимой науке. Он умел извлекать много полезного из любого дела, любого знакомства. Лейбниц хорошо понимал, что для успешного развития науки необходимы специальные научные общества, академии, в которых ученые могли бы свободно обмениваться мнениями. По предложению Лейбница в 1700 г. основывается Берлинская академия наук, в которой ему предоставляют почетное место первого президента. Он хлопочет о создании академий в других городах Европы и даже всеевропейской академии наук. Неоднократные беседы Лейбница с Петром I о развитии наук в России имели большое значение для организации Петербургской академии наук. Петр I в знак признания заслуг Лейбница сделал его тайным советником.

Удивительный ум Лейбница породил большое количество плодотворных идей почти во всех областях человеческих знаний. В физике Лейбниц сформулировал основной закон сохранения кинетической энергии, или, как он ее называл, «живой силы»: $\frac{mv^2}{2}$

Стараниями Лейбница был положен конец путанице с календарями в Германии и был принят григорианский календарь. Размышляя над философскими и математическими вопросами, Лейбниц решил, что самым надежным средством искать и находить истину может стать математика. Всю свою сознательную жизнь он стремился выразить законы мышления, человеческую способность думать в виде математического исчисления. Для этого необходимо, учил Лейбниц, уметь обозначать любые понятия или идеи определенными символами, комбинируя их в особые формулы, и сводить правила мышления к правилам вычислений по этим символическим формулам. Заменяя обычные слова четко определенными

символами, Лейбниц стремился избавить наши рассуждения от всякой неопределенности и возможности ошибиться самому или вводить в заблуждение других. Если, мечтал Лейбниц, между людьми возникнут разногласия, то решаться они будут не в длинных и утомительных спорах, а так, как решаются задачи или доказываются теоремы. Спорщики возьмут в руки перья и, сказав: «Начнем вычислять!», примутся за расчеты.

Лейбниц одновременно с Ньютоном и независимо от него открыл основные принципы дифференциального и интегрального исчислений. Теория приобрела свою силу после того, как Лейбницем и Ньютоном было доказано, что дифференцирование и интегрирование — взаимно обратные операции. Лейбниц увидел здесь ту замечательную возможность, которую открывает применение символического метода.

Любой человек, изучив небольшое число правил действий с символами, обозначающими операции дифференцирования и интегрирования, становится обладателем мощного математического метода. В наше время такие символы операций называют операторами. Операторы дифференцирования $d(\ )$ и интегрирования $\int(\ )\,dx$ действуют на функции, «перерабатывая» их в другие, точно вычисляемые функции (см. ст. «Интеграл и производная»). Лейбниц разрабатывает особую алгебру действий с этими операторами. Он доказывает, что обычное число α можно выносить за знак оператора:

$$d\big(\alpha f(x)\big) = \alpha d\big(f(x)\big).$$

или

$$\int \alpha f(x)\,dx = \alpha \int f(x)\,dx.$$

Одинаковые операторы можно выносить за скобку:

$$d(f(x)) + d(\varphi(x)) = d(f(x) + \varphi(x)),$$

или

$$\int f(x)\,dx + \int \varphi(x)\,dx = \int (f(x) + \varphi(x))\,dx.$$

Сокращенно эти свойства можно выразить соотношением:

$$O(\alpha f(x) + \beta\varphi(x)) = \alpha O(f(x)) + \beta O(\varphi(x)),$$

где α и β — числа, O — линейный оператор.

Многократное применение операторов можно понимать как степень оператора, например, для $d(\ )$:

$$\underbrace{d(d(\ \ .d(f(x)))\ .\ .)}_{n \text{ раз}} = d^n(f(x)).$$

То, что основные операторы математического анализа являются взаимно обратными, Лейбниц подчеркивает своей символикой, утверждая, что $d(\ )$ и $\int(\ )\,dx$ так же взаимно обратны, как степени и корни в обыкновенном исчислении. Употребляют также обозначение, аналогичное обозначению a^{-1} числа, обратного a, причем произведение $a \cdot a^{-1} = 1$. Обозначая операторы $d^{-1}(\ ) = \int(\ )\,dx$ или, наоборот,

$$\overset{-1}{\int}(\ )\,dx = d(\ )$$

и понимая под их произведением последовательное их применение, имеем:

$$d^{-1}(df(x)) = \overset{-1}{\int}\Big(\int f(x)\,dx\Big)\,dx = 1 \cdot f(x) = f(x),$$

т. е. такое произведение есть «единица», не меняющая функцию.

Анализируя правила логики, правила рассуждений, Лейбниц увидел, что и здесь можно применить подходящую символику и свести разнообразные приемы умозаключений к небольшому числу точно определенных операций. Такое исчисление умозаключений, или, как его теперь называют, алгебра логики, в наши дни приобрело большое значение. На его основе создаются современные электронные вычислительные машины; теория таких «думающих» автоматов имеет большое принципиальное значение.

Всю Вселенную Лейбниц рассматривал как гигантский самоорганизующийся автомат. Отмечая роль, которую сыграли идеи Лейбница для кибернетики, творец кибернетики Н. Винер в шутку писал: «Если бы мне пришлось выбирать в анналах истории наук святого — покровителя кибернетики, то я выбрал бы Лейбница».

Сам Лейбниц также стремился воплотить в машине свои мысли о механизации и автоматизации мыслительных процессов. Он построил металлическую счетную машину, которая могла складывать, вычитать, умножать целые числа. Эта счетная машина произвела большое впечатление на ученых того времени. После того как Лейбниц показал свою машину в Лондонском королевском обществе (так называется английская академия наук), его избрали членом этого общества.

Поиски операторов и исчислений в области систем алгебраических уравнений первой степени со многими неизвестными привели Лейбница к созданию важного понятия *определителя* системы таких уравнений. В наши дни определитель стал совершенно необходимым инструментом как в самой математике, так и в разнообразнейших ее применениях.

Необыкновенная проницательность Лейбница сказывается и в его отношении к математическим играм. Лейбниц пишет: «...игры, как требующие ловкости, так и основанные на случайности, дают громадный материал для научных занятий». Слова ученого оказались пророческими — современная ма-

тематическая теория игр имеет огромное значение не только для математики, но и для экономики, военного дела и многих других областей человеческой деятельности.

Смысл всей своей жизни Лейбниц видел в умственном творчестве, в создании общедоступных идей, полезных человеку в познании природы. Надо сказать, что он был честолюбив и очень чувствителен к признанию своих действительно больших заслуг перед наукой. Тем больнее был для него спор с И. Ньютоном о приоритете создания математического анализа. И совсем тяжелыми были последние годы жизни, когда старый и больной Лейбниц умирал забытый всеми. Только необычайная воля к труду и, как всегда, ясность мысли скрашивали его одиночество. Он умер в 1716 г. Смерть его не была отмечена ни в Берлинской академии наук, ни в Лондонском королевском обществе. Биограф Лейбница пишет, что он был похоронен как нищий, а не как выдающийся гений Германии. Только спустя много лет ему в родном городе был поставлен памятник. Но истинным памятником Лейбницу являются его математические идеи, которые и в наши дни продолжают приносить чудесные плоды на благо человека.

Леонард Эйлер

Этот крупнейший математик XVIII столетия родился в швейцарском городе Базеле в 1707 г. Отец его был пастором и хотел, чтобы сын тоже стал священником. В Базельском университете Леонард Эйлер штудировал богословие и древние языки, но слушал также лекции по математике профессора Иоганна Бернулли, знаменитого ученого, принадлежавшего к научной школе Лейбница.

Заметив блестящие способности своего слушателя, Бернулли стал с ним заниматься дополнительно. Вскоре математика одержала верх над богословием, и жизненное призвание Леонарда определилось окончательно.

В 1727 г. Эйлер по приглашению Петербургской академии наук приехал в Россию. Ему было 20 лет.

В Петербурге Эйлер попал в круг выдающихся ученых — математиков, физиков, астрономов, получил широкие возможности для издания трудов, полное материальное обеспечение. Он с увлечением принялся за работу, и в «Записках» академии стали появляться его статьи, привлекшие внимание ученых всей Европы. А вскоре он становится, по единодушному признанию современников, первым математиком мира.

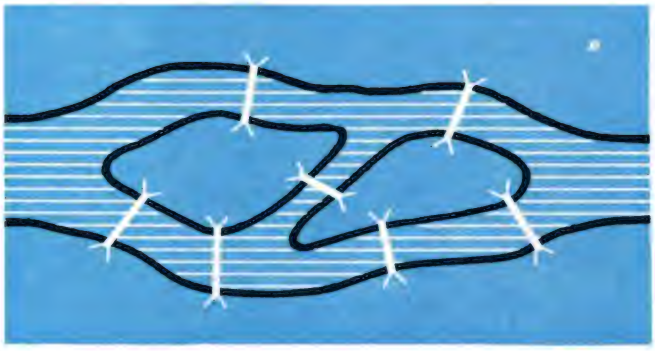
Деятельность Эйлера в Петербурге не ограничилась теоретическими исследованиями в математике. В течение нескольких лет он работает в географическом отделе академии над усовершенствованием карт России. Он готовит большой двухтомный труд по теории кораблестроения и кораблевождения и одновременно публикует книгу по теории музыки. Ученый ведет занятия со студентами университета при академии и пишет учебник арифметики для школьников. Он неоднократно участвует в различных комиссиях по техническим вопросам. Отдавая всю свою кипучую энергию академии, Эйлер открыто признавал, что всем, чем стал, он обязан прежде всего пребыванию в ней.

Неустойчивое и тревожное положение, создавшееся в России во время регентства Анны Леопольдовны, заставило Эйлера в 1741 г. перейти на работу в Берлинскую академию наук. При этом он сохранил самые тесные связи с Россией. Эйлер регулярно печатает в изданиях Петербургской академии примерно половину своих статей, редактирует математический отдел ее ученых записок, сообщает в своих частых письмах научные новости и т. д. Годами в берлинском доме Эйлера жили молодые русские ученые, с которыми он вел занятия.

Положение дел в Берлинской академии наук во многом не удовлетворяло Эйлера, и в 1766 г. он вернулся в Петербург.

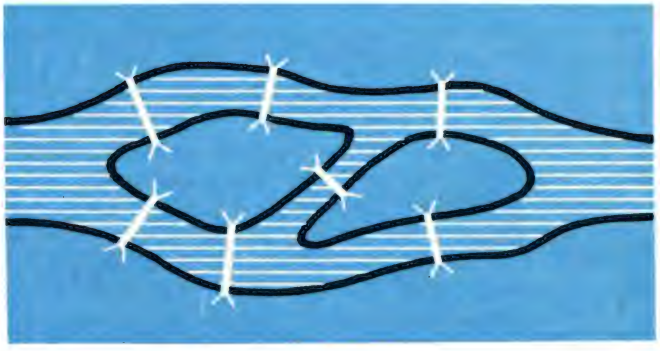
Последние 17 лет жизни Эйлера были омрачены почти полной потерей зрения. Опираясь на свои изумительные способности, он продолжал творить так же интенсивно, как в молодые годы. Только теперь он уже не писал сам, а диктовал ученикам, которые проводили за него и наиболее громоздкие вычисления. О работоспособности Эйлера на склоне лет говорит такой феноменальный факт: за 1777 г. он с секретарем подготовил около 100 научных статей, т. е.

Разделенные рекой части города (см. рис.) связаны 7-ю мостами. Можно ли обойти все мосты, побывав на каждом из них только по одному разу? Как это сделать?



Из любой части города можно обойти мосты, соблюдая условие задачи, при расположении мостов, указанном на левом рисунке.

Задача неразрешима при расположении мостов, указанном на правом рисунке.



почти по две статьи в неделю! Этот неустанный творческий труд оборвался лишь смертью Эйлера в 1783 г.

Творчество Эйлера поражает исключительной продуктивностью. Он оставил более 800 трудов, причем многие из них — большие книги в двух-трех томах. При жизни Эйлера статьи его не успевали печатать. Шутя он говорил, что оставит для академического журнала работ на 20 лет. Великий математик был превосходным вычислителем, но на этот раз он ошибся: посмертно печатали его неизданные сочинения еще около 80 лет!

Эйлер был не только самым плодовитым математиком всех времен. Он был необыкновенно разносторонним ученым, занимался всеми вопросами современной ему математики и ее приложений, а некоторые отделы начал разрабатывать впервые. Теория чисел и теория движения Луны, геометрия и оптические приборы, алгебра и сопротивление материалов, тригонометрия и баллистика — все это и многое другое интересовало его.

Человечество обязано Эйлеру многими ценными изобретениями, усовершенствованиями и техническими теориями. Он заложил основы современной техники изготовления ахроматических зрительных приборов, которые дают изображения, свободные от искажающего рассеяния цветов благодаря подбору линз с различными показателями преломления. Он создал первую теорию расчета действия турбин. Заложил основы теории гироскопа-волчка, которая играет очень большую роль в современной технике. Но, как ни велики эти заслуги Эйлера, главным в его жизни была разработка проблем математики. Ей он посвятил около 315 сочинений.

Около 150 работ Эйлера — статьи и книги по теории чисел. Значение их точно выразил великий русский математик П. Л. Чебышёв, продолживший многие исследования Эйлера: «Эти изыскания требовали новых приемов, открытия новых начал, одним словом, основания новой науки. Это было сделано Эйлером».

В геометрии Эйлер положил начало совершенно новой области исследований, выросшей впоследствии в большую и важную науку — топологию, которая изучает общие свойства пространства и фигур. Приведем два замечательных открытия Эйлера, относящихся к топологии.

Первое из них — решение задачи о мостах. Река образует острова, и через два речных рукава перекинуто 7 мостов. Спрашивается: можно ли пройти все 7 мостов так, чтобы каждый был пройден по одному лишь разу? Эйлер показал, что это невозможно, и рассмотрел более общую задачу, в которой речь идет о любом числе местностей, как-либо разделенных рукавами рек и соединенных мостами. Задачу о мостах часто формулируют несколько по-иному, спрашивая, можно ли описать фигуру, составленную из отрезков прямых или дуг кривых, так, чтобы каждое звено было пройдено один, и только один, раз.

Другое открытие представляет важную теорему учения о многогранниках: Эйлер установил и доказал, что числа вершин В, ребер Р и граней Г всякого многогранника, в котором нет «дыр», связаны формулой: $В+Г=Р+2$.

Главной областью математических работ Эйлера был математический анализ, т. е. дифференциальное и интегральное исчисления и ряд других примыкающих к ним наук. Здесь невозможно даже вкратце перечислить открытия Эйлера в этой области. Упомянем только, что он открыл удивительную зависимость между тригонометрическими функциями (синусом и косинусом) и показательной функцией e^x:

$$e^{xi} = \cos x + i \sin x, \text{ где } i = \sqrt{-1}.$$

Вместе с тем Эйлер впервые разработал общее учение о логарифмической функции, согласно которому все комплексные числа, кроме нуля, имеют логарифмы, причем каждому числу соответствует бесчисленное множество значений логарифма.

Знаменитый французский ученый П. Лаплас говорил: «Читайте, читайте Эйлера, он наш общий учи-

тель». Действительно, по математическим руководствам Эйлера «Введение в анализ», «Дифференциальное исчисление», «Интегральное исчисление», «Универсальная арифметика» (т. е. алгебра), по его книгам по механике и физике училось несколько поколений. Главное содержание этих книг вошло и в современные учебники.

Все сочинения Эйлера написаны очень доступно и увлекательно. Юный любитель математики может с пользой и интересом прочитать, конечно, с карандашом в руке первую часть «Введения в анализ». Она читается не так быстро, как приключенческий роман, но с не меньшим увлечением.

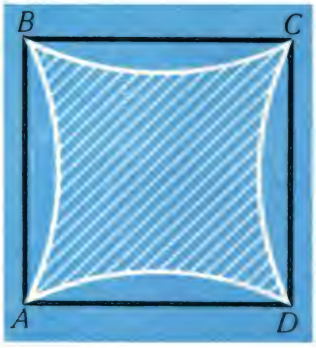
Жозеф Луи Лагранж

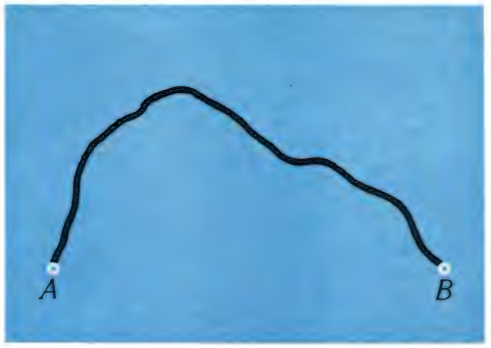
В 1736 г. в итальянском городе Турине, входившем тогда в состав Сардинского королевства, в семье военного казначея Лагранжа родился одиннадцатый ребенок, получивший при крещении имя Жозеф Луи. Когда мальчик вырос, его отдали в артиллерийскую школу, которая готовила военных специалистов, владеющих теорией артиллерийской стрельбы. Для успешного овладения этой теорией требовалась хорошая математическая подготовка, поэтому математика занимала видное место в процессе обучения. Выявившиеся выдающиеся математические способности Жозефа Луи позволили ему не только успешно окончить артиллерийскую школу Турина, но уже в возрасте 19 лет занять в ней место профессора математики. Вскоре вокруг молодого талантливого ученого образовался кружок интересующейся наукой молодежи, который впоследствии перерос в Туринскую академию. Первый том ее трудов увидел свет в 1759 г. Значительная часть работ, печатавшихся в этом издании, принадлежала самому Лагранжу.

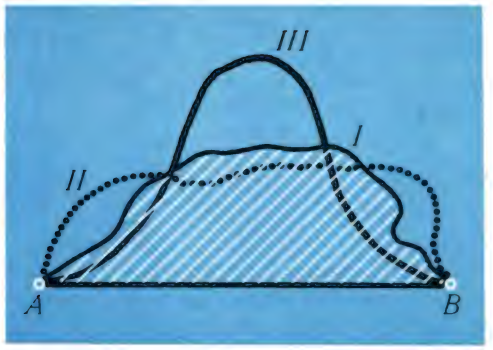
Среди различных вопросов, занимавших его в то время, выделялся один, разработке которого он уделял особенное внимание. Исследование этого вопроса привело к замечательным результатам, лежащим в основе *вариационного исчисления*.

Чтобы дать читателю представление о том, что изучается в этом разделе математики, рассмотрим одну из задач вариационного исчисления, история которой уходит в глубокую древность. Речь пойдет о зависимости между длиной замкнутой кривой на плоскости и площадью, ею ограниченной. Верно ли предположение, что бóльшая по длине кривая охватывает фигуру большей площади? Так думали древние путешественники, измеряя величину открытого ими острова длиной его береговой линии. Многие люди, пишет древнегреческий историк Полибий, судят о величине города по длине крепостных стен. Им кажется невероятным, что Спарта, со стеной длиной в 48 стадий, вдвое больше Мегаполиса, имеющего стену длиной в 50 стадий. Из рис. 1 видно, что площадь квадрата $ABCD$ больше площади заштрихованной фигуры, хотя длина границы последней превышает сумму длин сторон квадрата. Значит, высказанное выше предположение неверно. Естественным образом возникает задача — среди всех замкнутых кривых данной длины на плоскости найти ту, которая ограничивает наибольшую площадь. Античными геометрами было доказано, что такой кривой является окружность.

Некоторым усложнением предыдущей задачи является следующая. Пусть на горизонтальной плоскости в двух точках A и B закреплена нить фиксированной длины (большей, чем расстояние между этими точками, см. рис. 2). Будем произвольно менять ее положение, соблюдая следующие условия: 1) ни одна точка нити не должна находиться ниже прямой AB (рис. 3); 2) нить не имеет точек самопересечения. Пусть нить приняла положение, отмеченное на рис. 3 цифрой I. Рассмотрим фигуру, заключенную между отрезком AB и нитью в этом положении (на рис. 3 заштрихована). Обозначим ее площадь через S. Ясно, что площадь будет изменяться в зависимости от положения нити. Теперь сформулируем задачу: найти такое возможное положение нашей нити







(другими словами, такую гладкую кривую фиксированной длины, проходящую через точки A и B), чтобы значение S было наибольшим. Нахождение соответствующих выражений, зависящих от кривых на плоскости, и нахождение тех кривых, для которых эти выражения принимают наибольшие и наименьшие значения, — эти вопросы решаются средствами вариационного исчисления. (К сожалению, дать сколько-нибудь полное представление об этой науке и даже аккуратно сформулировать задачу, приведенную выше, здесь невозможно.)

Такого рода «принципы экономии» характерны для описания различных процессов, изучаемых физикой и механикой. Так, свет, распространяющийся из одной точки в другую, следует по тому пути, для прохождения которого ему требуется наименьшее время (принцип, установленный П. Ферма).

Подобными задачами занимались многие видные математики, достаточно назвать имена Якоба и Иоганна Бернулли, Б. Тейлора. Однако лишь в трудах знаменитого Леонарда Эйлера задачи такого рода были объединены в рамках единого исчисления, которому сам Эйлер дал название вариационного. О своих результатах по вариационному исчислению Лагранж написал в 1755 г. Эйлеру, который был настолько восхищен гением молодого ученого и значением полученных им результатов, что решил не опубликовывать свои собственные работы в этом направлении до появления в печати статьи Лагранжа. Статья появилась во II томе записок Туринской академии и принесла ее автору славу одного из создателей (наряду с Эйлером) вариационного исчисления. Имя Лагранжа приобретает европейскую известность, по представлению Эйлера его избирают членом Берлинской академии. А уже в 1766 г. по рекомендации того же Эйлера, покидавшего Берлин с тем, чтобы уже навсегда переселиться в Россию, он получает приглашение прусского короля Фридриха II занять кресло президента Берлинской академии.

Еще в Турине Лагранж начал заниматься приложениями вариационного исчисления к задачам механики. Постепенно у него возник грандиозный замысел: используя мощь современного ему математического анализа, переработав достижения в области механики крупнейших ученых XVIII в., наконец, взяв в качестве объединяющей основы вариационное исчисление, совершенно перестроить начиная с фундамента все здание механики. И если в классическом изложении Ньютона, выполненном за 100 лет до этого, механика выступала как раздел натуральной философии, т. е. науки о природе, то у Лагранжа она должна была стать отраслью математического анализа.

Его план был реализован в главном сочинении его жизни — «Аналитической механике», открывшей новый этап в истории развития этой дисциплины. Широкое использование вариационного исчисления позволило Лагранжу объединить различные принципы статики и динамики, что естественным образом привело к обобщенным координатам, а затем и к уравнениям движения в форме, которая впоследствии получила наименование *лагранжевой*. Новая механика Лагранжа, впитавшая в себя силу методов математического анализа, оказалась не только способной решать те задачи, которые ставила бурно развивающаяся наука и техника тех дней, но и приспособленной к решению проблем, которые возникли в последующие времена, вплоть до сегодняшнего дня. На основе лагранжева учения развились впоследствии теоретические основы машиноведения, наука о сопротивлении материалов. Использованное в теории гироскопов, оно служит сегодня для стабилизации многочисленных сложных устройств, начиная с гироскопических компасов на кораблях, кончая системами автоматического управления космическими кораблями; на его основе рассчитываются траектории полета спутников. Это лишь некоторые, наудачу выбранные, примеры применения лагранжевой механики, но сказанного вполне достаточно, чтобы составить себе представление о том исключительном значении, которое она имела для последующего развития науки и техники.

«Аналитическая механика» увидела свет уже в Париже, куда Лагранж переехал в 1787 г. (после смерти Фридриха II). Здесь он снова вернулся к преподавательской деятельности, вначале в Нормальной школе, созданной для подготовки преподавателей, а затем в знаменитой Политехнической школе, организованной с целью воспитания квалифицированных военных специалистов. Наряду с другими выдающимися преподавателями этих школ — Лапласом и

Рис. 1 (левый).

Рис. 2 (средний).

Рис. 3 (правый).

Монжем — он много сделал для развития преподавания математики не только во Франции, но и во всей Европе. Опубликованный им курс элементарной математики, прочитанный в Нормальной школе, оказал большое влияние на всю учебную литературу того времени. Большое значение имела его деятельность для внедрения в школьное преподавание десятичных дробей, которые стали необходимым орудием вычислительной практики после реформы мер и весов, проведенной революционным французским правительством. (Кстати, сам Лагранж был членом комиссии, подготовившей эту реформу.) Прочитанный им курс математического анализа был опубликован впоследствии в двух книгах (1797, 1801 гг.) и содержал попытку обоснования математического анализа, в основах которого содержались в то время значительные неясности и пробелы (общепринятое сегодня обоснование было дано знаменитым французским математиком О. Л. Коши в 1821 г.).

Говоря о научной деятельности Лагранжа, мы коснулись лишь некоторых ее аспектов, в то время как, подобно Эйлеру, Лагранж обогатил своим творчеством почти все области тогдашней математики. При этом целый ряд полученных им результатов по своей глубине и значению для развития математического знания ничуть не уступают его исследованиям по вариационному исчислению. Ему принадлежат фундаментальные результаты по алгебре (в частности, его работы по теории алгебраических уравнений послужили исходной точкой для исследований Э. Галуа), теории чисел (например, им была доказана теорема о том, что любое целое положительное число есть сумма не более чем четырех квадратов целых чисел), теории вероятностей, дифференциальным уравнениям, исчислению конечных разностей, комбинаторике, эллиптическим интегралам, различным вопросам математического естествознания и т. д. К сожалению, рассказать об этом, не выходя за рамки школьной математики, не представляется возможным.

Во Франции Лагранж пережил Великую революцию, времена Директории, Консульства и, наконец, наполеоновскую Империю. Бурные исторические события нашли слабое отражение в его биографии. Сменявшие друг друга правительства с постоянным глубоким уважением относились к величайшему математику страны. Умер Жозеф Луи Лагранж в 1813 г. Человек слабого здоровья, удивительно деликатный в обращении, очень скромный, он прожил внешне неприметную, лишенную ярких биографических деталей жизнь — жизнь, наполненную вдохновенным творческим трудом, дыхание которой мы ощущаем и поныне.

Карл Фридрих Гаусс

Карл Фридрих Гаусс родился в 1777 г. в небольшом немецком городе Брауншвейге. Отец его был водопроводчиком и в своем городе был известен как хороший вычислитель.

Маленький Карл Фридрих очень рано обнаружил поразительные способности к счету. Впоследствии Гаусс говорил друзьям, что он научился считать раньше, чем говорить. Рассказывают, что когда ребенку было 3 года, произошел следующий удивительный случай: как-то в присутствии сына отец производил расчет, сколько следует заплатить за работу каменщикам, учитывая, что некоторые из них работали и в обеденные часы. Окончив счет, он собирался уже приступить к выплате денег, как вдруг маленький Карл сказал, что расчет неверен и должно быть столько-то. Оказывается, мальчик в уме проверял все выкладки отца. Велико было удивление последнего, когда, проверив снова счет, он убедился, что сын прав!

Семи лет Гаусс поступил в народную школу. Первые два года, пока учили чтению и письму, мальчик не выделялся среди других. Но на третьем году началась арифметика, тут-то и проявились его замечательные способности. Учитель как-то задал мальчикам сосчитать сумму чисел $1+2+3+\ldots+40$. Другие ученики принялись подряд складывать числа, Гаусс же почти сразу подал учителю свою грифельную доску с правильным ответом; он заметил, что числа, стоящие на одинаковом расстоянии от начала и конца, дают при сложении одно и то же число:

$$1+40=2+39=3+38=\ldots=20+21=41.$$

Но всего таких пар чисел будет 20, следовательно, искомая сумма равна: $41\cdot 20=820$.

В это время на мальчика обратил внимание молодой помощник учителя Бартельс. Он начал вместе с Гауссом читать книги по математике. Он же сумел заинтересовать герцога Брауншвейгского, рассказав ему о математической одаренности мальчика, и добился, чтобы Гауссу была оказана материальная помощь и он смог продолжать учение.

В гимназии Гаусс очень быстро овладел древними языками и изучил несколько европейских. Окончив ее, юноша поступил в 1795 г. в Геттингенский университет. Первое время он посещал лекции и по математике, и по филологии, не зная, что ему избрать. Посвятить себя математике Гаусс решил только после своего знаменитого открытия — доказательства

возможности построения правильного 17-угольника с помощью циркуля и линейки. Открытие 19-летнего Гаусса произвело сенсацию: после Евклида, указавшего способы построения правильных многоугольников с числом сторон 3, 4, 5, $3 \cdot 2^k$, $5 \cdot 2^k$, $4 \cdot 2^k$, 15, ни одному математику не удавалось продолжить этот ряд, хотя проблема занимала очень многих. Гаусс дал полное ее решение, доказав, что правильный n-угольник, где n — число простое, может быть построен циркулем и линейкой в том, и только в том, случае, когда n имеет вид $2^{2^k}+1$. В частности, полагая $k=0, 1, 2, 3$, получим, что правильные 3-, 5-, 17- и 257-угольники можно построить циркулем и линейкой (а 7-угольник — нельзя).

Произвольный же правильный m-угольник можно построить тогда, и только тогда, когда $m = 2^S \cdot n_1 \quad n_2 \qquad n_i$, где n_i — указанные выше простые числа.

Как ни замечателен сам факт, открытый Гауссом, еще большее значение имел метод, который он применил. Гаусс связал проблему построения правильных многоугольников с вопросом: когда корень уравнения $x^n - 1 = 0$ выражается с помощью одних только квадратных радикалов? Гаусс доказал, что это уравнение всегда решается в радикалах, а при n простом и имеющем вид $2^{2^k}+1$ корень его выражается с помощью одних только квадратных радикалов. Он развил при этом методы, которые позднее легли в основу теории Галуа.

С этого момента начинается героический период творчества Гаусса. На следующие 5 лет падает бо́льшая часть его величайших открытий в теории чисел, алгебре и анализе. Вспоминая об этом времени, Гаусс говорил, что новые идеи в таком обилии появлялись у него в голове, что он едва справлялся с ними в сознании, а коротко записывать успевал только часть из них. Это же видно и из дневника Гаусса, в котором он отмечал свои открытия. Так, построение правильного 17-угольника там датировано 30 марта 1796 г., а 8 апреля того же года — первое доказательство квадратичного закона взаимности, одного из основных в теории чисел. Закон был открыт Л. Эйлером, но сам Эйлер не смог доказать его, Гаусс же дал 8 различных доказательств!

В 1797 г. Гаусс предложил новое доказательство основной теоремы алгебры, а именно показал, что всякое алгебраическое уравнение с действительными коэффициентами имеет корень. За эту работу Гауссу была присуждена в 1799 г. степень доктора.

Все свои работы по теории чисел Гаусс собрал в замечательном сочинении «Арифметические исследования» (1801 г.). Эта книга сразу поставила молодого Гаусса в ряд таких математиков, как П. Ферма и Л. Эйлер. В ней впервые строилась теория сравнений и доказывались важные теоремы теории чисел и теории групп.

Но Гаусс был не только великим математиком, пролагавшим своими исследованиями новые пути развития этой науки; он был и замечательным естествоиспытателем. Так, в 1832—1833 гг. он построил в Геттингене электромагнитный телеграф. Он основал также первую в мире магнитную обсерваторию.

Очень рано внимание Гаусса привлекли проблемы астрономии. Ему удалось определить орбиту малой планеты Цереры. Решение этой чрезвычайно сложной задачи принесло 24-летнему Гауссу широкую известность. В 1807 г. он был приглашен на пост директора Геттингенской обсерватории, который не покидал до конца жизни. Одновременно он начал преподавать астрономию в Геттингенском университете. Результаты своих исследований по астрономии Гаусс объединил в фундаментальном труде «Теория движения небесных тел».

С 1820 г. он непосредственно руководил геодезическими съемками Ганноверского королевства, разработал геодезию как науку и создал *теорию поверхностей*. До Гаусса были изучены геометрии только на двух поверхностях: на плоскости (планиметрия Евклида) и на сфере (сферическая геометрия). Гаусс нашел способ построения геометрии на любой поверхности, определив, какие линии играют на поверхности роль прямых, как мерить расстояния между точками на поверхности и т. д. Теория Гаусса получила название *внутренней геометрии*.

Идеи Гаусса оказали определяющее влияние не только на развитие геометрии, но и на формирова-

ние современной физики. Творец теории относительности А. Эйнштейн писал, что его учение очень похоже на теорию поверхностей Гаусса. И действительно, риманова геометрия, созданная по образцу гауссовой теории поверхностей, но только для пространств любого числа измерений, легла в основу теории относительности, так же как евклидова геометрия — в основу классической механики Ньютона.

Современники рисуют Гаусса жизнерадостным человеком, наделенным большим чувством юмора. Гаусс живо интересовался литературой, философией, политикой, экономикой. Его внимание привлек расцвет культуры в России начала XIX в. Он поддерживал научные связи с Петербургской академией наук, которая еще в 1801 г. избрала его своим членом-корреспондентом, а в 1824 г. — иностранным членом. В возрасте 62 лет Гаусс выучил русский язык. В письмах в Петербургскую академию наук он жаловался на недостаток русской литературы в Геттингене, просил присылать ему русские журналы и книги, в частности прислать «Капитанскую дочку» Пушкина. Умер Гаусс в 1855 г.

У него было не много личных учеников. Однако его можно с полным правом назвать учителем математиков всего мира. Истоки основных идей современной алгебры, геометрии, теории чисел и высшего анализа восходят к Гауссу. Созданными им понятиями и методами до сих пор оперируют математики и физики.

Николай Иванович Лобачевский

Николай Иванович Лобачевский, великий математик, «Коперник в геометрии», построивший новую систему геометрии, родился в 1792 г. в Нижнем Новгороде (теперь г. Горький). Отец его умер рано, и мать переехала с тремя сыновьями в Казань. Умная и энергичная женщина, она добилась того, чтобы ее дети были приняты в гимназию на казенный счет. По окончании гимназии Николай поступил на физико-математический факультет Казанского университета. Ему было тогда только 14 лет. К этому времени он уже овладел латинским, французским и немецким языками настолько, что мог свободно читать научную литературу, и углубился в изучение трудов Л. Эйлера, Ж. Лагранжа, К. Гаусса. Его руководителем в университете был профессор Бартельс, ученый с большим научным кругозором, которому до того довелось быть учителем Гаусса. Бартельс вскоре об-

ратил внимание на математическое дарование Лобачевского и побуждал его к самостоятельным научным исследованиям.

Однако инспектора Казанского университета были недовольны молодым Лобачевским. Они заметили у юноши признаки вольнодумства и даже «признаки безбожия». Лобачевскому грозило исключение из университета и отдача в солдаты. Только энергичное заступничество профессоров спасло юношу.

В 1811 г. Лобачевский был произведен, минуя степень кандидата, в магистры, а в 1814 г. приступил к чтению лекций. Через два года он получил кафедру чистой математики и стал профессором университета. В течение более тридцати лет он читал все основные курсы математики, а часто — механики и астрономии. В 1827 г. его выбрали ректором Казанского университета. С этого времени Лобачевский бессменно руководил университетом вплоть до своей отставки в 1846 г. Он оказался не только замечательным педагогом, но и прекрасным организатором: при нем были построены астрономическая и магнитная обсерватории, анатомический театр, химическая лаборатория, физический кабинет и библиотека. Лобачевский основал и знаменитые «Ученые записки» Казанского университета.

Лобачевскому принадлежит ряд первоклассных работ по алгебре и математическому анализу. Но главным содержанием его жизни было создание и пропаганда неевклидовой геометрии. Евклид построил свою геометрию в III в. до н. э., и с тех пор она казалась единственно возможной (см. статьи «Как возникла геометрия» и «О различных геометриях»).

Лобачевский, как и его предшественники, сначала пытался доказать аксиому о параллельных, сформулированную Евклидом. Но уже в 1823 г. у него зародилась новая идея: он пришел к мысли, что аксиому о параллельных Евклида вообще нельзя доказать, более того, можно принять другую аксиому о параллельных и на ее основе построить новую, неевклидову геометрию, столь же стройную и непротиворечивую, как и геометрия Евклида. И Лобачевский с увлечением принялся за построение этой новой системы, исследуя и доказывая ее законы (см. те же статьи).

Нам трудно сейчас представить, насколько смелой была мысль Лобачевского. Ведь на протяжении двух тысяч лет геометрия Евклида лежала в основе представления о пространстве, на ней строилась классическая механика Ньютона да и вся классическая физика. Нужно было большое личное мужество, беззаветная преданность научной истине, чтобы не побояться выступить с утверждением о возможности новой геометрии. Такое утверждение многим казалось тогда равносильным безумию.

11 февраля 1826 г. на заседании отделения физико-математических наук Лобачевский сделал доклад, в котором изложил свои новые идеи в геометрии. Эта дата считается днем рождения неевклидовой геометрии. Однако его смелые мысли не были поняты слушателями, вызвав у них только тягостное недоумение.

Но это не обескуражило молодого ученого. В 1829—1830 гг. он опубликовал труд «О началах геометрии», в котором подробно излагал геометрию, основанную на новой аксиоме о параллельных, согласно которой через точку, лежащую в данной плоскости вне данной прямой, можно провести по крайней мере две прямые, не пересекающие заданную прямую. Это сочинение Лобачевского было встречено пренебрежением и насмешками. Полагая, что он все еще недостаточно ясно изложил свои идеи, Лобачевский в 1835 г. пишет новый труд — «Воображаемая геометрия», затем издает французский перевод его, вслед за этим «Новые начала геометрии с полной теорией параллельных» и, наконец, «Геометрические исследования с полной теорией параллельных» на немецком языке.

Лобачевский был глубоко убежден, что его система получит применение для описания и изучения свойств нашего пространства. Желая проверить, какие геометрические законы имеют место в космосе, он подсчитал по данным астрономических наблюдений сумму углов треугольника, вершинами которого являются два диаметрально противоположных положения Земли на своей орбите и звезда Сириус. Известно, что в евклидовой геометрии сумма углов любого треугольника равна $2d$, в геометрии же Лобачевского эта сумма различна у разных треугольников, но всегда меньше $2d$. Лобачевский надеялся, что у такого громадного треугольника, который он выбрал, отклонение суммы углов от $2d$ будет значительным. Однако расчет показал, что отклонение это очень незначительно — оно могло быть объяснено погрешностями при наблюдении.

Геометрия Лобачевского так и не получила признания при жизни великого геометра. В 1846 г. исполнилось 30 лет профессорской деятельности Лобачевского, и он, по законам того времени, должен был уйти в отставку. Ему очень тяжело было покинуть любимый университет, и свою отставку он пережил болезненно. Мысль о том, что его геометрия все еще не находит признания, также угнетала Лобачевского. В последние годы жизни он решил еще раз изложить свои идеи и принялся за «Пангеометрию», в которой стремился особенно ясно оттенить мысль о том, что евклидова геометрия — частный, предельный случай более общей неевклидовой геометрии. В это время он почти полностью потерял зрение, и ему приходилось диктовать свою книгу ученикам. Все необходимые выкладки он производил в уме. Книгу ученый закончил за год до смерти, наступившей в 1856 г.

Глубоко трагична судьба этого замечательного человека, так и не дождавшегося признания своего великого открытия.

Прошло не более 15 лет со дня смерти Лобачевского, и геометрия его была не только признана, но и вошла в моду. О ней читались лекции и писались трактаты, велись научные дебаты и салонные разговоры, ей посвящались популярные книги и стихи. Такой успех можно сравнить только с успехом теории относительности в 20-х годах нашего века или «думающих» машин и кибернетики в наши дни.

Начиная с 60-х годов прошлого века неевклидова геометрия приобретала все большее значение в математике. Огромную роль сыграло то обстоятельство, что в трудах позднейших ученых была доказана непротиворечивость новой геометрии. Только после этого она сделалась полноправной математической теорией. Действительно, при построении новой геометрии Лобачевский исходил из тех же аксиом, что и Евклид, только принял вместо евклидовой аксиомы о параллельных новую аксиому, которую мы привели выше. Теоремы геометрии Лобачевского получались как следствия этой новой системы аксиом. При этом могло случиться, что, развивая эти следствия дальше, мы на каком-то шагу придем к противоречию. Это означало бы, что принятое допущение, т. е. аксиома о параллельных Лобачевского, неверно. Мы получили бы доказательство аксиомы Евклида методом от противного. Если же противоречие никогда

не получится, то, следовательно, построенная система геометрии логически равноправна евклидовой.

В связи с неевклидовой геометрией впервые был поставлен вопрос о том, как вообще можно доказать непротиворечивость некоторой математической теории, и были найдены первые методы доказательства непротиворечивости. Исследование этой новой проблемы имело большое значение для всего дальнейшего развития математики. Прежде всего возникла необходимость выявить и проанализировать все аксиомы, которые лежат в основе геометрии Евклида. Это было сделано Д. Гильбертом в конце XIX в. Дальнейшее изучение этих проблем привело к созданию аксиоматического метода, играющего важнейшую роль в современной математике.

В конце XIX в., как и предвидел Лобачевский, его геометрия получила применение в физике, а именно в специальном принципе относительности. Для общего принципа относительности оказались необходимыми другие системы неевклидовой геометрии, построенные Б. Риманом.

Таким образом, геометрия Лобачевского не только необыкновенно расширила предмет самой геометрии, она получила широкое применение в других областях математики, способствовала рождению новых математических идей и методов и оказалась незаменимой для современной физики.

Эварист Галуа

Короткой, но яркой была жизнь этого замечательного математика, его идеи преобразовали алгебру.

Галуа родился в 1811 г. в небольшом городе Бурля-Рен близ Парижа. Его отец руководил учебным заведением для юношей, а с 1813 г. был бессменным мэром своего города. Эварист рос болезненным и впечатлительным мальчиком. Первоначальное образование он получил под руководством своей матери, большой поклонницы античной культуры. Двенадцати лет Галуа поступил в Королевский коллеж в Париже. Первые три года он считался хорошим учеником, хотя учителя и отмечали его «несколько необычные манеры», но на четвертом году он начал заниматься математикой и так увлекся ею, что потерял интерес к другим наукам. По выражению одного из педагогов, «он был одержим демоном математики».

Галуа самостоятельно изучал сочинения Ж. Лагранжа, Л. Эйлера, К. Гаусса, а впоследствии и высоко ценимого им Н. Абеля. В 1828 г. Эварист потерпел неудачу на конкурсных экзаменах в Политехническую школу и целый год упорно работал над углублением своих математических знаний под руководством прекрасного педагога Ришара. В это же время у Ришара занимались будущий знаменитый математик Ш. Эрмит и будущий известный астроном У. Леверье, но самым одаренным из своих учеников Ришар считал Галуа. Уже в это время была опубликована одна из работ Галуа. И тем не менее, к большому удивлению своих товарищей и Ришара, в 1829 г. Галуа снова провалился на конкурсных экзаменах. На этот раз, по-видимому, решающую роль сыграл неуравновешенный характер Эвариста. Ему показалось, что экзаменаторы смеются над ним: задают ему слишком простые вопросы. Придя в ярость, Галуа отказался отвечать.

Если бы Галуа поступил в Политехническую школу, быть может, вся его жизнь сложилась бы иначе. В то время в Политехнической школе преподавали лучшие математики Франции, и учащиеся имели полную возможность заниматься научными исследованиями. Но Эварист не мог ждать еще год. Отец его умер, и ему надо было заботиться о средствах существования. Поэтому по совету Ришара он поступил в Нормальную школу, которая давала стипендию и готовила преподавателей для высших и средних учебных заведений. За год пребывания в этой школе Галуа написал несколько научных работ, из которых одна, посвященная вопросам теории чисел, представляла исключительный интерес. Эти работы вместе с первым исследованием о решении уравнений в радикалах он представил на соискание Большой математической премии Парижской академии наук. Все статьи попали к непременному секретарю академии знаменитому математику Ж. Фурье. Однако Фурье вскоре умер, в его бумагах нашли только часть работ Галуа (другая часть, в том числе исследование о разрешимости уравнений в радикалах,

была утеряна). Но опубликованы были эти работы много позднее.

До июля 1830 г. Галуа мало интересовался политикой. Но с первых же дней Июльской революции с присущей ему страстностью Эварист бросился в самую гущу политических событий. Он примкнул к левому крылу республиканской партии — Обществу друзей народа. В декабре того же года за разоблачение в печати двуличного поведения директора Нормальной школы в дни Июльской революции Галуа был исключен из этой школы.

В январе 1831 г. Галуа вновь передал в Парижскую академию наук рукопись своего исследования о решении уравнений в радикалах. В письме президенту академии Галуа просил «по крайней мере прочесть со вниманием» то, что он написал. На этот раз работа была передана на рассмотрение двум академикам. Однако они не смогли понять рукописи Галуа — слишком новы были изложенные там идеи. Академия отвергла работу Галуа. В это время Галуа был в тюрьме. Его арестовали в мае 1831 г. за то, что он произнес тост, который все восприняли как призыв к свержению короля Луи Филиппа. Суд оправдал Эвариста, но вскоре после освобождения он вновь был арестован как один из вожаков демонстрации 14 июля. На этот раз он просидел в тюрьме около 9 месяцев. Вскоре после освобождения жизнь юноши оборвалась. В мае 1832 г. двадцатилетний Эварист Галуа был убит на дуэли.

В ночь перед дуэлью, зная уже, что его работы отвергнуты академией, и уверенный в правильности своих выводов, Галуа написал своему другу Огюсту Шевалье письмо, почти целиком посвященное математике. Он сформулировал в нем свои основные теоремы, относящиеся к теории уравнений. Он просил Шевалье в случае своей смерти обратиться публично к К. Гауссу или К. Якоби с просьбой «дать заключение не о справедливости, а о важности этих теорем».

Однако и это письмо, и замечательная работа Галуа «Об условиях разрешимости уравнений в радикалах» пролежали еще 14 лет. Они были опубликованы вместе с другими сохранившимися работами Галуа только в 1846 г. известным ученым Ж. Лиувиллем. Но прошло еще около 20 лет, прежде чем идеи Галуа прочно вошли в математическую науку.

Математическое наследство Галуа составляет всего шестьдесят небольших страниц печатного текста. Многие свои мысли он не успел изложить, сохранились лишь наброски неоконченных работ и планы, но то, что он успел сделать, настолько велико, что совершенно изменило лицо алгебры.

Проблема, которую решал Галуа, состояла в следующем: известно, что корни уравнений 2, 3, 4-й степеней можно выразить с помощью радикалов через коэффициенты этих уравнений. В 1824 г. Абель доказал, что существуют уравнения 5-й степени, которые в радикалах не решаются. Между тем было известно, что можно найти уравнения любой степени, разрешимые в радикалах, например уравнения $x_n - 1 = 0$ при $n = 2, 3, 4,$ Пусть теперь задано уравнение n-й степени, т. е. заданы его коэффициенты. Как узнать, решается ли оно в радикалах? Эту проблему и решил Галуа. Основной интерес представляет метод его решения. К сожалению, мы сможем здесь сказать о нем очень мало. Разве только то, что Галуа построил для решения задачи аппарат теории групп и начал строить теорию полей. Обе эти теории являются основой современной алгебры, а теория групп — и всей математики (см. ст. «Чем занимается алгебра?»).

Пафнутий Львович Чебышёв

Пафнутий Львович Чебышёв, один из крупнейших математиков прошлого века, родился в 1821 г. в Калужской губернии в имении отца. Первоначальное образование он получил дома. 16-ти лет Чебышёв был принят на физико-математический факультет Московского университета. Здесь он написал первую научную работу «Вычисление корней уравнения», за которую был награжден серебряной медалью.

В 1841 г. Чебышёв окончил Московский университет. Ему предстояло сделать выбор: либо идти на службу и бросить математику, либо целиком отдаться занятиям любимой наукой и терпеть лишения. Чебышёв выбрал последнее.

В 1846 г. он защитил магистерскую диссертацию «Опыт элементарного анализа теории вероятностей». В следующем году Чебышёв переехал в Петербург, где ему предложили должность адъюнкта в Петербургском университете. С 1860 г. он стал профессором того же университета. Много сил потратил Чебышёв на то, чтобы систематизировать и издать исследования Эйлера по теории чисел. Вопросы этой теории все более и более приковывали внимание самого Чебышёва. В 1849 г. он защитил докторскую диссертацию «Теория сравнений», посвященную теоретико-числовым проблемам. К этому же времени относятся знаменитые работы Чебышёва о простых числах.

Еще в глубокой древности ученых интересовал вопрос о том, по какому закону расположены в натуральном ряду простые числа: 2, 3, 5, 7, 11, 13,

17, 19, В «Началах» Евклида было доказано, что простых чисел бесконечно много. Хотя со времен Евклида прошло более двух тысяч лет, к его теореме ничего нового добавлено не было. Простые числа в натуральном ряду располагаются чрезвычайно прихотливо. С одной стороны, существуют простые числа-«двойники», которые отличаются одно от другого на 2, например: 3 и 5, 11 и 13, 17 и 19, 41 и 43 и т. д. Имеется гипотеза, что таких «двойников» бесконечно много. С другой стороны, если расположить все простые числа в ряд в порядке их возрастания:

$$p_1,\ p_2,\ .\ .\ .\ p_n,\ .\ .\ .\ (p_1 < p_2 < \ .\ .\ .\ < p_n < \ .\ .\ .),$$

то можно всегда найти в этом ряду два соседних числа p_m и p_{m+1}, разность между которыми $p_{m+1} - p_m$ как угодно велика.

Рассмотрим теперь такую задачу. Пусть $\pi(n)$ — число простых чисел, не превосходящих n. Мы не можем точно определить, каково будет $\pi(n)$ для любого n; но нельзя ли его вычислить приближенно? Еще К. Гаусс и А. Лежандр, занимаясь этим вопросом, чисто эмпирически пришли к выводу, что $\pi(n)$ для больших n приближенно равно $\frac{n}{\log_e n}$, причем в знаменателе стоит натуральный логарифм, т. е. взятый по основанию $e = 2{,}7182...$ Но даже такие математики не смогли доказать замеченного ими факта. Только Чебышёву удалось сдвинуть проблему о простых числах с мертвой точки. Он показал, что если отношение $\frac{\pi(n)}{\frac{n}{\log_e n}}$ при n, неограниченно возрастающем, имеет предел, то этот предел равен единице. Впоследствии было показано, что этот предел существует. Это означает, что при больших n числитель $\pi(n)$ примерно равен знаменателю $\frac{n}{\log_e n}$

Чебышёв доказал также так называемый «постулат Бертрана», выдвинутый французским математиком Ж. Бертраном, согласно которому между числами N и $2N-2$ при $N>3$ всегда содержится простое число.

Исследования Чебышёва по теории чисел сразу же выдвинули молодого русского математика в число первых ученых Европы.

Второй цикл работ, прославивших Чебышёва, составили его исследования по теории вероятностей. Теория вероятностей — сравнительно молодая область математики. Первые задачи ее появились только в XVI—XVII вв. и были связаны с азартными играми (в кости, карты), а впоследствии с обработкой результатов наблюдений. И хотя многие ее основные предложения ко времени Чебышёва были уже хорошо известны, методы этой теории были лишены должной строгости, а приложения ее часто приводили к ошибочным результатам. Такие неудачи привели к разочарованию в теории вероятностей, некоторые говорили даже о «математическом скандале».

Только Чебышёв сумел вывести теорию вероятностей из кризиса. Он ввел и систематически рассматривал *случайные величины*, а также нашел новый метод доказательства теорем этой теории. С этого времени теория вероятностей стала полноправной математической дисциплиной.

Чебышёв является основателем русской школы теории вероятностей, которая занимает ведущее место в мировой науке. Благодаря работам Чебышёва и его школы теория вероятностей сделалась могучим орудием для исследования проблем физики (особенно квантовой механики), техники, биологии и других областей знания.

Еще в юности Чебышёв любил строить сложные механизмы. Эта любовь сохранилась у него на всю жизнь. Ученый изобрел более 40 типов шарнирных (или суставчатых, как он их называл) механизмов. Среди них была стопоходящая машина, воспроизводящая движения животных при ходьбе, гребной механизм, который повторял движение весел лодки, самокатное кресло и многие другие. Выставка этих механизмов, устроенная при жизни великого ученого в Чикаго, произвела потрясающее впечатление на современников. Чебышёв построил также арифмометр-полуавтомат, который хранится в Париже в Музее искусств и ремесел. Однако Чебышёв интересовался механизмами не только как изобретатель, но и как математик. Занимаясь теорией механизмов, он сумел увидеть в ней новые математические проблемы, которые в его время были еще совершенно не изучены. Его работы, посвященные этим проблемам, положили начало теории наилучшего приближения функций. Эта теория с тех пор успешно развивается.

У П. Л. Чебышёва было много учеников. Он по праву считается основателем петербургской математической школы, которая насчитывает в своих рядах таких первоклассных ученых, как Е. И. Золотарев, А. А. Марков, А. М. Ляпунов, Г. Ф. Вороной.

Заслуги П. Л. Чебышёва были признаны всем ученым миром. В 38 лет он был избран членом Петербургской академии наук, затем членом Парижской и Берлинской академий, Лондонского королевского общества и многих других академий.

Ученый прожил долгую жизнь и до последней минуты много и плодотворно работал. Умер Чебышёв в 1894 г. За письменным столом он внезапно почувствовал себя плохо и вскоре скончался от паралича сердца.

Софья Васильевна Ковалевская

Имя первой русской женщины-математика Софьи Васильевны Ковалевской известно всему образованному миру. Рассказ о ее жизни — это увлекательная история о том, как маленькая жизнерадостная девочка, «воробышек», стала выдающимся математиком; это поучительная история о девушке, полюбившей свободу и математику; это история о женщине-герое, проложившей дорогу в науку, к высшему образованию женщинам России и Европы.

Она родилась в 1850 г. в Москве в богатой семье генерал-лейтенанта артиллерии в отставке Корвина-Круковского. Маленькая Соня училась удивительно легко. Отец всячески поддерживал и развивал ее интерес к науке. Любознательная и настойчивая в учебе, Соня особенно увлеклась математикой. Любопытно, как произошло ее первое знакомство с высшей математикой. Случилось так, что стены в детской комнате были оклеены лекциями по математическому анализу знаменитого академика М. В. Остроградского. Как пишет С. В. Ковалевская, «от долгого ежедневного созерцания внешний вид многих из формул так и врезался в моей памяти», и через много лет ее преподаватель по математическому анализу удивлялся, «как скоро она охватила и усвоила себе понятие о пределе и производной, точно она их наперед знала». Особенно возбуждали фантазию девочки математические рассуждения ее дяди, «внушая... благоговение к математике, как науке высшей и таинственной, открывающей перед посвященными в нее новый чудесный мир, недоступный простым смертным». Знакомый отца, профессор Тырнов, обратил внимание родителей на математические способности четырнадцатилетней девочки.

Еще не зная тригонометрии, Соня пыталась разобраться в смысле тригонометрических формул, встретившихся ей в учебнике по физике. Отец пригласил заниматься с дочерью известного преподавателя А. Н. Страннолюбского, и с 15 лет она начала систематически изучать курс высшей математики.

В то время в России девушкам было запрещено учиться в университетах и высших школах. Женщины могли поступать только в некоторые зарубежные университеты. Но уехать из-под строгого надзора родителей молодым девушкам было очень трудно. Многим девушкам из богатых семей приходилось вступать в фиктивный брак, чтобы получить право уехать за границу и там учиться. Софья Васильевна вступила в такой брак (ставший позже фактическим) с молодым ученым В. О. Ковалевским.

В 1869 г. молодые супруги уезжают за границу, в Германию, в университетский городок Гейдельберг. Каждый из них стал усердно заниматься наукой.

В Гейдельберге Ковалевская посещала лекции крупнейших ученых-математиков. В 1870 г. она переехала в Берлин, решив добиваться права на посещение лекций знаменитого немецкого математика К. Вейерштрасса. Вейерштрасс читал лекции в Берлинском университете, куда женщины не допускались. Сам Вейерштрасс считал, что в университете, а особенно на математическом факультете, женщинам учиться нельзя. Однако Ковалевская добилась того, чтобы Вейерштрасс проэкзаменовал ее. Вейерштрасс предложил ей задачи, которые сам считал

трудными для таких экзаменов. Каково же было удивление профессора, когда на следующий день взволнованная молодая женщина принесла ему блестяще решенные задачи! Вейерштрасс согласился заниматься с ней частным образом. Вскоре он признал особое математическое дарование своей ученицы. Он писал: «Что касается математического образования Ковалевской, то я имел очень немного учеников, которые могли бы сравниться с ней по прилежанию, способностям, усердию и увлечению наукой».

Через 4 года Вейерштрасс мог представить в Геттингенский университет работы Ковалевской, посвященные интереснейшим вопросам математики и механики. Работа «К теории дифференциальных уравнений в частных производных» содержала доказательство существования решений у таких уравнений. В курсах дифференциальных уравнений, которые теперь читают в университетах, эта теорема называется теоремой Ковалевской. Другая работа была посвящена исследованию формы гигантского кольца планеты Сатурн. В третьей работе излагались труднейшие теоремы математического анализа. Университет заочно присудил талантливому молодому ученому докторскую степень «с наивысшей похвалой».

Двадцати четырех лет, «с докторским дипломом в кармане», Ковалевская возвращается в Петербург. Здесь она почти на 6 лет отошла от занятий математикой. По существовавшим законам она, как женщина, имела право преподавать только арифметику в младших классах. В это время Софья Васильевна начинает писать статьи и рассказы, начинается ее литературно-публицистическая деятельность. Сама Ковалевская писала, что она всю жизнь не могла решить, к чему у нее было «больше склонности — к математике или к литературе». Среди ее знакомых не только ученые — Д. И. Менделеев и П. Л. Чебышёв, но и писатели — Ф. М. Достоевский и И. С. Тургенев. Достоевский, несомненно, во многом способствовал пробуждению литературного таланта Ковалевской. Ее перу принадлежат «Воспоминания детства», роман «Нигилистка», драма «Борьба за счастье» и другие произведения.

В 1879 г., по предложению П. Л. Чебышёва, на 6-м съезде русских естествоиспытателей и врачей С. В. Ковалевская прочитала доклад об абелевых интегралах.

После неоднократных приглашений она в 1883 г. соглашается работать в Стокгольмском университете. Здесь начинается расцвет ее научной и литературной деятельности. В Стокгольмском университете Ковалевская прочла с большим успехом около двадцати курсов по математике. Написанная ею научная работа о вращении твердого тела была удостоена особой премии Парижской академии наук, причем сумма премии была увеличена с 3000 франков до 5000.

В 1889 г. Петербургская академия наук по настоянию П. Л. Чебышёва, предварительно приняв специальное постановление о присуждении женщинам академических званий, избрала С. В. Ковалевскую своим членом-корреспондентом. Сохранилась телеграмма, в которой ей сообщалось об этом событии: «Наша Академия наук только что избрала Вас членом-корреспондентом, допустив этим нововведение, которому не было до сих пор прецедента. Я очень счастлив видеть исполненным одно из моих самых пламенных и справедливых желаний. Чебышёв».

Умерла С. В. Ковалевская в 1891 г., внезапно, в расцвете творческих сил.

Норберт Винер

О некоторой общности процессов управления и передачи сигналов, протекающих в автоматических устройствах, живых организмах и всякого рода обществах, начиная с муравейника и кончая человеческим, люди задумывались давно. Однако лишь бурное развитие научной и технической мысли нашего столетия привело к необходимости осознания этой общности, выделения и изучения этих процессов. Эта необходимость стала особенно ощутимой во время второй мировой войны, когда усилия ученых были сосредоточены на разработке проблем, так или иначе связанных с технической стороной ведения войны, и задачи автоматического управления, автоматической связи, совершенствования вычислительной техники приобрели особую важность. В 1944 г. в Принстоне (США) собрались инженеры, физиологи и математики. Темой их беседы послужили общие проблемы управления, осуществляемого в живых организмах и автоматических устройствах. Выступления участников и оживленный обмен мнениями показали, что наступило время объединения разрозненных наблюдений и концепций, сложившихся в рамках специальных наук, в единую общую теорию, использующую математические методы, о процессах управления и передачи сигналов в машинах и живых организмах. Первым шагом на этом пути должно было явиться создание программного труда, в котором был бы определен предмет новой науки, намечены основные ее методы, выделены главные направления развития и сформулированы важнейшие проблемы. Задача создания такого труда в

значительной мере осложнялась тем, что его автор должен был быть первоклассным математиком и обладать обширными познаниями в самых разнообразных областях современного знания, таких, например, как физика, техника, социология, физиология, и многих других. Человеком, в котором счастливо соединились эти качества и который блистательно разрешил эту задачу, оказался известный уже тогда математик из Массачусетского технологического института Норберт Винер. Придуманное им название «кибернетика» (от греческого kybernétés, означающего «кормчий») стало именем новой науки, а написанная в 1948 г. книга «Кибернетика или управление и связь в животном и машине» открыла ее официальную историю.

Норберт Винер родился в 1894 г. в США, в г. Колумбии, штат Миссури. Его отец Лео Винер, известный лингвист, заведующий кафедрой славянских языков и литературы Гарвардского университета, переводчик 24-томного собрания сочинений Л. Н. Толстого на английский язык, разработал для сына специальную, очень сложную программу образования, важными частями которой было изучение языков и математики. По окончании Тафт-колледжа близ Бостона, Винер получил степень бакалавра искусств, а в 18 лет в стенах Гарвардского университета, защитив диссертацию по философии математики, стал доктором философии. 1913—1915 годы молодой Винер проводит в Европе.

Первые годы по возвращении на родину стали для Винера временем мучительного поиска собственного пути в математике. Вначале он занялся топологией, через некоторое время, забросив ее, написал две работы по алгебре.

За время с 1915 по 1919 г. он успел поработать преподавателем-стажером Гарвардского университета, преподавателем университета штата Мэн, сотрудником завода «Дженерал электрик» в Линне, в Американской энциклопедии, на Абердинском полигоне, в газете «Бостон геральд», пока, наконец, в 1919 г. не устроился преподавать в Массачусетском технологическом институте, в котором работал уже до последнего дня своей жизни в качестве доцента (с 1929 г.), а затем профессора (с 1932 г.).

Начало работы в институте совпадает по времени с появлением первых важных математических работ Винера, посвященных теории броуновского движения. Броуновское движение можно наблюдать в микроскоп, если достаточно маленькую каплю черной туши поместить в воду. Оно будет состоять в беспорядочном движении частицы туши под действием толчков молекул. Для решения задач теории броуновского движения Винер удачным образом скомбинировал методы так называемой теории интеграла Лебега с физическими идеями американского физика Гиббса. Уже в этих ранних исследованиях проявилась важная черта, характерная для всего дальнейшего творчества Винера, — углубленный «интерес к физическим аспектам математики» («Я — математик», стр. 26), убеждение, что «природа, в широком смысле этого слова, может и должна служить не только источником задач... но и подсказывать аппарат, пригодный для их решения» (там же, стр. 27). Вслед за работами по теории броуновского движения появляются исследования по самым разнообразным современным математическим теориям.

Имя Винера становится известным. Он часто приезжает в Европу, где выступает с лекциями, работает в содружестве с математиками различных стран.

Уже в предвоенные годы наметились интересы Винера к применениям математики для решения технических проблем. Однако лишь в военные годы (потребовавшие от ученых значительных усилий, направленных на разрешение задач, связанных с военными нуждами) они становятся основной частью его творчества. Главной проблемой, занимавшей Винера в эти годы, было создание математической теории прогнозирования. Эта проблема непосредственно связана с задачей управления огнем противовоздушной артиллерии. Если орудие нацелить в ту точку, в которой в момент выстрела находится самолет, то к тому времени, когда туда прилетит снаряд, самолет будет уже далеко. Поэтому нужно стрелять с некоторым упреждением и уметь находить величину упреждения достаточно правильно и быстро. Ясно,

что такая задача не имеет абсолютно точного решения, ибо траектория самолета зависит в первую очередь от управляющего им пилота, а его поведение предугадать трудно. Поэтому вопрос сводится к нахождению наиболее вероятного положения самолета в момент его встречи со снарядом. Винер явился одним из пионеров математической теории прогнозирования, история которой открывается работами выдающегося советского математика А. Н. Колмогорова.

При исследовании задачи управления противовоздушным огнем Винер столкнулся с необходимостью строить механические модели поведения наводчика зенитного орудия и пилота самолета. И в том и другом случае метод их управления сводился к тому, чтобы следить за совершаемыми ошибками и стараться исправить их, действуя в направлении, обеспечивающем уменьшение этих ошибок. Такой метод управления широко применялся в электротехнике и носил название отрицательной обратной связи. Широкое применение этого метода в самых разнообразных автоматических системах навело Винера на мысль, что этот принцип является универсальным методом управления в различных, в том числе и живых, системах. Этот вопрос, а также ряд других, так или иначе связанных с управлением и регулированием в различных областях, стал предметом исследований Винера, предпринятых им совместно с мексиканским физиологом А. Розенблютом. Результаты этих исследований, работы К. Шеннона и Винера в области теории информации (о которой рассказать здесь, к сожалению, не представляется возможным), а также А. Н. Колмогорова и Н. Винера по теории прогнозирования легли в основу упоминавшегося выше сочинения «Кибернетика». Изданное в 1948 г., оно, к удивлению издателей и самого автора, стало быстро раскупаться и вскоре сделалось бестселлером, а имя автора, известное до этого лишь ограниченному кругу специалистов-математиков, стало знакомо всему читающему миру. Идеи новой науки привлекали всё новых приверженцев, а слава ее «крестного отца» росла и ширилась.

В непрерывном потоке книг, брошюр и статей, выходивших гигантскими тиражами на многих языках, в лекциях, читаемых в различных странах мира, Винер популяризировал идеи кибернетики, обсуждал и развивал различные ее аспекты. Наряду с этим он продолжал исследования в области математики, занимался литературным творчеством. В 1951 и 1956 гг. вышли в свет две его автобиографические книги, а в 1959 г. единственный беллетристический опыт — роман «Искуситель». Напряженная творческая жизнь Винера оборвалась в 1964 г.

Человек исключительной преданности науке, проживший в ней яркую и счастливую жизнь, он превосходно понимал, какие блестящие возможности для человечества таятся в дальнейшем ее развитии, но вместе с тем он отчетливо представлял себе опасности, которые наука может воздвигнуть на пути развития человеческого общества, предостерегал людей от бездумного отношения к моральной стороне их деятельности. «Добросовестный ученый, — говорил Винер, — обязан задумываться над будущим», будущим человечества, к которому было обращено все его творчество.

Справочный отдел

Летопись знаменательных дат развития математики

Зарождение математики

Точно датировать возникновение важнейших понятий — целого числа, величины, фигуры — невозможно. Когда возникла письменность, представление о них уже сложилось. К этому времени были выработаны и различные системы письменной нумерации целых чисел.

2000—1700 гг. до н. э. — первые дошедшие до нас математические тексты: два египетских папируса и многочисленные глиняные таблички из древнего Вавилона, содержащие формулировки и решения задач. Египтяне пользовались десятичной непозиционной нумерацией и дробями с числителем 1 («основные» дроби). У вавилонян была шестидесятеричная позиционная система счисления без нуля и систематические шестидесятеричные дроби. Позднее, в середине первого тысячелетия до н. э. вавилоняне ввели знак для обозначения пропущенного шестидесятеричного разряда. Геометрия в Вавилоне и в Египте была по преимуществу вычислительной. Так, были известны правила вычисления площадей треугольника по стороне и высоте, круга по его радиусу (вавилоняне брали при этом в качестве π число 3, а египтяне — число 3,16), а также объемов пирамиды и усеченной пирамиды с квадратным основанием. Вавилоняне знали, что в прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов, а также обратное предложение. По-видимому, оба эти предложения были открыты ими на примерах и доказывать их в общем виде они еще не умели.

Наиболее замечательное достижение этого периода — создание в древнем Вавилоне элементов алгебры и открытие правила решения квадратных уравнений. Вавилоняне умели также находить приближенные значения квадратных корней из неквадратных чисел. Им были известны правила суммирования арифметической прогрессии и ряда квадратов натуральных чисел.

Математические знания излагались в эту эпоху в виде рецептов, правильность которых не доказывалась; обычно приводились однотипные числовые примеры и их решения. Математики как науки еще не было.

Возникновение математики как науки. Построение первых математических теорий (математика Древней Греции)

VI в. до н. э. — систематическое введение логических доказательств, явившееся переломным моментом в развитии математики. В Пифагорейской научной школе было начато построение геометрии как отвлеченной науки, истины которой выводятся из немногих исходных аксиом с помощью доказательств. К пифагорейцам восходят первые математические теории: планиметрия прямолинейных фигур (включая строгое доказательство знаменитой теоремы Пифагора) и элементы теории чисел (введение понятий простого числа, взаимно простых чисел, исследование делимости, построение совершенных чисел). В этой же школе были открыты три из пяти правильных тел: куб, тетраэдр и додекаэдр.

V в. до н. э. — В Пифагорейской школе сделано величайшее открытие о несоизмеримости стороны квадрата и его диагонали. Оно показало, что рациональных чисел (т. е. целых чисел и дробей) недостаточно для измерения геометрических величин и обоснования учения о подобии.

Благодаря этому открытию возникла необходимость создания теории отношений как соизмеримых, так и несоизмеримых величин.

V в. до н. э. (вторая половина) — создана так называемая геометрическая алгебра, которая давала возможность в общем виде решать задачи, сводящиеся к квадратному уравнению или последовательности таких уравнений, чисто геометрически, с помощью циркуля и линейки. Геометрическая алгебра играла в античной математике роль нашей буквенной алгебры, но аппарат ее был гораздо менее удобен.

В это же время были сформулированы три знаменитые задачи древности: 1) удвоение куба (построить куб, имеющий объем в два раза больший данного), 2) трисекция угла (разделить произвольный угол на три равные части) и 3) квадратура круга (построить квадрат, равновеликий данному кругу). Все эти построения, как было доказано в XIX в. невозможные с помощью циркуля и линейки. Древние использовали для их решения новые кривые: конические сечения (эллипс, гиперболу и параболу) и квадратрису (первую трансцендентную кривую).

В поисках квадратуры круга Гиппократ Хиосский открыл квадрируемые луночки (получившие название гиппократовых), т. е. фигуры, ограниченные дугами окружностей, для которых можно построить равновеликие им квадраты.

В конце V в. Гиппократ составил первые «Начала» — систематическое изложение основ математики своего времени. Труд этот до нас не дошел.

IV в. до н. э. (первая половина) — афинский математик Теэтет предпринял исследование алгебраических иррациональностей и начал классификацию их. Определил простейшие классы квадратичных иррациональностей, такие, как $\sqrt{a}$, $\sqrt{a \pm \sqrt{b}}$, $\sqrt{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}}$, $\sqrt{\sqrt{ab}}$, которые были впоследствии описаны в «Началах» Евклида. Он показал также, что $\sqrt[3]{a}$ иррационален, если a не является кубом. Ему же принадлежит открытие октаэдра и икосаэдра.

IV в. до н. э. (середина) — математик и астроном Евдокс из Книда создал общую теорию отношений для любых однородных величин (как соизмеримых, так и несоизмеримых). Эта теория совпадает, по существу, с теорией действительных чисел, предложенной в конце XIX в. Р. Дедекиндом. Для определения площадей и объемов Евдокс разработал так называемый «метод исчерпывания». В основе обеих теорий лежало общее учение о величинах, причем впервые была сформулирована важнейшая аксиома, известная ныне под названием аксиомы Архимеда: если $a>b$, то можно повторить b столько раз, что $nb>a$. С помощью новых методов Евдокс впервые доказал, что конус равновелик $^1/_3$ цилиндра, имеющего одинаковые с ним основания и высоту, а пирамида равновелика $^1/_3$ соответствующей призмы. Он доказал также, что площади двух кругов относятся как квадраты их диаметров.

300 г. до н. э. — Евклид создал «Начала», в которых подвел итог всему предшествующему развитию античной математики. Дедуктивный метод изложения «Начал» стал образцом для построения математической теории. В «Началах» систематически изложены геометрия, элементы теории чисел, алгебры, теория отношений и метод исчерпывания. Здесь сформулирован алгоритм Евклида для нахождения наибольшего общего делителя двух чисел, доказано, что произведение чисел ab делится на простое число p тогда и только тогда, когда один из сомножителей делится на p, а также, что простых чисел бесконечно много. В «Началах» впервые встречается строгий вывод формулы суммы конечного числа членов геометрической прогрессии и показывается, что существует только пять правильных многогранников: куб, тетраэдр, октаэдр, додекаэдр и икосаэдр.

III в. до н. э. — Архимед разработал методы нахождения площадей и объемов, а также методы определения касательных и наибольших и наименьших значений величин, которые он применил для решения проблем статики, гидростатики и теории равновесия плавающих тел (см. стр. 436—438). Методы Архимеда легли в основу дифференциального и интегрального исчислений, созданных в XVII в. Архимед нашел все полуправильные многогранники. С помощью конических сечений он решал кубические уравнения вида

$$x^2(a \pm x) = b$$

и проводил полное их исследование.

III—II вв. до н. э. — Аполлоний систематически и всесторонне исследовал конические сечения. Его книги о конических сечениях послужили основой для создания аналитической геометрии Р. Декартом и П. Ферма (XVII в.), проективной геометрии Б. Паскалем и Ж. Дезаргом (XVII в.), а также явились математическим аппаратом при исследованиях по механике и астрономии И. Кеплера, Г. Галилея и И. Ньютона.

I—II вв. н. э. — широкое развитие вычислительно-алгебраических методов в античной математике.

I в. (конец) — Менелай создал систематический курс сферической геометрии, построенный по образцу «Начал» Евклида, и развил сферическую тригонометрию.

II в. — Птолемей в своих астрономических трудах изложил плоскую и сферическую тригонометрию; он вывел формулу, равносильную формуле

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta \pm \cos\alpha \cdot \sin\beta,$$

и составил подробные таблицы хорд (вместо линии синуса древние рассматривали всю хорду). В таблицах Птолемей употреблял символ для обозначения пропущенного шестидесятеричного разряда. Возможно, что этот символ и явился прообразом нуля.

III в. н. э. — Диофант Александрийский написал «Арифметику», в которой расширил числовую область до поля рациональных чисел, сформулировал правило умножения относительных чисел, ввел алгебраическую символику: знаки для первых шести положительных и отрицательных степеней неизвестного, для вычитания и равенства. Там же приведены и правила переноса членов из одной части уравнения в другую и приведения подобных. В «Арифметике» рассмотрены проблемы решения неопределенных уравнений в рациональных числах и даны методы для нахождения рациональных решений неопределенных уравнений второй и третьей степени.

Математика стран Дальнего, Среднего и Ближнего Востока

II в. до н. э. — создание древнейшего дошедшего до нас китайского математического трактата «Математика в девяти книгах», содержавшего сведения по арифметике и геометрии. При решении задач в трактате применялась теорема Пифагора. Наиболее замечателен в нем единообразный метод решения системы линейных уравнений. При этом появляются отрицательные числа, для которых формулируются правила сложения и вычитания. В трактате излагается также алгоритм вычисления квадратных и кубических корней, аналогичный современному. Этот алгоритм в VII—XIII вв. был перенесен на случай вычис-

ления корней общих уравнений третьей и четвертой степеней. Он совпадает в основном с так называемой схемой Горнера, полученной в Европе в XIX в.

III в. н. э. — в трактате Сунь Цзы встречаются именованные десятичные дроби.

V—VI вв. — создание в Индии десятичной позиционной системы счисления и введение в нее нуля как особой цифры.

499 г. — в астрономическом трактате Ариабхата решил в целых числах неопределенное уравнение

$$ax+by=c.$$

Около 628 г. — Брахмагупта, оперируя отрицательными числами, дал единое правило для решения любого квадратного уравнения, сформулировал правила действий с нулем, который благодаря этому стал числом, равноправным с другими числами. Брахмагупта пользовался алгебраической символикой: специальными знаками для неизвестных и их степеней, знаками для корня квадратного, для операций сложения и вычитания.

IX в. — Мухаммед ал-Хорезми объяснил правила действий с числами, записанными в десятично-позиционной системе, и исследовал квадратные уравнения. Слова «алгебра» и «алгоритм» впервые появились в переводе его трактатов. Первое из них означало операцию переноса членов из одной части уравнения в другую, а второе — искаженное имя автора (ал-Хорезми — Algorithmi), оно применялось первоначально только для обозначения правил вычисления по десятичной позиционной системе.

XI в. — математик и поэт Омар Хайям в трактате по алгебре решал геометрически кубические уравнения (по методу Архимеда). Комментируя «Начала» Евклида, он сблизил понятия отношения и числа. Ко времени Хайяма была известна формула возведения бинома в любую целую положительную степень и способ извлечения корня любой степени.

XII в. — Бхаскара-акарья сформулировал все правила действий с отрицательными числами. Бхаскара знал, что благодаря двузначности квадратного корня квадратное уравнение может иметь два решения.

XIII в. — Насирэддин Туси написал трактат по сферической геометрии и тригонометрии, содержавший учение о решении треугольников. Трактат сыграл решающую роль для развития тригонометрии в Европе.

XV в. — Джемшид ал-Каши, работавший в обсерватории Улугбека близ Самарканда, ввел и применял десятичные дроби: десятичная позиционная система была распространена на запись любых действительных чисел. Он вычислил число π с точностью до 17 десятичных знаков.

Математика европейского средневековья и эпохи Возрождения

XII—XIII вв. — на латинский язык переведены арабские и греческие сочинения по математике. Постепенно в Европе распространилась десятичная позиционная система.

XIII в. — Леонардо Пизанский (Фибоначчи) изложил новую позиционную нумерацию, дал сведения по алгебре и арифметике, рассмотрел различные числовые ряды.

XIV—XV вв. — усовершенствована алгебраическая символика, введены обозначения для степени, для радикала и степеней неизвестного.

XVI в. — первый крупный успех европейской математики: С. Ферро, Н. Тарталья и Дж. Кардано решили уравнение третьей степени в радикалах и ученик Кардано, Л. Феррари, — уравнение четвертой степени.

1572 г. — в «Алгебре» Р. Бомбелли впервые рассмотрел мнимые числа $a+b\sqrt{-1}$ и сформулировал правила действий с ними. Сами эти числа он трактовал как символы, удобные для получения результатов относительно действительных чисел.

1585 г. — С. Стевин ввел десятичные дроби.

XVI в. (вторая половина) — Ф. Виет ввел буквенные обозначения для неизвестных и постоянных величин и создал математическую формулу (см. стр. 439—441).

Период математики переменных величин (XVII—XVIII вв.)

В *XVII в.* сделала большие успехи механика земных и небесных тел, и в связи с этим возникли проблемы изучения зависимостей одних величин от других, проблемы определения скоростей, ускорений, площадей криволинейных фигур, центров тяжести и т. д.

Для решения этих проблем в математике не было готового аналитического аппарата. Ученые начали искать пути изучения переменных величин в математике, используя творения античных математиков. В результате функция (термин Г. Лейбница) стала таким же основным объектом математики, как число и величина.

1614 г. — Дж. Непер ввел логарифмы и опубликовал первые логарифмические таблицы. Несколько позднее таблицы логарифмов опубликовал И. Бюрги.

1636—1637 гг. — Р. Декарт и П. Ферма ввели в математику метод координат, который позволил сводить геометрические задачи к алгебраическим. Независимо друг от друга Декарт и Ферма строили с помощью нового метода аналитическую геометрию (см. стр. 441—444). Декарт придал алгебраической символике современный вид.

1608—1660 гг. — развитие анализа бесконечно малых (методов определения объемов, площадей, центров тяжестей, касательных, экстремумов, скоростей, ускорений) в работах И. Кеплера, Б. Кавальери, Э. Торричелли, П. Ферма, Б. Паскаля, Дж. Валлиса, И. Барроу и др.

40—50-е годы XVII в. — П. Ферма сформулировал знаменитые проблемы теории чисел, которые в течение 200 лет оставались центральными в этой науке.

1665 г. — Б. Паскаль в «Трактате об арифметическом треугольнике», выводя свойства биномиальных коэффициентов и соотношения между ними, сформулировал и применил принцип полной математической индукции.

60—80-е годы XVII в. — И. Ньютон (с 1665 г.) и Г. Лейбниц (с 1673 г.) независимо друг от друга создали дифференциальное и интегральное исчисления (см. стр. 445 и 448) и ввели в математику важнейший аналитический аппарат для представления и изучения функций — степенные ряды. Ньютон распространил формулу возведения бинома в степень на случай, когда показатель есть любое рациональное число.

1687 г. — вышла в свет книга И. Ньютона «Математические начала натуральной философии», в которой было дано математическое построение основ классической механики земных и небесных тел.

1713 г. — вышло в свет (посмертно) сочинение Я. Бернулли, содержащее простейшую форму закона больших чисел — одного из основных законов теории вероятностей.

40-е годы XVIII в. — Л. Эйлер развил учение о функциях как действительного, так и комплексного переменного. Он подробно исследовал элементарные функции x^n, a^x $\log x$, $\sin x$, $\cos x$, нашел для них выражения в виде бесконечных рядов и определил логарифмы отрицательных и мнимых чисел (см. стр. 449—451).

30—60-е годы XVIII в. — Л. Эйлер доказал основные теоремы элементарной теории чисел, исследовал квадратичные вычеты и открыл квадратичный закон взаимности — один из основных в высшей арифметике. Эйлер доказал частный случай великой теоремы Ферма, а именно что уравнение

$$x^n+y^n=z^n$$

при $n=3$ и $n=4$ не имели решений в целых числах. При этом он рассматривал выражения вида $m+n\sqrt{-3}$ как новые целые числа, что было первым обобщением понятия целого числа.

1770—1771 гг. — Ж. Лагранж проанализировал все методы решения в радикалах уравнений первых четырех степеней и показал, почему все эти методы не годятся для решения уравнений пятой степени. Он открыл, что разрешимость уравнений в радикалах зависит от свойств группы перестановок корней этого уравнения, и тем самым обратил внимание на значение изучения групп.

1796 г. — К. Гаусс показал, что если n — простое число, то правильный n-угольник может быть построен с помощью циркуля и линейки, когда n имеет вид $2^{2^k}+1$ (см. стр. 453—455).

1799 г. — К. Вессель дал геометрическую интерпретацию комплексных чисел. Однако его работы остались неизвестными. В 1806 г. аналогичная геометрическая интерпретация была предложена Ж. Арганом. Всеобщее признание в математике комплексные числа получили только после работ К. Гаусса в 1832 г.

Период современной математики (XIX—XX вв.)

Математические методы проникли почти во все отделы физики, в химию, а в последние десятилетия — в биологию, медицину, лингвистику, экономику. Сама математика необыкновенно расширилась количественно и претерпела глубокие качественные изменения. В целом она поднялась на более высокую ступень абстракции.

1801 г. — К. Гаусс создал основы теории чисел. Он впервые развил теорию сравнений, доказал основные теоремы этой теории, изучил до конца теорию квадратичных вычетов, изложил теорию уравнений деления круга.

1821—1823 гг. — О. Коши развил теорию пределов и на основе ее построил учение о функциях, определил понятие суммы ряда, непрерывности функции, а позднее учение о пределах положил в основу всего математического анализа. Коши принадлежит также разработка основ теории функций комплексного переменного (1825).

1824—1826 гг. — Н. Абель доказал, что алгебраические уравнения степени $n\geqslant 5$ в общем виде неразрешимы в радикалах.

1827 г. — К. Гаусс развил так называемую внутреннюю геометрию поверхностей, в которой каждая поверхность выступает как носительница свойств особой геометрии.

1829—1830 гг. — Н. И. Лобачевский опубликовал свои первые работы по неевклидовой геометрии (см. стр. 455—457), которые открыли новую эру в истории геометрии. Независимо от Н. И. Лобачевского систему неевклидовой геометрии построил Я. Больяй (1831).

1830—1832 гг. — Э. Галуа нашел критерий того, решается ли данное уравнение с числовыми коэффициентами в радикалах. При этом он развил методы теории групп и полей, которые приобрели огромное значение в математике и ее приложениях (см. стр. 457—458).

1832 г. — в связи со своими исследованиями по теории чисел К. Гаусс распространил понятие целого числа на комплексные числа $a+bi$, где a и b — целые. Перенес на новые числа алгоритм нахождения наибольшего общего делителя и развил всю арифметику целых комплексных чисел.

1840—1851 гг. — У. Гамильтон обобщил понятие комплексного числа, построив кватернионы — числа вида $a+bi+cj+dk$, где $i^2=j^2=k^2=-1$; a, b, c, d — действительные числа. Оказалось, что для этих чисел выполняются уже не все законы обычной арифметики. Так, умножение кватернионов не обладает свойством переместительности ($ij\neq ji$).

1847 г. — Э. Куммер при помощи введения так называемых идеальных чисел построил арифметику целых чисел полей деления круга. Это дало ему возможность доказать великую теорему Ферма для всех $n<100$).

1849 г. — П. Л. Чебышёв получил первые после Евклида точные результаты о распределении простых чисел в натуральном ряду (см. стр. 458—460).

1854 г. — Б. Риман, обобщая идеи Гаусса по внутренней геометрии поверхностей, дал способ построения всевозможных метрических неевклидовых геометрий. Римановы геометрии стали впоследствии основным математическим аппаратом общей теории относительности. Частным случаем римановых геометрий являются геометрия Евклида и геометрия Лобачевского.

1871—1889 гг. — Р. Дедекинд, Е. И. Золотарев и Л. Кронекер независимо друг от друга и разными методами построили арифметику целых чисел любого поля алгебраических чисел. При этом Дедекинд ввел с помощью систем аксиом такие основные понятия современной алгебры, как кольцо, модуль и идеал.

1881—1882 гг. — Р. Дедекинд, Г. Кантор и К. Вейерштрасс построили тремя различными способами теорию действительных чисел. Вскоре в работах Дедекинда и особенно Кантора возникла новая важная область современной математики — теория множеств.

1899 г. — Д. Гильберт в «Основаниях геометрии» построил полную аксиоматику геометрии Евклида и проанализировал соотношения между различными группами аксиом. С этого времени большое развитие в математике получил аксиоматический метод.

XX в. — созданы новые математические теории, как, например, топология, математическая логика, и коренным образом преобразованы старые, изменился сам язык математики, так что математику XIX в. для чтения современных книг пришлось бы переучиваться заново. Понятия, методы и конструкции современной математики носят весьма общий характер. Соответственно чрезвычайно расширилось поле применения математических методов.

Что читать по математике

Предлагаемый читателю Детской энциклопедии список книг разбит на несколько разделов, тематически связанных с группами статей по математике настоящего тома. Исключение составляет лишь первый раздел, куда включены книги, относящиеся ко многим вопросам математики и ее истории. В каждом разделе указываются книги, дополняющие и углубляющие соответствующие статьи энциклопедии. Поэтому большинство книг рассчитано на школьников старших классов. В список включены также и книги, которые с интересом прочтут школьники VI—VIII классов (в аннотациях к этим книгам имеется соответствующее указание).

Общие вопросы

Колмогоров А. Н. О профессии математика. Изд. 3. М., Изд-во МГУ, 1960. 30 с.

Автор книги — выдающийся советский математик — рассказывает о работе математиков-исследователей, о так называемых математических способностях, об организации математического образования в нашей стране.

Люди русской науки. Очерки о выдающихся деятелях естествознания и техники. Кн. I (математика, механика, астрономия, физика, химия). М., Физматгиз, 1961. 600 с. с илл.

В очерках, написанных видными советскими учеными, рассказывается о жизни и творчестве выдающихся деятелей отечественного естествознания и техники. Двенадцать очерков посвящено математикам.

Каган В. Ф. Лобачевский и его геометрия. Общедоступные очерки. М., Гостехиздат, 1955. 304 с. с илл.

Воронцова Л. А. Софья Ковалевская. М., «Молодая гвардия», 1959. 335 с. с илл. (Жизнь замечательных людей).

Инфельд Л. Эварист Галуа — избранник богов. Пер. с англ. М., «Молодая гвардия», 1958. 368 с. с илл. (Жизнь замечательных людей).

Оре О. Замечательный математик Нильс Хенрик Абель. Пер. с англ. М., Физматгиз, 1961. 344 с. с илл.

Депман И. Я. Рассказы о решении задач. Изд. 2. Л., «Детская литература», 1964. 152 с. с илл.

Рассказы, в которых наряду с решением задач есть интересные математические сведения. Автор на примерах показывает, как важно, решая задачи, внимательно относиться к каждому слову условия. Почти все задачи решаются при помощи четырех действий арифметики.

Эйдельс Л. М. Избушки на дорожках. М., Детгиз, 1960. 175 с. с илл.

Повесть о школьной газете «Гипотенуза». Герои этой повести, члены математического кружка, сумели сделать по-настоящему интересными и занимательными простые математические задачи — такие же, какие ежедневно решаются в VI—VII классах.

Депман И. Я. Мир чисел (рассказы о математике). Л., «Детская литература», 1966. 72 с. с илл.

В небольших очерках, доступных школьникам V—VIII классов, рассказывается о том, как люди научились считать и измерять, о зарождении математики, ее развитии у разных народов, о возникновении основных понятий арифметики, алгебры, геометрии.

Нагибин Ф. Ф. Математическая шкатулка. Изд. 4. М., «Просвещение», 1964. 167 с. с илл.

Книга знакомит читателя с биографиями отечественных математиков, с интересным материалом по истории математики, математической логике, счетным приборам и машинам и с другими вопросами.

Перельман Я. И. Живая математика. (Математические рассказы и головоломки). Изд. 9. М., «Наука», 1970. 160 с. с илл.

В увлекательной форме рассказов излагаются математические задачи и даются полезные практические приемы счета и измерения. Для чтения книги достаточно знания правил арифметики и элементарных сведений из геометрии.

Кордемский Б. А. Математическая смекалка. Изд. 8. М., «Наука», 1965. 568 с. с илл.

Сборник из 365 математических миниатюр: разнообразных задач, математических игр, шуток и фокусов, требующих работы ума, развивающих смекалку и логичность в рассуждениях. В книге имеется материал для читателей с различной степенью подготовки.

Радемахер Г., Теплиц О. Числа и фигуры. Опыты математического мышления. Пер. с нем. Изд. 3. М., Физматгиз, 1962. 264 с. с илл. (Б-ка математического кружка).

Каждый из 27 маленьких очерков, посвященных различным вопросам математики,— образец доступного научного исследования. Ценность книги в том, что она не только знакомит с материалом, над которым работает наука, но и показывает научные методы в действии.

Литцман В. Где ошибка? Пер. с нем. М., Физматгиз, 1962. 192 с. с илл.

Без сомнения, у всех вызовут улыбку утверждения: «2=1»; «Каждый треугольник — равнобедренный». Однако «доказательства» этих (и многих других столь же удивительных) утверждений можно найти в этой книге. Разумеется, эти «доказательства» содержат ошибки, но где? Ответ предоставляется найти читателю.

Дубнов Я. С. Ошибки в геометрических доказательствах. Изд. 4. М., «Наука», 1969. 64 с. с илл. (Популярные лекции по математике).

Соминский И. С., Головина Л. И., Яглом И. М. О математической индукции. М., «Наука», 1967. 144 с. с илл.

Особый метод математических доказательств, позволяющий на основании частных наблюдений делать заключения об общих закономерностях. На подробно разобранных примерах указываются разнообразные применения этого метода к решению геометрических задач.

Курант Р., Роббинс Г. Что такое математика? Элементарный очерк идей и методов. Пер. с англ. Изд. 2. М., «Просвещение», 1967. 560 с. с илл.

Сойер У. У. Прелюдия к математике. Рассказ о некоторых любопытных и удивительных областях математики с предварительным анализом математического склада ума и целей математики. Пер. с англ. М., «Просвещение», 1965. 352 с. с илл.

Петер Р. Игра с бесконечностью. Математика для нематематиков. Пер. с венг. М., «Просвещение», 1968. 271 с. с илл.

«Квант» — ежемесячный научно-популярный физико-математический журнал Академии наук СССР и Академии педагогических наук СССР. Рассчитан на школьников VIII—X классов. Основное содержание журнала — это «физико-математическая школа», т. е. материалы, помогающие лучше знать физику и математику, научиться применять эти науки для объяснения различных явлений и процессов, с которыми нам приходится сталкиваться на практике. В журнале публикуется много задач. Среди них задачи, предлагавшиеся на вступительных экзаменах в различные вузы, задачи, предлагавшиеся на олимпиадах, и просто интересные задачи.

О фигурах и телах

Каган В. Ф. Очерки по геометрии. М., Изд-во МГУ, 1963. 571 с. с илл.

Маркушевич А. И. Замечательные кривые. Изд. 2. М.—Л., Гостехиздат, 1952. 32 с. с илл. (Популярные лекции по математике).

Автор рассказывает о свойствах некоторых кривых линий. Книга рассчитана на учащихся VII—VIII классов.

Перельман Я. И. Занимательная геометрия. Изд. 11. М., Физматгиз, 1959. 302 с. с илл.

О многих интересных геометрических задачах, возникающих в лесу, в поле, у реки, на дороге, говорится в этой книге.

Островский А. И., Кордемский Б. А. Геометрия помогает арифметике. М., Физматгиз, 1960. 168 с. с илл.

Наглядные (геометрические) решения задач всегда считаются «красивыми». Множество интересных задач и их наглядных решений приводится в этой красочно изданной книге.

Зетель С. И. Геометрия линейки и геометрия циркуля. Изд. 2. М., Учпедгиз, 1957. 163 с. с илл.

Всем школьникам известно, как увлекательны задачи на построение с помощью циркуля и линейки. А можно ли решать такие задачи (и какие именно) с помощью только одного циркуля или одной линейки? В книге дается ответ на этот вопрос.

Гельфанд И. М., Глаголева Е. Г., Кириллов А. А. Метод координат. Изд. 4. М., «Наука», 1968. 78 с. с илл. (Б-ка физико-математической школы).

Один из важнейших методов решения многих геометрических и других задач алгебраическим путем. Дается применение этого метода к исследованию фигур в четырехмерном пространстве.

Васильев Н. Б., Гутенмахер В. Л. Прямые и кривые. М., «Наука», 1970. 112 с. с илл. (Б-ка физико-математической школы).

Книга посвящена геометрии и состоит из полутораста задач. Некоторые (типовые) задачи даны вместе с решениями. Встречающиеся в книге геометрические фигуры известны (за некоторым исключением) из школьного курса. Основная особенность книги — связь геометрических задач с методом координат.

Шклярский Д. О., Ченцов Н. Н., Яглом И. М. Избранные задачи и теоремы планиметрии. Изд. 2. М., «Наука», 1967. 336 с. с илл. (Б-ка математического кружка).

Сборник геометрических задач, снабженных решениями. Среди задач имеются доступные школьникам VII—VIII классов.

О числах и уравнениях

Александров П. С. Введение в теорию групп. Изд. 2. М., Учпедгиз, 1951. 126 с. с илл.

Фомин С. В. Системы счисления. М., «Наука», 1964. 44 с. с илл. (Популярные лекции по математике).

Почему мы считаем десятками? Десять единиц составляют десяток, десять десятков — сотню, десять сотен... А что такое дюжина? Почему именно 60 минут составляют 1 час? Многие вопросы, связанные с различными способами счета (системами счисления), излагаются в этой книге.

Берман Г. Н. Число и наука о нем. Общедоступные очерки по арифметике натуральных чисел. Изд. 3. М., Физматгиз, 1960. 164 с. с илл.

Рассматриваются свойства натуральных чисел, различные способы их записи и обозначения, вопросы делимости чисел друг на друга.

Перельман Я. И. Занимательная арифметика. Загадки и диковинки в мире чисел. Изд. 9. М., Физматгиз, 1959. 184 с. с илл.

Разнообразные арифметические задачи изложены в виде увлекательных рассказов. Для решения их достаточно знакомства с правилами арифметики.

Перельман Я. И. Занимательная алгебра. Изд. 12. М., «Наука», 1970. 200 с. с илл.

Многие вопросы школьного курса алгебры излагаются в виде задач с необычайными сюжетами, сопровождаются занимательными экскурсиями в область истории математики, неожиданными применениями.

Маркушевич А. И. Комплексные числа и конформные отображения. Изд. 2. М., Физматгиз, 1960. 56 с. с илл. (Популярные лекции по математике).

Комплексные числа вводятся геометрически. В книге рассказывается о применениях их к геометрическим преобразованиям, сохраняющим величины углов (конформным отображениям).

Гельфонд А. О. Решение уравнений в целых числах. Изд. 2. М., Гостехиздат, 1957. 64 с. с илл. (Популярные лекции по математике).

Каждый, кто знаком с решением уравнений, знает, что одно уравнение первой степени с двумя неизвестными имеет бесконечно много решений. Нетрудно найти и те решения, которые выражаются целыми числами. А как решить ту же задачу, если дано уравнение второй или более высокой степени с несколькими неизвестными? О некоторых результатах в ее решении рассказывается в этой книге.

Курош А. Г. Алгебраические уравнения произвольных степеней. М.—Л., Гостехиздат, 1951. 32 с. с илл. (Популярные лекции по математике).

Вопрос о том, какие из уравнений степени выше второй могут быть решены (и как), разбирается в этой книге.

Шклярский Д. О., Ченцов Н. Н., Яглом И. М. Избранные задачи и теоремы элементарной математики. Ч. I. Арифметика и алгебра. Изд. 4. М., «Наука», 1965. 455 с. с илл. (Б-ка математического кружка).

Сборник 320 задач, снабженных решениями. Среди задач имеются доступные школьникам VII—VIII классов (эти задачи отмечены особо).

Об основных понятиях высшей математики

Зельдович Я. Б. Высшая математика для начинающих и ее приложение к физике. Изд. 5. М., «Наука», 1970. 560 с. с илл.

В простой и наглядной форме объясняются основные понятия дифференциального и интегрального исчислений — важнейшего раздела высшей математики. На их основе — рассмотрено большое число физических вопросов.

Гельфанд И. М., Глаголева Е. Г., Шноль Э. Э. Функции и графики (основные приемы). Изд. 3. М., «Наука», 1968. 96 с. с илл. (Б-ка физико-математической школы).

На примерах простейших функций разобраны основные приемы построения их графиков. Рисунки на полях книги помогают читателю шаг за шагом проследить весь процесс построения графика функции.

Гельфанд С. И., Гервер М. Л., Кириллов А. А., Константинов Н. Н., Кушниренко А. Г. Задачи по элементарной математике. Последовательности, комбинаторика, пределы. М., «Наука», 1965. 176 с. с илл. (Б-ка физико-математической школы).

Сборник состоит из трех разделов: задачи (с предварительным изложением соответствующего теоретического материала), решения (иногда в нескольких вариантах), ответы и указания.

Кириллов А. А. Пределы. М., «Наука», 1968. 88 с. с илл. (Б-ка физико-математической школы).

Книга написана в форме задачника, но она одновременно может служить и учебником: приводятся все необходимые определения и теоремы теории пределов.

Натансон И. П. Простейшие задачи на максимум и минимум. Изд. 3. М.—Л., Физматгиз, 1960. 32 с. с илл. (Популярные лекции по математике).

Несколько способов (с применением только алгебраических средств) решения задач на определение максимума или минимума исследуемых величин.

Болтянский В. Г. Что такое дифференцирование? Изд. 2. М., Физматгиз, 1960. 64 с. с илл. (Популярные лекции по математике).

На примерах, взятых из физики, поясняются некоторые понятия высшей математики (производная, дифференциальное уравнение, натуральный логарифм, число *е*).

Натансон И. П. Суммирование бесконечно малых величин. Изд. 3. М., Физматгиз, 1960. 56 с. с илл. (Популярные лекции по математике).

Весьма разнообразные задачи физики (например, определение давления жидкости на стенки сосуда, вычисление работы) и геометрии (например, определение площади криволинейных фигур, объема тел) приводят к необходимости вычисления сумм одного типа — сумм безгранично возрастающего числа безгранично убывающих слагаемых. Понятие предела таких сумм лежит в основе интегрального исчисления — раздела высшей математики, о нем и идет речь в этой книге.

Маркушевич А. И. Ряды. Элементарный очерк. Изд. 3. М., Физматгиз, 1961. 188 с. с илл.

Можно ли найти значение синуса какого-либо угла или логарифма числа, не прибегая к таблицам? Да, но для этого надо знать представление этих функций в виде бесконечных рядов. О понятии бесконечного ряда, основных свойствах рядов, о рядах для элементарных функций рассказывается в этой книге.

Виленкин Н. Я. Рассказы о множествах. Изд. 2. М., «Наука», 1969. 160 с. с илл.

В популярной и увлекательной форме излагаются основные понятия и факты теории множеств — фундамента важнейших разделов современной математики. В книге приводятся интересные задачи, остроумные сравнения, наглядные образы.

Серпинский В. О теории множеств. Пер. с польск. М., «Просвещение», 1966. 61 с. с илл. (Математическое просвещение).

Градштейн И. С. Прямая и обратная теоремы. (Элементы алгебры логики). Изд. 4. М., «Наука», 1965. 128 с. с илл.

Разъясняются логические отношения между прямой, обратной, противоположной и противоположной обратной теоремами.

Яглом И. М. Необыкновенная алгебра. М., «Наука», 1968. 72 с. с илл. (Популярные лекции по математике).

Необыкновенная алгебра — это математический язык, созданный для изучения свойств разнообразных систем предметов (элементов «алгебры»), для которых можно определить действия «сложения» и «умножения», удовлетворяющие известным законам обычной алгебры чисел. Системы таких предметов носят название алгебр Буля. Их изучение весьма важно для тех направлений современной математики, которые связаны с электронными вычислительными машинами и кибернетикой.

Некоторые вопросы современной математики и кибернетики

Гнеденко Б. В., Хинчин А. Я. Элементарное введение в теорию вероятностей. Изд. 7. М., «Наука», 1970. 167 с. с илл.

Проблемы физики и биологии, автоматического управления и лингвистики и многие другие приводят к необходимости решать многочисленные задачи, связанные с выяснением возможного хода процессов, на которые влияют случайные факторы. Поэтому теория вероятностей — математическая наука, изучающая закономерности случайных явлений, — стала одним из основных математических методов современного естествознания и техники. В книге дается элементарное изложение основных понятий теории вероятностей.

Яглом А. М., Яглом И. М. Вероятность и информация. Изд. 2. М., Физматгиз, 1960. 316 с. с илл.

Книга является введением в новую область математики — теорию информации, тесно связанную с кибернетикой и имеющую ряд приложений в технике связи, биологии, лингвистике и т. д.

Вентцель Е. С. Элементы теории игр. Изд. 2. М., Физматгиз, 1961. 68 с. с илл. (Популярные лекции по математике).

Основные положения теории игр — важного раздела современной математики — подробно иллюстрируются разнообразными примерами.

Кофман А., Фор Р. Займемся исследованием операций. Пер. с франц. М., «Мир», 1966. 276 с.

Берг А. И. Кибернетика и надежность. Изд. 2. М., «Знание», 1964. 96 с.

Автор книги — выдающийся советский ученый — рассказывает о возможностях кибернетики, о научных, технических и организационных мерах повышения надежности кибернетической техники, о том, как служит и будет служить кибернетика делу коммунизма.

Пекелис В. Д. Маленькая энциклопедия о большой кибернетике. Кибернетика от А до Я. М., «Детская литература», 1970. 336 с. с илл.

Словарь-указатель

(Имена ученых, математические понятия и термины, вошедшие в словарь-указатель, сопровождаются развернутым объяснением лишь в том случае, если они недостаточно подробно описаны в статьях энциклопедии.)

А

Абак
— счетная доска у древних греков и римлян (а затем и в Западной Европе вплоть до XVIII в.), применявшаяся для арифметических вычислений. Принцип устройства подобен нашим счетам.
249

Абель, Нильс Хенрик
(1802—1829) — норвежский математик. Доказал (1824) неразрешимость в радикалах уравнений 5-й и более высоких степеней в общем случае. Другие его работы относятся ко многим вопросам математического анализа.
381, 382, 458, 467

Абсолютная геометрия
283

Абсцисса
— одна из декартовых координат точки.
308

Автомат
— понятие кибернетики.
406

Адрес
— понятие, определяющее местоположение информации в электронной вычислительной машине.
398

Аксиома
— положение, принимаемое без доказательства в пределах данной математической дисциплины.
281, 295, 376

Аксиома о параллельных
297—300

Аксиоматика
— система аксиом данной математической дисциплины.
295, 376, 467

Аксиоматический метод
284, 467

Алгебра
— часть математики, развившаяся в связи с задачей о решении уравнений. В дальнейшем развитии предмет алгебры значительно расширился.
374—390, 438, 466

Алгебра множеств
361—369

Алгебраическая символика
439, 440, 442, 466

Алгебраическое уравнение
— уравнение, которое можно (после преобразований) привести к виду приравненного к нулю многочлена относительно неизвестных. Решение уравнений 1-й и 2-й степеней было известно еще в древности. В XVI в. было найдено решение уравнений 3-й и 4-й степеней. В XIX в. было доказано, что корни уравнений степени выше 4-й в общем виде нельзя выразить через коэффициенты.
381, 440, 442, 453, 457, 467

Алгебры основная теорема
380, 454

Алгол
— условное название универсального языка программирования для быстродействующих электронных вычислительных машин.
401

Алгоритм (или алгорифм)
— совокупность математических операций, выполняемых в определенном порядке, для решения задач данного типа.
396, 406, 466

Алфавит абстрактный
— понятие кибернетики.
405

Алфавитная нумерация
— способ записи чисел у некоторых народов, в котором в качестве цифровых знаков употребляются буквы алфавита.
253—256

Аналитическая геометрия
— раздел математики, в котором свойства геометрических фигур (точек, линий, поверхностей и их совокупностей) изучаются средствами алгебры при помощи метода координат.
307, 442, 443, 466

Аполлоний Пергский
— древнегреческий математик, работавший ок. 200 г. до н. э. в Александрии. Важнейшее его сочинение — «Конические сечения», где рассматриваются свойства эллипса, гиперболы и параболы; оказал большое влияние на развитие математики нового времени.
244, 465

Арабские цифры
— традиционное название десяти цифр: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, с помощью которых по десятичной системе счисления записываются любые числа.
258

Аргумент
— независимая переменная величина.
319

Арифметическое устройство
— одно из основных устройств быстродействующей электронной вычислительной машины.
397

Архимед
(ок. 287—212 до н. э.) — древнегреческий математик и механик.
243, 254, 278, 436—438, 465

Архимеда спираль
316

Ассоциативность, ассоциативный [сочетательный] закон
— свойства сложения и умножения, выражаемые формулами: $(a+b)+c=a+(b+c)$, $a(bc)=(ab)c$.
360

Б

Барроу, Исаак
(1630—1677) — английский математик, владевший в геометрической форме основными идеями дифференциального и интегрального исчислений. Учитель И. Ньютона.
346, 466

Бернулли, Якоб
(1654—1705) — швейцарский ученый.
424, 427, 452, 466

Бернулли, Иоганн
(1667—1748) — швейцарский ученый, вместе с братом Якобом сотрудничал с Г. Лейбницем в разработке основ дифференциального и интегрального исчислений.
449, 452

Бесконечный ряд
— выражение $a_1+a_2 \ldots + \ldots + a_n + \ldots$, члены которого $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ числа (числовой ряд) или функции (функциональный ряд). В исследовании и вычислении функций большое значение имеет представление их в виде рядов, членами которых являются более простые функции.
445, 446, 466, 467

Библиотека стандартных подпрограмм
401

Бином
— двучлен. Бином Ньютона — формула, выражающая целую положительную степень суммы двух чисел через степени этих чисел.
439, 466

Биокибернетика
—раздел кибернетики.
404

Больцано, Бернард
(1781—1848) — чешский математик. Основная часть его рукописного научного наследия исследована лишь в XX в. Главный математический труд «Учение о функциях», написанный в 1830 г., увидел свет лишь через 100 лет; в нем Больцано ввел ряд понятий и теорем математического анализа, обычно связываемых с именами других ученых.
352

Больших чисел закон
— одно из основных положений теории вероятностей.
423, 427, 466

«Большое число»
255

Больяй, Янош
(1802—1860) — венгерский математик. Независимо от Н. И. Лобачевского и несколько позже его изложил (1832) основные положения неевклидовой геометрии.
283, 284, 467

Булева алгебра
— понятие математической логики.
365

Буль, Джордж
(1815—1864) — английский математик и логик, основоположник математической логики.
365, 366, 371

В

Вавилонская шестидесятеричная нумерация
256

Вариационное исчисление
— математическая дисциплина, посвященная отысканию наибольших и наименьших значений функционалов — переменных величин, зависящих от выбора одной или нескольких функций.
451

Варинг, Эдуард
(1736—1798) — шотландский математик. Основные работы относятся к алгебре и теории чисел; особенно известна постановка так называемой задачи Варинга.
268

Вводное устройство
— одно из основных устройств быстродействующей электронной вычислительной машины.
396

Вейерштрасс, Карл Теодор Вильгельм
(1815—1897) — немецкий математик. Его труды посвящены многим областям математики. Большое значение имеет разработанная им система логического обоснования математического анализа, покоящаяся на построенной им теории действительных чисел.
460, 467

Венн, Джон
(1834—1923) — английский логик.
361

Венна диаграмма
361

Вероятностей теория
— важный в приложениях раздел математики, изучающий закономерности массовых явлений, носящих случайный характер.
420—428, 459

Вероятность
424

Взаимно однозначное соответствие
353

Виет, Франсуа
(1540—1630) — французский математик.
439—441, 466

Виета теорема
— теорема, устанавливающая зависимость между корнями и коэффициентами алгебраического уравнения.
440

Винер, Норберт
(1894—1964) — американский ученый.
404, 461—463

Виноградов, Иван Матвеевич
(р. 1891) — советский математик, академик (1929), дважды Герой Социалистического Труда (1945, 1971). Научная деятельность относится к области теории чисел, в которую он ввел новые методы, оказавшие решающее влияние на ее развитие и позволившие ему решить ряд труднейших проблем.
269

Внутренняя геометрия
454, 467

Ворон
— наименование в славянской нумерации числа 10^{48}.
255

Вороной, Георгий Феодосьевич
(1868—1908) — русский математик, член-корреспондент Петербургской академии наук (1907). Его исследования относятся ко многим вопросам теории чисел.
460

Вращение
— см. Поворот.

Вывод
— понятие математической логики.
372

Выводное устройство
— одно из основных устройств быстродействующей электронной вычислительной машины.
397

Высказывание
— понятие математической логики.
368

Высшая математика
244

Г

Галуа, Эварист
(1811—1832) — французский математик.
389, 457, 458, 467

Галуа теория
389

Гамильтон, Уильям Роуан
(1805—1865) — ирландский математик. Построил своеобразную систему чисел — так называемые кватернионы, явившуюся одним из источников векторного исчисления.
375, 467

Гаусс, Карл Фридрих
(1777—1855) — немецкий математик.
283, 380, 426, 453—455, 467

Гельфонд Александр Осипович
(1906—1968) — советский математик, член-корреспондент Академии наук СССР (1939). Специалист в области теории чисел и теории функций. Открыл новые методы доказательства трансцендентности чисел.
269

Геометрическая прогрессия
— последовательность чисел, из которых каждое следующее получается из предыдущего умножением на одно и то же число.
445, 465

Геометрическое преобразование
285—293, 385

Геометрия
— часть математики, которая изучает пространственные отношения и формы тел.
270, 280—287

Гильберт, Давид
(1862—1943) — немецкий математик. Его исследования оказали большое влияние на развитие математики XX в.
269, 284, 457, 467

Гипербола
— плоская кривая; является геометрическим местом точек, разность расстояний которых от двух точек равна постоянной величине.
273, 302, 311, 314, 465

Гиппократ Хиосский
— древнегреческий геометр 2-й половины V в. до н. э. Автор первого систематического сочинения по геометрии (недошедшего до нас), которое, вероятно, охватывало материал первых четырех книг евклидовых «Начал».
281, 465

Гомотетия
— геометрическое преобразование, частный случай подобия.
289

Гросс
— дюжина дюжин, т. е. $12^2=144$ однородных предмета.
247

Группа
— понятие современной алгебры.
383, 390, 458, 467

Гюйгенс, Христиан
(1629—1695) — нидерландский ученый. Основные труды относятся к физике и астрономии, математические работы — к теории вероятностей.
424

Д

Движение
— геометрическое преобразование, меняющее положение фигуры, но сохраняющее ее форму и размеры.
287, 288, 293

Двоичная система счисления
— система счисления, в которой за основание принимается число «два», так что все числа записываются с помощью только двух цифр: 0 и 1.
247, 392, 393

Двойного отрицания закон
— один из законов математической логики.
371

Дедуктивная система
281

Декарт, Рене
(1596—1650) — французский ученый.
244, 307, 439, 441—443, 465, 466

Декартовы координаты
308, 442

Делоне, Борис Николаевич
(р. 1890) — советский математик, член-корреспондент Академии наук СССР (1929). Работы относятся к алгебре, геометрии, теории чисел и кристаллографии.
266

Десятичная система счисления
— система счисления, в которой за основание принимается число «десять», так что все числа записываются с помощью десяти цифр: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.
247, 466

Дизъюнкция
— понятие математической логики.
369

Диофант
— древнегреческий математик, работавший в Александрии, вероятно, в III в. Его трактат «Арифметика» (от которого сохранились только 6 книг из 13) сыграл большую роль в развитии алгебры и теории чисел.
261, 465

Диофантовы уравнения
— см. Неопределенные уравнения.

Дистрибутивность, дистрибутивный (распределительный) закон
— свойство сложения и умножения, выражаемое формулой $(a+b+...+c)m=am+bm+...+cm$.
360

Дифференциальное исчисление
— математическая дисциплина; вместе с интегральным исчислением составляет важную часть математики — математический анализ.
244, 437, 445, 448, 466

Дифференциальное уравнение
— уравнение, связывающее искомую функцию и ее производные.
348, 461

Дифференцирование
— операция нахождения производных.
343

Додекаэдр
— один из пяти типов правильных многогранников; имеет 12 граней (пятиугольных), 30 ребер, 20 вершин (в каждой вершине сходится 3 ребра).
282, 464, 465

Доказательство от противного
— метод доказательства теорем.
372

Дополнение множества
366

Дюжина
— двенадцать однородных предметов.
247

Е

Евклид
— древнегреческий математик, работавший в Александрии в III в. до н. э. Автор «Начал» — первого дошедшего до нас теоретического трактата по математике.
243, 281—284, 295, 386, 455, 459, 465

Египетская нумерация
252, 253

З

Запоминающее устройство
— одно из основных устройств быстродействующей электронной вычислительной машины.
396

Золотарев, Егор Иванович
(1847—1878) — русский математик. Работал в области теории чисел и математического анализа.
460, 467

И

Игр теория
— математическая дисциплина.
429—435

Игра
— понятие теории игр.
429

Икосаэдр
— один из пяти типов правильных многогранников; имеет 20 граней (треугольных), 30 ребер, 12 вершин (в каждой вершине сходится 5 ребер).
282, 465

Интеграл
— одно из основных понятий математического анализа. Знак интеграла $\int$ — видоизмененное латинское S (от слова Summa) — введен Г. Лейбницем (1675).
335

Интегральная сумма
335

Интегральное исчисление
— математическая дисциплина; вместе с дифференциальным исчислением составляет важную часть математики — математический анализ.
437, 445, 448, 466

Информация
— понятие кибернетики.
405

Ионийская нумерация
— алфавитная нумерация, употреблявшаяся в Древней Греции.
253, 254

Исключенного третьего закон
— один из законов математической логики.
371

Исследование операций
— область науки и практической деятельности, имеющая своим предметом изучение целенаправленных процессов (операций).
417—420

К

Кантор, Георг
(1845—1918) — немецкий математик. Основоположник теории множеств, оказавший большое влияние на развитие современной математики.
357, 359, 467

Канторович, Леонид Витальевич
(р. 1912) — советский математик, академик (1964). Автор работ по многим вопросам математики и математической экономики.
413

Касательная
341, 465

Квадрант
— плоский сектор с центральным углом в 90°, $^1/_4$ часть круга. Квадрант плоскости — любая из четырех областей (углов), на которые плоскость делится двумя взаимно перпендикулярными прямыми.
308

Квадратичная иррациональность
382, 465

Квадратное уравнение
— алгебраическое уравнение 2-й степени.
464, 466

Квадратура круга
— знаменитая задача древности: с помощью циркуля и линейки построить квадрат, равновеликий данному кругу. Эта задача сводится к построению числа π, поэтому, как установлено в XIX в., указанными средствами она неразрешима.

Если же привлечь к построению дополнительные средства (напр., некоторые кривые), то задача становится разрешимой.
383, 465

Кватернионы
— система чисел более общая, чем комплексные числа.
375, 467

Кеплер, Иоганн
(1571—1630) — немецкий ученый. Основные работы относятся к астрономии. В математическом сочинении «Новая стереометрия винных бочек» для решения геометрических задач предложил способ, содержащий начатки интегрального исчисления.
332, 465, 466

Кибернетика
— наука об общих закономерностях процессов управления и связи в организованных системах (машинах, живых организмах и их объединениях).
404—412, 462

Клейн, Феликс
(1849—1925) — немецкий математик. Автор работ по геометрии, алгебре и теории функций.
293, 386, 389

Клинописные математические тексты
— памятники математической науки древней Вавилонии и Ассирии; охватывают период от 2 тысячелетия до н. э. до начала нашей эры; написаны клинописью на глиняных пластинках.
256, 464

Ковалевская, Софья Васильевна
(1850—1891) — русский математик.
460, 461

Код
— система «команд», применяемых в быстродействующих электронных вычислительных машинах.
398

Кодирование
405

Колмогоров, Андрей Николаевич
(р. 1903) — советский математик, академик (1939), Герой Социалистического Труда (1963). Научные работы относятся ко многим областям современной математики и теоретическим вопросам кибернетики.
428, 463

Колода
— наименование в славянской нумерации числа 10^{49}.
255

Кольцо
— понятие современной алгебры.
377, 467

Команда
398

Коммутативность, коммутативный (переместительный) закон
— неизменяемость суммы (или произведения) при перестановке слагаемых (или множителей): $a+b=b+a$, $ab=ba$.
360

Конгруэнтные фигуры
287

Конечная игра
430

Конические сечения
— эллипс, гипербола, парабола — линии пересечения круглого (с двумя полостями) конуса с плоскостями, не проходящими через его вершину.
302, 465

Континуум-гипотеза
359

Конъюнкция
— понятие математической логики.
369

Координатные линии
316

Координатные плоскости
306

Координаты точки
— числа, определяющие ее положение на прямой, кривой линии, плоскости, кривой поверхности или в пространстве.
306—319

Координаты на сфере
317

Корню спираль
— спиралевидная кривая, состоящая из двух симметричных относительно некоторой точки ветвей.
275

Косинус
— одна из тригонометрических функций. Название «косинус» представляет собой сокращение латинского термина complementi sinus (синус дополнения). Знак cos ввел (1748) Л. Эйлер.
346

Коши, Огюстен Луи
(1789—1857) — французский математик. Автор классических курсов математического анализа, оказавших большое влияние на его развитие и строгое обоснование.
453, 467

Кривизна пространства
305

Криволинейная трапеция
335

Криволинейные координаты
318

Куб
— один из пяти типов правильных многогранников; имеет 6 граней (квадратных), 12 ребер, 8 вершин (в каждой вершине сходится 3 ребра).
282, 464, 465

Кубическая парабола
— плоская кривая, ее уравнение $y=x^3$.
275

Кубическое уравнение
— алгебраическое уравнение 3-й степени.
438, 439, 465, 466

Л

Лагранж, Жозеф Луи
(1736—1813) — французский математик и механик.
244, 266, 269, 444, 451—453

Лаплас, Пьер Симон
(1749—1827) — французский ученый. Математические труды относятся к разработке теории вероятностей и математического анализа.
426

Легион
— наименование в славянской нумерации числа 10^5 (при счете в «малом числе») или числа 10^{12} (при счете в «большом числе»).
255

Лежандр, Адриен Мари
(1752—1833) — французский математик. Работал в области теории чисел, математического анализа и геометрии.
426, 459

Лейбниц, Готфрид Вильгельм
(1646—1716) — немецкий ученый.
244, 346, 447—449, 466

Лемниската
— плоская кривая, имеющая вид восьмерки.
275, 316

Леодр
— наименование в славянской нумерации числа 10^6 (при счете в «малом числе») или числа 10^{24} (при счете в «большом числе»).
255

Леонардо Пизанский (Фибоначчи)
(ок. 1170 — после 1228) — итальянский математик. Его труды способствовали передаче в Европу достижений математиков Средней Азии и Ближнего Востока.
248, 258, 466

Ли, Софус
(1842—1899) — норвежский математик. Его работы в области теории групп оказали серьезное влияние на развитие многих вопросов современной математики.
377

Ли алгебра
377

Линейное преобразование
290, 293

Линейное программирование
— математическая дисциплина.
266, 413—416

Линия
— одно из основных (неопределяемых) понятий геометрии.
280

Линия второго порядка
302, 314
Лобачевский, Николай Иванович
(1792—1856) — русский математик.
244, 283, 284, 297, 302, 386, 455—457, 467
Лобачевского геометрия
— первая геометрическая система, отличная от геометрии Евклида.
284, 302, 456, 467
Логарифм числа y по основанию a
— такое число x, что $a^x=y$, или $x=\log_a y$. Знак log, ввел (1632) Б. Кавальери. Термин «логарифм» возник из сочетания греческих слов lógos (здесь — отношение) и arithmós (число). Логарифм у Дж. Непера — их создателя — это вспомогательное число для измерения кратности (степени) отношения двух чисел.
322, 466
Ляпунов, Александр Михайлович
(1857—1918) — русский математик, академик (1901). Основные его работы относятся к теории дифференциальных уравнений, теории вероятностей и гидродинамике.
426, 460

М

Максимин
— понятие теории игр.
434
Максимум и минимум
— см. Экстремум.
«Малое число»
255
Марков, Андрей Андреевич
(1856—1922) — русский математик, академик (1896). Научные работы относятся к области теории чисел, теории вероятностей и различным вопросам математического анализа.
426, 460
Марковский процесс
428
Математическая логика
368
Математическая модель
419
Математическая статистика
426
Математическое ожидание
— понятие теории вероятностей.
427
Матиясевич, Юрий Владимирович
(р. 1947) — советский математик.
269
Матрица игры
— понятие теории игр.
432
Мебиус, Август Фердинанд
(1825—1908) — немецкий математик. Работал в области геометрии. Установил (1858) существование односторонних поверхностей (лист Мебиуса).
268
Мебиуса лист
268, 269
Минимакс
— понятие теории игр.
434
Мириада
— наименование в древнегреческой ионийской нумерации числа 10^4.
254
Многочлен (полином)
— алгебраическое выражение, составленное из постоянных величин и переменных $x, y, ..., t$ с помощью операций сложения, вычитания и умножения. Многочлен есть сумма нескольких слагаемых вида $Ax^k y^l ... t^m$, где A — постоянное, а $k, l, ..., m$ — целые положительные числа.
379, 380
Множеств теория
359, 467
Множественная игра
— понятие теории игр.
429
Множество
— одно из основных понятий современной математики.
351
Моделирование
419
Де Морган, Август
(1806—1871) — английский математик. Основные работы относятся к математической логике.
371
Моргана правило
— один из законов математической логики.
371
Мощность множества
— понятие теории множеств.
358

Н

Насирэддин Туси, Мухаммед
(1201—1274) — азербайджанский астроном и математик. Математические работы относятся к геометрии и сферической тригонометрии.
439, 466
Натуральные логарифмы
322
«Начала» Евклида
— научное произведение, написанное в III в. до н. э. древнегреческим математиком Евклидом; содержит основы античной математики: элементарной геометрии, теории чисел, алгебры, общей теории отношений и методов определения площадей и объемов.
281
Начало координат
308
Начальная ордината
312
Неевклидова геометрия
— геометрическая система, предпосылки которой в том или ином отношении отличны от аксиом обычной геометрии Евклида.
284, 467
Независимые события
— понятие теории вероятностей.
425
Неопределенные уравнения (или диофантовы уравнения)
— уравнения, содержащие более одного неизвестного, или система уравнений с числом неизвестных, бóльшим числа уравнений. Обычно интересуются решениями, выраженными целыми или рациональными числами.
261, 444, 465, 466
Неприводимый многочлен
380
Несовместные события
— понятие теории вероятностей.
425
Ньютон, Исаак
(1643—1727) — английский ученый.
244, 346, 444—446, 449, 466
Ньютона — Лейбница формула
— основная формула интегрального исчисления.
346

О

Обратное преобразование
383
Объединение множеств
361
Объем тела
336, 437, 465
Окружность
— плоская замкнутая кривая, все точки которой одинаково удалены от одной точки (центра) той же плоскости.
313, 314
Октаэдр
— один из пяти типов правильных многогранников; имеет 8 граней (треугольных), 12 ребер, 6 вершин (в каждой вершине сходится 4 ребра).
282, 465
Операция
417
Определение
294
Оптимальное решение
407, 419
Ордината
— одна из декартовых координат точки.
308
Оси координат
306, 308
Отрицание
370

П

«Память»
— запоминающее устройство электронной вычислительной машины.
396

Папирусы математические
— памятники математической науки древнего Египта, относящиеся ко 2 тысячелетию до н. э.
252, 464

Парабола
— плоская кривая; является геометрическим местом точек, одинаково удаленных от данной прямой и данной точки.
302, 311, 314, 465

Параллельное проектирование
— геометрическое преобразование.
290

Параллельности условие
313

Параллельный перенос
— геометрическое преобразование; является частным случаем движения, при котором отрезки, соединяющие все соответственные пары точек, параллельны и имеют одинаковую длину.
287, 384

Параметр
— величина, числовые значения которой позволяют выделить определенный элемент (например, кривую) из множества элементов (кривых) того же рода.
314

Параметрические уравнения
314

Парная игра
— понятие теории игр.
429

Паскаль, Блез
(1623—1662) — французский ученый. Математические работы относятся к геометрии, теории чисел и теории вероятностей. Впервые определил и применил для доказательства теорем метод полной математической индукции.
424, 465, 466

Первообразная
— понятие интегрального исчисления.
346

Переместительный закон
— см. Коммутативность.

Пересечение множеств
361

Перпендикулярности условие
313

Перфокарта
393, 406

Перфолента
406

«Пи»
— буква греческого алфавита, обозначает в математике число, равное отношению длины окружности к длине ее диаметра. Число π трансцендентное, оно выражается бесконечной непериодической десятичной дробью. Обозначение ввел (1736) Л. Эйлер.
438, 440, 464, 466

Пифагор
(ок. 580—500 до н. э.) — древнегреческий математик и философ. В области математики с его именем связано систематическое введение доказательств в геометрию, создание учения о подобии, доказательство теоремы, носящей его имя.
280

Пифагоров треугольник
260

Плоскость
— одно из основных (неопределяемых) понятий геометрии.
295

Площадь фигуры
336, 437, 465

Поворот (вращение)
— геометрическое преобразование; является частным случаем движения, при котором одна точка O остается неподвижной, а всякая другая точка A переходит в такую точку A', что угол AOA' постоянен для всех точек A.
287, 384

Подобие
— геометрическое преобразование, сохраняющее форму фигур, но, возможно, меняющее их размеры.
288—290, 293

Позиционная система счисления
— система записи чисел, в которой значение цифры зависит от занимаемого ею места в записи числа.
256—258

Позиционный принцип записи чисел
245

Показательная функция
— функция вида $y=a^x$, где $a\neq 1$ — некоторое положительное число.
347, 348

Поле
— понятие современной алгебры.
378, 458, 467

Полуправильные многогранники
278, 279, 465

Полюс
316

Полярная ось
316

Полярные координаты
316

Постулат
— суждение, принимаемое без доказательства в качестве исходного положения какой-либо теории. Между постулатом и аксиомой не существует отчетливого различия.
281

Правильные многогранники
282, 464, 465

Правильные многоугольники
382, 383, 454, 467

Программа (для электронной вычислительной машины)
395, 401

Произведение множеств
361

Производная
— одно из основных понятий математического анализа. Употребляемое ныне обозначение $f'(x)$ ввел Ж. Лагранж (1770).
342

Простые числа
— целые положительные числа, бóльшие чем единица и не имеющие других делителей, кроме самих себя и единицы.
379, 459, 465, 467

Противоречия закон
— один из законов математической логики.
371

Прямая
— одно из основных (неопределяемых) понятий геометрии.
295, 311—313

«Псаммит»
— математическое сочинение Архимеда, посвященное изложению способа записи чисел.
253

Птолемей, Клавдий
— древнегреческий ученый, работавший в Александрии во II в. н. э. К математике относятся его работы по прямолинейной и сферической тригонометрии и вычислению таблиц синусов.
244, 465

Пуассон, Симеон Дени
(1781—1840) — французский ученый. Математические работы относятся к теории дифференциальных уравнений, теории вероятностей и математическому анализу.
426

Пустое множество
363

Р

Равенство фигур
285, 287, 384

Распределительный закон
— см. Дистрибутивность.

Рассеивания метод
— метод решения неопределенных уравнений.
263

Решение игры
— понятие теории игр.
435

Риман, Георг Фридрих Бернхард
(1826—1866) — немецкий математик. Его работы по геометрии, теории чисел и теории аналитических функций оказали большое влияние на развитие математики.
284, 457, 467

Римана геометрия
284

Римановы геометрии
284, 467

Римские цифры
— цифры древних римлян.
249

С

Седловая точка
— понятие теории игр.
434

Сжатие к прямой
— геометрическое преобразование (отображение), при котором каждая точка A переходит в точку A' перпендикуляра, опущенного из точки A на эту прямую, причем отношение расстояния от прямой до A и до A' постоянно для всех точек A.
290

Симметрические многочлены
389

Симметрия
— геометрическое преобразование; различают симметрию относительно точки, симметрию относительно прямой, симметрию порядка n.
287, 298, 299, 387

Симплексный метод
— метод решения задач линейного программирования.
414

Синус
— одна из тригонометрических функций. Название «синус» (латинское sinus — «пазуха») представляет собой точный перевод на латинский язык арабского слова «джайб», являющегося, по-видимому, искажением санскритского слова «джива», которое буквально переводится как «тетива лука» и которым индийские математики обозначали синус. Знак sin ввел (1748) Л. Эйлер.
346

Синусоида
— плоская кривая, изображающая изменение синуса в зависимости от изменения его аргумента.
325

Славянская нумерация
— алфавитная нумерация, употреблявшаяся в древней Руси до XVII в.
255, 256

Следствие
— понятие математической логики.
372

Случайное событие
— событие, которое может при данных условиях как произойти, так и не произойти и для которого имеется определенная вероятность его наступления.
421

Случайный процесс
— процесс, течение которого может быть различным в зависимости от случая и для которого определена вероятность того или иного его течения.
428

Смешанная стратегия
— понятие теории игр.
433

Событие
420

Сочетательный закон
— см. Ассоциативность.

Среднее значение
— понятие теории вероятностей.
427

Стационарный процесс
428

Стратегия
— понятие теории игр.
429

Сумма множеств
361

Счетное множество
— понятие теории множеств.
355

Т

Теорема
— предложение (утверждение), устанавливаемое при помощи доказательства (в противоположность аксиоме).
295

Тетраэдр
— один из пяти типов правильных многогранников; имеет 4 грани (треугольные), 6 ребер, 4 вершины (в каждой вершине сходится 3 ребра).
282, 464, 465

Техническая кибернетика
404, 409

Топология
— математическая дисциплина, изучающая наиболее общие свойства геометрических фигур — так называемые топологические свойства, т. е. свойства формы и взаимного расположения фигур.
450

Тор
— поверхность, имеющая вид баранки.
273

Точка
— одно из основных (неопределяемых) понятий геометрии.
295

Тригонометрические функции
325, 467

Трисекция угла
— знаменитая задача древности: с помощью циркуля и линейки разделить угол на три равные части. Задача сводится к построению корня кубического уравнения, что неосуществимо в общем случае с помощью только указанных средств.
315, 465

Троичная система счисления
— система счисления, в которой за основание принимается число «три», так, что все числа записываются с помощью только трех цифр: 0, 1, 2.
247

Туэ, Аксель
(1863—1922) — норвежский математик. Его работы относятся к области теории чисел.
266

Тьма
— наименование в славянской нумерации числа 10^4 (при счете в «малом числе») или числа 10^6 (при счете в «большом числе»).
255

У

Угловой коэффициент
312

Удвоение куба
— знаменитая задача древности: с помощью циркуля и линейки построить куб, имеющий объем, вдвое больший объема данного куба. Задача сводится к построению отрезка, численно равного $\sqrt[3]{2}$, что неосуществимо с помощью только указанных средств.
315, 383, 465

Универсальная управляющая машина
408

Управляющее устройство
— одно из основных устройств быстродействующей электронной вычислительной машины.
397

Уравнение
— аналитическая запись задачи о разыскании значений аргументов, при которых значения двух данных функций равны. Важнейший класс уравнений — алгебраические уравнения, исследование которых привело к созданию алгебры.
381

Условие
— понятие математической логики.
372

Ф

Федоров, Евграф Степанович
(1853—1919) — русский ученый, академик (1919). Для математики имеют важное значение его исследования по геометрической структуре кристаллов.
387, 389

Ферма, Пьер
(1601—1665) — французский математик.
244, 268, 307, 443, 444, 465, 466

Ферма великая теорема
— утверждение о том, что уравнение $x^n+y^n=z^n$,

где n — целое число, большее 2, не имеет решений в целых положительных числах. В общем случае доказательство не найдено.
268, 424, 444, 466, 467

Ферма малая теорема
444

Ферма числа
443

Фибоначчи
— см. Леонардо Пизанский.

Фигура геометрическая
285, 308

Флюксий метод
— ранняя форма дифференциального и интегрального исчислений, возникшая в трудах И. Ньютона.
445

Функциональная зависимость
319

Функция
— одно из основных понятий математики, выражающее зависимость одних переменных величин от других. Общепринятое ныне обозначение произвольной функции $f(x)$ ввел (1734) Л. Эйлер.
319, 466, 467

Х

Хайям, Омар
(ок. 1040—1123) — среднеазиатский поэт, математик и философ.
438, 439, 466

Хинчин, Александр Яковлевич
(1894—1959) — советский математик, член-корреспондент Академии наук СССР (1939). Работы относятся к теории вероятностей и теории чисел.
428

Ц

Целевая функция
418

Цена игры
— понятие теории игр.
430, 434

Цепная линия
— линия, по которой провисает тяжелая нерастяжимая нить.
274

Циклоида
— линия, являющаяся следом точки круга, катящегося без скольжения по прямой.
275, 302

Ч

Чебышёв Пафнутий Львович
(1821—1894) — русский математик, академик (1859).
244, 343, 426, 427, 458—460, 467

Чисел теория
— часть математики, посвященная изучению закономерностей, справедливых для целых чисел.
444, 466, 467

Число «е», неперово число
— такое число, что график функции $y=e^x$ пересекается осью ординат под углом 45°; может быть определено также как предел, к которому стремится выражение $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ при неограниченном возрастании n; является основанием натуральных логарифмов. Обозначение (e) для этого числа ввел (1736) Л. Эйлер.
322

Ш

Шеннон, Клод
(р. 1916) — американский ученый. Математические работы относятся к теории информации.
463

Шмидт, Отто Юльевич
(1891—1956) — советский ученый, академик (1935). Математические работы относятся к теории групп.
390

Э

Эвольвента круга
— линия, описываемая концом гибкой нерастяжимой нити, сматываемой с круга.
275

Эйлер, Леонард
(1707—1783) — математик, механик и физик, работавший более 30 лет в Петербургской академии наук.
248, 268, 443, 444, 449—452, 454, 467

Эйлера диаграмма
361

Эйлера теорема о многогранниках
278, 450

Эйлера формула
450

Эквивалентные высказывания
369

Экономическая кибернетика
404, 407

Экстремум
— термин, употребляемый для объединения понятий максимума и минимума функции.
437

Электронная вычислительная машина
391—403

Эллипс
— плоская овальная кривая; является геометрическим местом точек, сумма расстояний которых до двух данных точек равна постоянной величине.
302, 314, 465

Эллипсограф
315

«Эрлангенская программа»
386, 389

Условные обозначения

атм	атмосферы
в., вв.	век, века
г	граммы
г.	год, город
гг.	годы
до н. э.	до нашей эры
К	кельвины
др.	другие
кВт·ч	киловатт-часы
кг	килограммы
кг/м^3	килограммы на кубический метр
км	километры
км^2	квадратные километры
км/ч	километры в час
м	метры
м^2	квадратные метры
мес.	месяцы
м/с	метры в секунду
мин	минуты
мкН	микроньютоны
млн.	миллионы
млрд.	миллиарды
мм	миллиметры
Н	ньютоны
н. э.	нашей эры
ок.	около
Па	паскали
р.	родился (в словаре-указателе)
рис.	рисунок
с	секунды
св. лет	световых лет
см	сантиметры
см. рис.	смотри рисунок
см. ст.	смотри статью
см. стр.	смотри страницу
сут	сутки
т	тонна
тыс.	тысяча
ч	часы (t ч — t часов)

Математические символы

∞	бесконечность
$>$	больше
$\geqslant$	больше или равно (не меньше)
$<$	меньше
$\leqslant$	меньше или равно (не больше)
$\int$	интеграл (неопределенный)
$\int_a^b$	интеграл определенный, с нижним пределом a и верхним пределом b
lg	логарифм десятичный
ln	логарифм натуральный
$\log_a b$	логарифм числа b при основании a
mod	модуль
$\parallel$	параллельно
$\perp$	перпендикулярно
const.	постоянная
lim	предел
$\approx$	приближенно равно
Δ	приращение
%	проценты
$\Rightarrow$	следует
$\rightarrow$	стремится к
Σ	сумма
$\equiv$	тождественно; тождественно равно
$\triangle$	треугольник
$\angle$	угол
$f(\ )$, $F(\ )$	функция одной или нескольких переменных
$\Leftrightarrow$	эквивалентно

Том 2
Мир небесных тел.
Числа и фигуры

03:8Ю
Д-38

Ведущие редакторы:
ТАТТАР Г. В.
УМАНСКИЙ Г. С.

Редактор-картограф
ВАСКАНЯН Л. Ф.

Специальные редакторы:
РАХЛИН И. Е.
ЦВЕТКОВ А. Т.

Контрольные редакторы:
ПОНОМАРЕВ Д. Н.
БИТЮЦКОВ В. И.

Младший редактор
ЖУЙКОВ Л. Д.

Художественный редактор
ЮКИНА Л. Ж.

Редактор по фото
ПОПОВА А. А.

Младший художественный редактор
УСАНОВА И. Б.

Технический редактор
КОПНИНА Н. Н.

Корректоры:
АНТОНОВА В. С.
РЕЙБЕКЕЛЬ В. Н.

Оформление и макет издания художника
ЖУКОВА М. Г.

Макет тома художника
СОБОЛЕВА Ю. А.

Иллюстрации в томе выполнили художники:
АНТОНОВ А. Г.
БОРОДКИН М. И.
ЕЛЬСКАЯ Е. А.
ЖДАН В. В.
КОШКИН Ю. Ф.
ЛУХИН С. Ф.
МАРКОВСКИЙ В. Г.
НАУМОВ В. Г.
ОСТОЛЬСКИЙ К. О.
РАДАЕВ В. Д.
РЕЗНИКОВ С. М.
СЕРГЕЕВА М. Н.
СКОБЕЛЕВ В. М.
СОКОЛОВСКИЙ А. А.
ТЕМЧИН М. З.
ЧЕРНОВ В. Н.
ШАРОВ С. А.
ЯНКИЛЕВСКИЙ В. Б.

Фотоиллюстрации выполнили:
БРЕЛЬ В. Т.
ГИППЕНРЕЙТЕР В. Е.
ЗИМНОХ С. Б.
КИВРИН В. Д.
КРИЧЕВСКИЙ Д. М.
КРЮКОВ В. И.
МАРКЕЛОВ А. С.
НУТОВИЧ Е. М.
ОСИПОВ Б. И.
РАСКИН Б. Л.
РАТНИКОВ А. Н.
РАХМАНОВ Н. Н.
РОЖКОВ Е. П.
СУХОВАРОВА О. А.
ЧИЛИКИН О. Б.
ЧУПРИКОВ Ю. И.

Детская энциклопедия для среднего и старшего возраста.
Изд. 3, т. 1—12.
480 стр. с илл. и карт.

Издательство «Педагогика» Академии педагогических наук СССР и Комитета по делам издательств, полиграфии и книжной торговли Совета Министров СССР.
Москва, 107066, Лефортовский пер., 8.
Редакция словарно-энциклопедических изданий.
Москва, 109028, Хохловский пер., 16.

Сдано в набор 19/X 1971 г.
Подписано в печать 21/VII 1972 г.
А09371
Бумага 84×108 1/16
офсетная ГОЗНАК № 1 80 г.
Печ. л. 30. Усл. л. 50,4
Уч.-изд. л. 55,70.
Тираж 500 000 экз. (первый завод 150 000).
Заказ 742.
Цена 3 р. 46 к.

Ордена Трудового Красного Знамени Калининский полиграфический комбинат Главполиграфпрома Комитета по делам издательств, полиграфии и книжной торговли Совета Министров СССР.
Гор. Калинин, проспект Ленина, д. 5.

Содержание

Числа и фигуры

А. И. Маркушевич
243 Несколько слов о математике

Числа

И. Г. Башмакова
245 Как люди считали в старину и как писали цифры
247 Счет двойками, тройками и дюжинами
248 Задача о взвешивании
248 Наш устный счет
250 Счет у первобытных народов
252 Первые нумерации
253 Алфавитные нумерации. «Псаммит»
256 Позиционные системы

В. И. Нечаев
259 Простейшие неопределенные уравнения
259 Пифагоровы треугольники
260 Взвешивание груза на чашечных весах
260 Раскрой фанеры
261 Неопределенные уравнения
261 Рациональные и целые решения неопределенных уравнений первой степени. Метод рассеивания
263 Решение задачи о взвешивании
264 Неопределенные системы уравнений первой степени
264 Решение задачи о раскрое фанеры
266 Целые решения неопределенных уравнений степени выше первой

Фигуры и тела

М. В. Потоцкий
270 Геометрия вокруг нас

И. Г. Башмакова
280 Как возникла геометрия
280 Возникновение геометрии как науки
281 Построение дедуктивной системы
283 Постулат о параллельных и неевклидовы геометрии

И. М. Яглом
285 Геометрические преобразования
285 Что такое геометрия
287 Движения
288 Преобразования подобия
290 Линейные преобразования
293 Преобразования как основа классификации теорем

Н. И. Польский
294 О различных геометриях
294 С чего начинается изучение геометрии
295 Как применяется геометрическая теория
297 Аксиома о параллельных
300 Равна ли сумма углов треугольника 180°
302 Нужны ли другие геометрии
305 Чем отличаются различные геометрии

Функции

В. А. Ефремович
306 Что такое координаты и для чего они служат
308 Декартовы координаты точки
308 Простейшие задачи
309 Задание фигуры, состоящей из бесчисленного множества точек
311 Прямая
312 Основные задачи на прямую
313 Окружность
314 Аналитическое решение геометрических задач
315 Неразрешимые задачи на построение
316 Полярные координаты
317 Координаты на сфере
318 Криволинейные координаты на любой поверхности. Общая идея координат

Н. Я. Виленкин
319 Функции в природе и технике
320 Жесткость балки
320 Прогиб балки.
321 Сосредоточенная нагрузка
322 Число *e*. Натуральные логарифмы
322 Один человек может удержать корабль
323 Радиоактивный распад вещества
323 Остывание чайника
324 Почему парашютист падает равномерно
324 Как измеряют высоту при помощи барометра
325 Сколько топлива должна взять ракета
325 Гармонические колебания
326 Колебания маятника
326 Разряд конденсатора
326 Как соединить две трубы
326 Изгиб колонны
327 Затухающие колебания
327 Вынужденные колебания
328 Сложение колебаний
328 Биения
330 Приливы и отливы
330 Спектральный анализ
330 Как машина открыла теорему
330 Почему не работал трансатлантический кабель
331 Радиоприемник и камертон
331 Заключение

В. Г. Болтянский и Н. Я. Виленкин
332 Интеграл и производная
332 Задача Кеплера
332 Математика за чайным столом
332 Объем тела
334 Промер реки
335 В автомобиле
335 Интеграл
336 Геометрическое вычисление интегралов
338 Применение интегралов
339 Чудесная формула
340 Как измерить скорость полета пули
340 Скорость радиоактивного распада
341 Умеете ли вы проводить касательную?
342 Производная
343 Производные многочленов
343 Пчелы-математики
344 Как сделать самую большую коробку
345 Балка наибольшей прочности
345 Формула Ньютона — Лейбница
346 Производные синуса и косинуса
347 Производная показательной функции
347 Радиоактивный распад
348 Показательная функция в природе и технике
348 Леверье и Адамс открывают новую планету
350 Уравнение гармонических колебаний
350 Моделирование

Множества и операции

П. С. Александров
351 Понятие множества
351 Множества конечные и бесконечные
352 Взаимно однозначное соответствие между двумя множествами
355 Счетные множества
355 Множество всех рациональных чисел счетно
356 Множество всех действительных чисел несчетно
357 Мощность множества

И. М. Яглом
360 Алгебра множеств и алгебра логики
360 Алгебра чисел
361 Алгебра множеств
362 «Нуль» и «единица»
364 Удивительная алгебра
366 Дополнение множества. Аналогия между сложением и умножением множеств
368 Два способа задания множества. Множества и высказывания
368 Алгебра множеств и алгебра высказываний
370 Отрицание. Отношение следствия
371 Законы мысли
372 Правила вывода
В. Г. Болтянский и Н. Я. Виленкин
374 Чем занимается алгебра
374 Числа и действия
374 Необычная конференция
375 Фундамент алгебры
376 Сила букв
377 Кольца
378 Поля
378 Разложение на множители и решение уравнений
378 Разложение чисел на множители
379 Разложение многочленов на множители
379 Удивительное разложение
380 Разложение многочленов на множители и решение уравнений
380 Основная теорема алгебры многочленов
381 Решение уравнений в радикалах
382 Циркуль и линейка
383 Группы
383 Умножение геометрических преобразований
384 Что такое равные фигуры
385 Группы геометрических преобразований
386 Разные геометрии
386 Группы симметрий
387 Симметрия в природе
387 Группы алгебраических преобразований
389 Абстрактная теория групп
390 Заключение

Математика учит предсказывать и управлять

Ю. И. Соколовский
391 Электронные вычислительные машины
391 Создать электронный арифмометр!
392 Двоичная нумерация
393 Считают лампы
394 Обязанности вычислителя
395 Возможен ли такой автомат?
396 Главные части машины
398 Инструкция для машины
399 Исполнение программы
399 Программа с преобразованиями
400 Универсальность машины
401 Автоматический перевод
В. М. Глушков
404 Что такое кибернетика
404 Управляющие системы
405 Информация и кодирование
406 Теория автоматов
407 Вычислительная техника в народном хозяйстве
409 Разумная машина — верный помощник человека
В. М. Монахов
413 Чем занимается теория линейного программирования
Е. С. Вентцель
417 Исследование операций
Б. В. Гнеденко
420 Наука о случайном
420 Обыденные представления
421 Примеры случайных событий
422 Зачем нужно изучать случайные явления
423 Зарождение науки о случае
425 Теоремы сложения и умножения вероятностей
426 Дополнительные исторические сведения
427 Закон больших чисел
428 Некоторые современные направления развития теории вероятностей
Е. С. Вентцель
429 Теория игр
429 Чем занимается теория игр
429 Парная игра с нулевой суммой. Цена игры
430 Игра в нормальной форме. Матрица игры
432 Примеры конечных игр. Принцип минимакса
434 Седловая точка. Чистая цена игры
435 Решение игры в смешанных стратегиях. Основная теорема теории игр

Выдающиеся математики

И. Г. Башмакова
436 Архимед
А. П. Юшкевич
438 Омар Хайям
М. В. Чириков
439 Франсуа Виет
М. В. Чириков
441 Рене Декарт
И. Г. Башмакова
443 Пьер Ферма
И. Г. Башмакова
444 Исаак Ньютон
М. В. Чириков
447 Готфрид Вильгельм Лейбниц
А. П. Юшкевич
449 Леонард Эйлер
С. С. Демидов
451 Жозеф Луи Лагранж
И. Г. Башмакова
453 Карл Фридрих Гаусс
И. Г. Башмакова
455 Николай Иванович Лобачевский
И. Г. Башмакова
457 Эварист Галуа
И. Г. Башмакова
458 Пафнутий Львович Чебышёв
М. В. Чириков
460 Софья Васильевна Ковалевская
С. С. Демидов
461 Норберт Винер

Справочный отдел

И. Г. Башмакова и А. П. Юшкевич
464 Летопись знаменательных дат развития математики
В. И. Битюцков
468 Что читать по математике
В. И. Битюцков
471 Словарь-указатель
Б. А. Кордемский
Занимательные задачи и вопросы
268, 292, 302, 323, 329, 336, 349, 354, 359, 381, 402, 416.